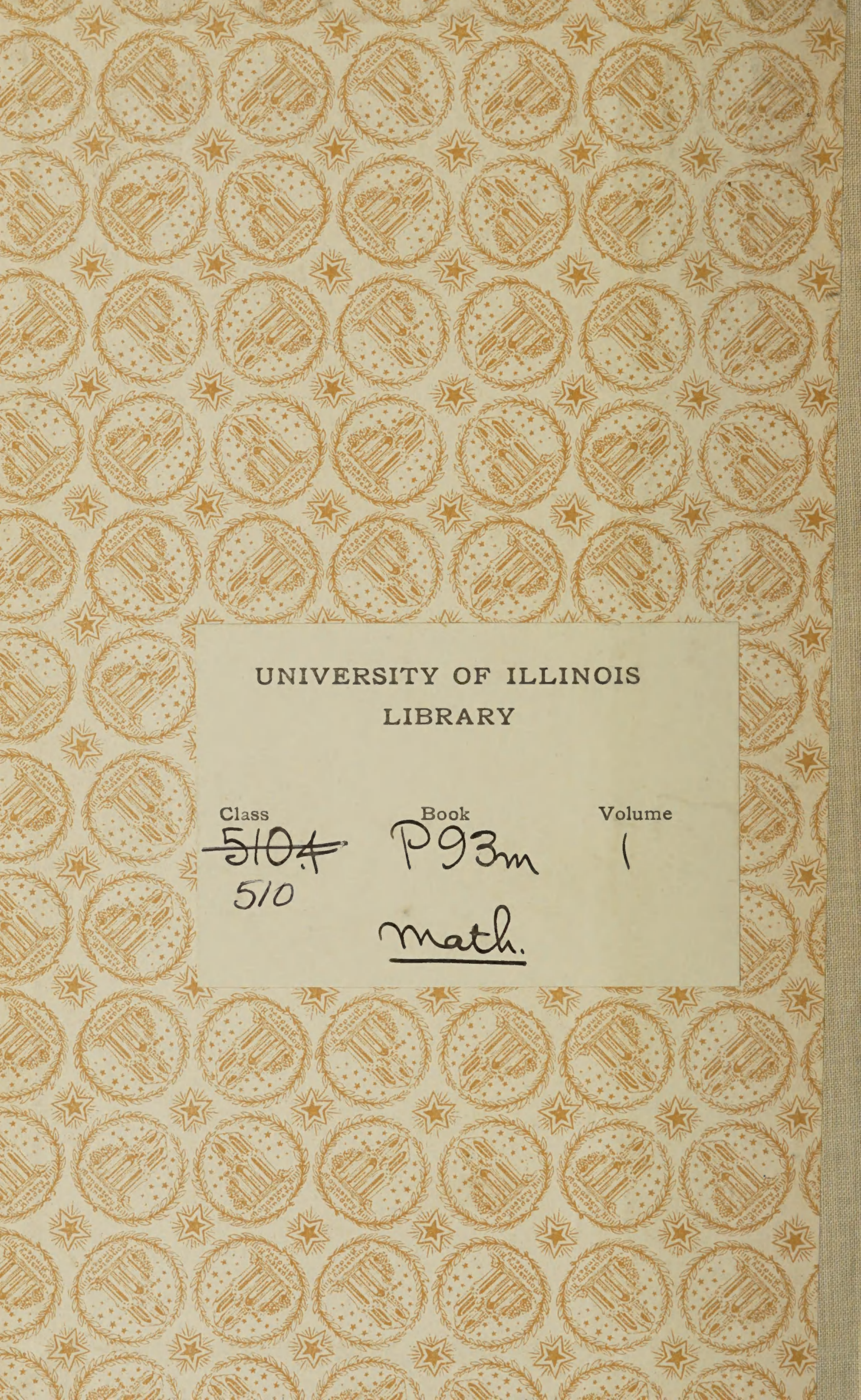
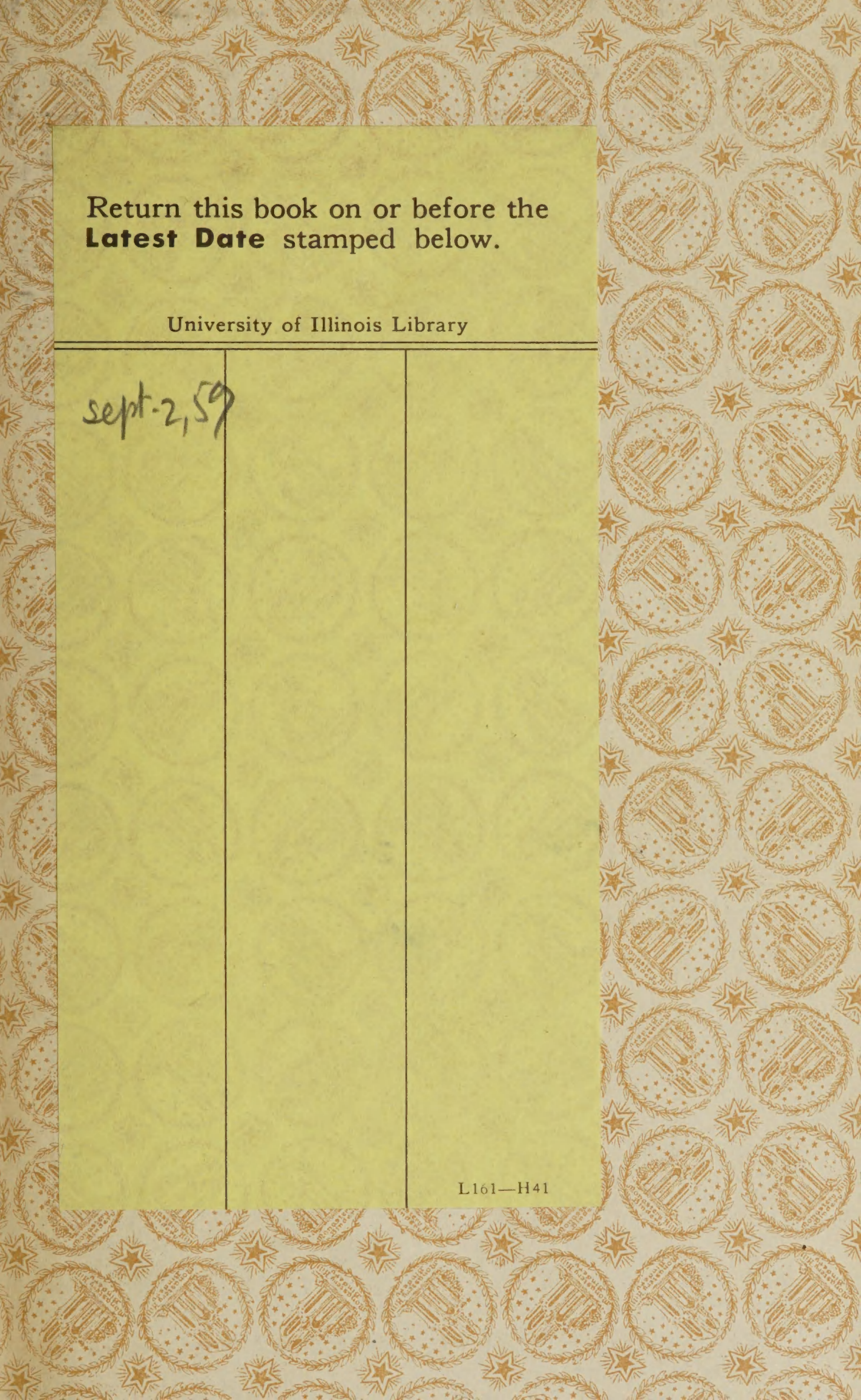
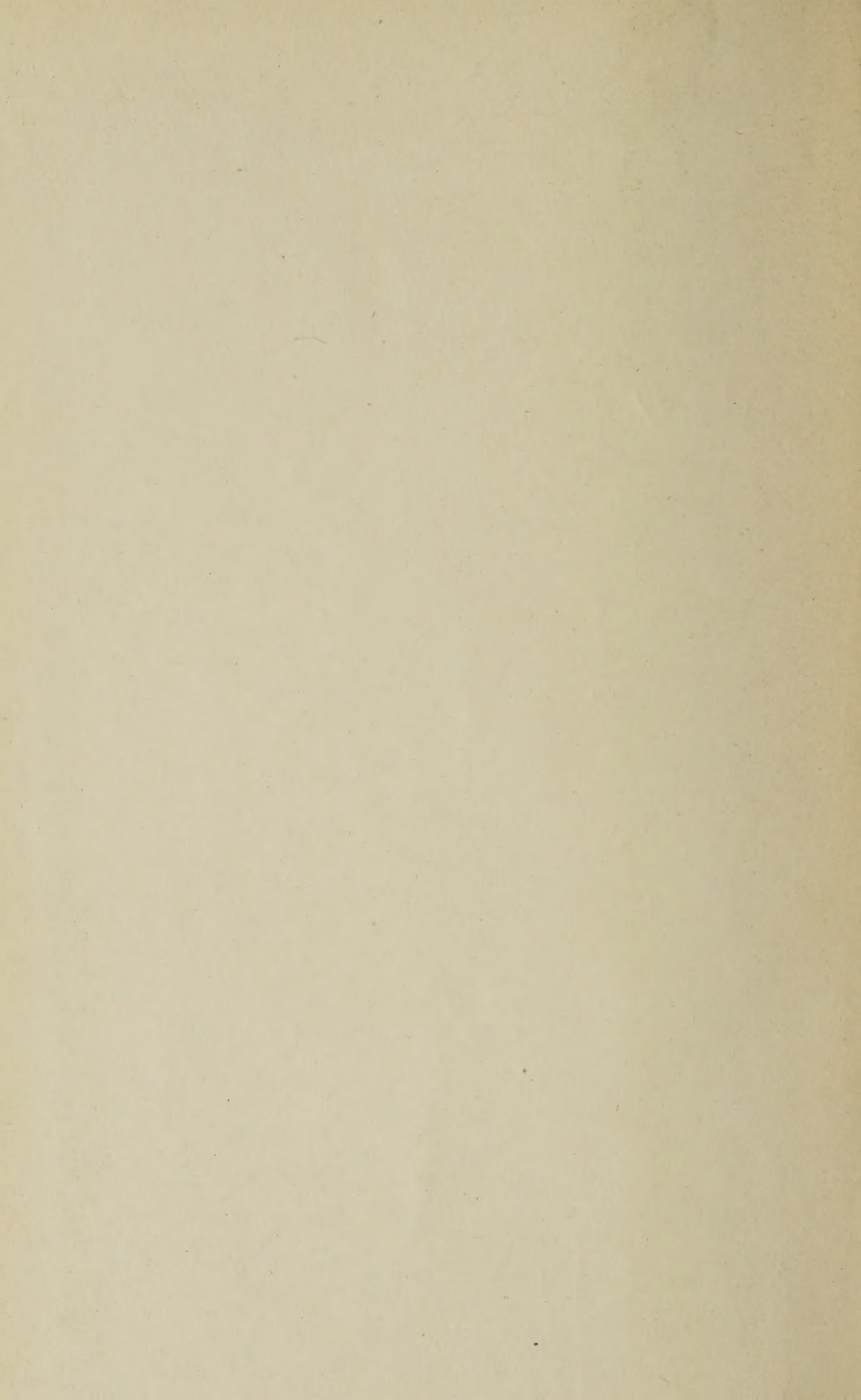
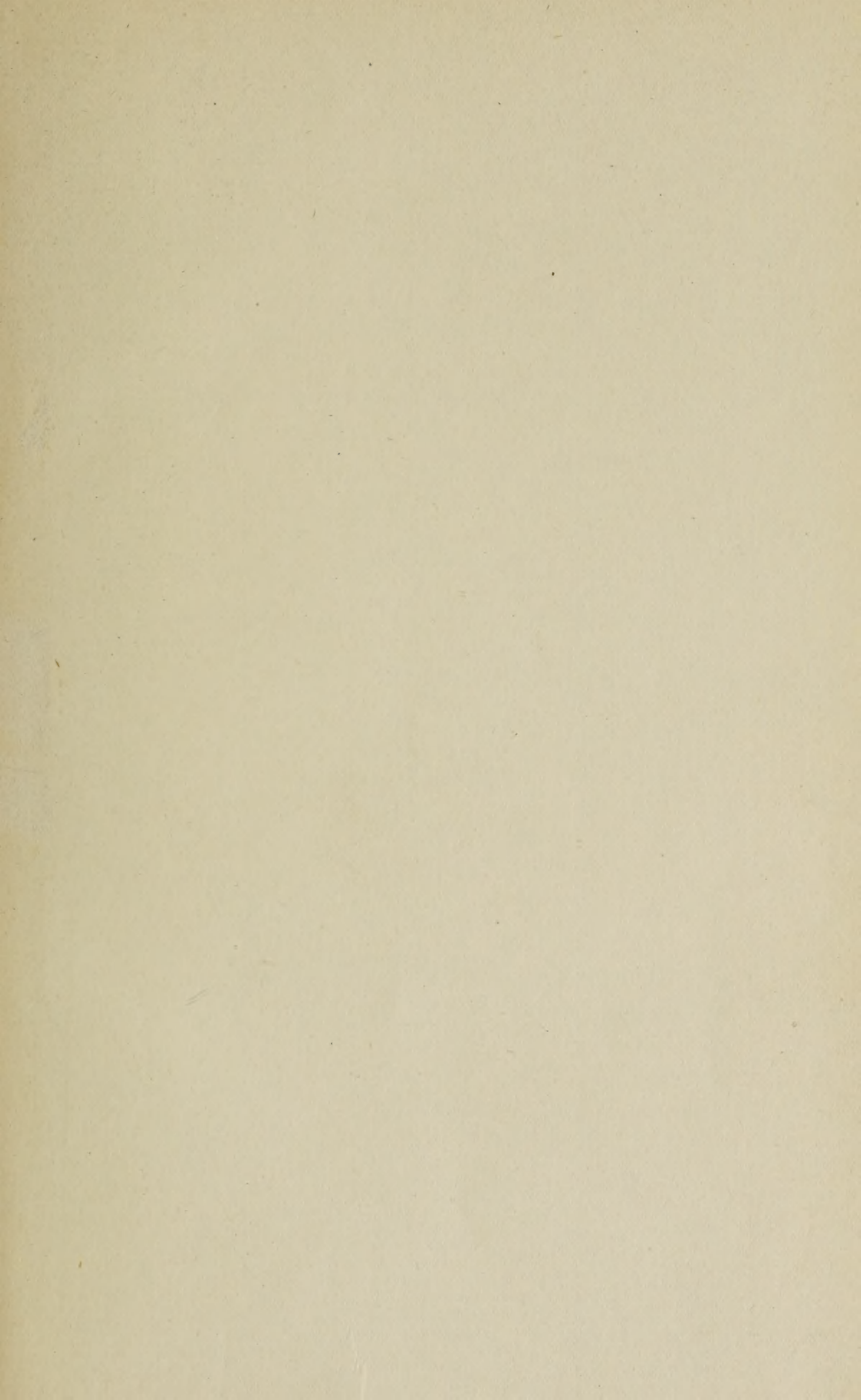
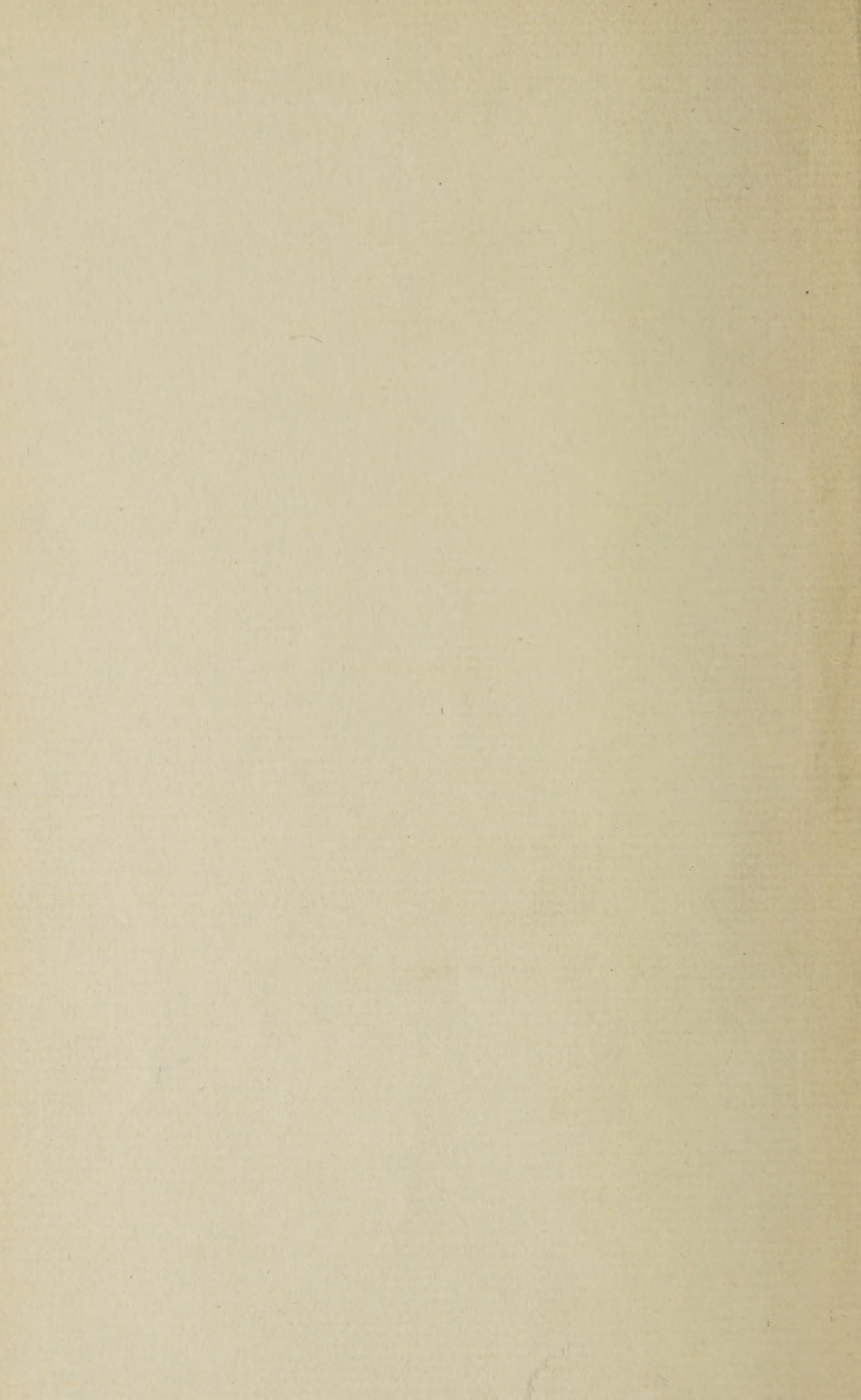












ZUR THEORIE

DER

HYPERELLIPTISCHEN FUNCTIONEN

INSBESONDERE

DERJENIGEN 3TER ORDNUNG ($\varrho = 4$).

BEHUFS

DER HABILITATION ALS PRIVATDOCENT

DER PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER KGL. BAYRISCHEN LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT

ZU MÜNCHEN

VORGELEGT

VON

Dr. ALFRED PRINGSHEIM.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1877.

Zur Theorie der hyperelliptischen Functionen, insbesondere derjenigen dritter Ordnung ($\varrho = 4$).

Von

Alfred Pringsheim in München.

Die allgemeine ϑ-Function mit ϱ Variablen, welche durch den Ausdruck definirt wird

$$\vartheta(v_1, \cdots v_\varrho) = \sum_{-\infty\ \nu_1 \ldots \nu_\varrho}^{+\infty\ (\varrho)} e^{\sum\limits_{1}^{\varrho}{}_{\alpha} \nu_\alpha (\nu_1 \tau_{\alpha 1} + \cdots + \nu_\varrho \tau_{\alpha\varrho}) \pi i} \cdot e^{(2\nu_1 v_1 + \ldots . 2\nu_\varrho v_\varrho)\pi i}$$

wird charakterisirt durch ein System von Constanten oder Moduln:

$$\begin{array}{cccc} \tau_{11} & \tau_{12} & \cdots & \tau_{1\varrho} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \cdots & \tau_{2\varrho} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \tau_{\varrho 1} & \tau_{\varrho 2} & \cdots & \tau_{\varrho\varrho}, \end{array}$$

deren Anzahl vermöge der Bedingung

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$$

gleich $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}$ ist. Diese $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}$ Moduln sind von einander durchaus unabhängig und nur — behufs der Convergenz jener ϱ-fach unendlichen ϑ-Reihe — der Beschränkung unterworfen, dass die Quadratzerlegung des reellen Theiles von

$$\sum_{1}^{\varrho}{}_{\alpha} \nu_\alpha (\nu_1 \tau_{\alpha 1} + \cdots + \nu_\varrho \tau_{\alpha\varrho}) \pi i$$

lauter negative Coëfficienten besitzt.

Diejenigen ϑ-Functionen, welche bei der Umkehrung der Abel'schen Integrale auftreten, bilden eine speciellere Gattung der eben erwähnten allgemeinen, insofern zwischen den $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}$ Moduln eine Anzahl von Relationen stattfinden muss. Riemann hat gezeigt

1*

(s. Theorie der Abel'schen Functionen, Crelle's Journal, Bd. 54), dass die Umkehrungsfunctionen der allgemeinsten Abel'schen Integrale erster Gattung, d. h. solcher allenthalben endlich bleibender Integrale, deren Differential eine $2\varrho + 1$ fach zusammenhängende algebraische Function ist, nur $3\varrho - 3$ unabhängige Constanten enthalten, dass also zwischen den $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}$ ϑ-Moduln $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2} - (3\varrho - 3)$ oder $\frac{(\varrho-2)(\varrho-3)}{2}$ Relationen stattfinden müssen. Die Anzahl der unabhängigen Constanten vermindert sich noch mehr für speciellere Gattungen Abel'scher Integrale, und zwar reducirt sie sich für den einfachsten Fall, nämlich den der hyperelliptischen Integrale, auf $2\varrho - 1$. Diese Integrale, welche bekanntlich die Variable nur in rationaler Verbindung mit einer Quadratwurzel aus einem Polynom $2\varrho + 1^{\text{ten}}$ Grades enthalten, scheinen zwar zunächst $2\varrho + 1$ unabhängige Constanten (Verzweigungswerthe) zu besitzen: allein es lässt sich stets deren Anzahl durch eine lineare Transformation auf $2\varrho - 1$ reduciren, und ebenso gross kann also auch nur die Anzahl der unabhängigen ϑ-Moduln sein. Daraus folgt nun, dass zwischen den Moduln *hyperelliptischer* ϑ-Functionen $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2} - (2\varrho - 1)$ oder $\frac{(\varrho-1)(\varrho-2)}{2}$ Relationen bestehen müssen.

Welcher Art diese Relationen sein müssen, ergiebt sich aus einem von Herrn Weierstrass herrührenden Satze über das Verschwinden hyperelliptischer ϑ-Functionen, welcher folgendermassen lautet:

Bezeichnet man mit η den Index einer hyperelliptischen ϑ-Function mit ϱ Variablen von folgender Zusammensetzung

$$\eta = (1, 3, 5 \cdots 2\varrho - 1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_\varrho)$$

oder

$$\eta = (1, 3, 5, \cdots 2\varrho - 1, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{\varrho+1}),$$

wo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_\varrho, \varepsilon_{\varrho+1}$ ϱ resp. $\varrho + 1$ beliebige Zahlen der Reihe $0, 1, 2, \cdots 2\varrho$ bezeichnen, dann ist stets

$$\vartheta_\eta (0, 0 \cdots 0) \lessgtr 0$$

Bildet man dagegen

$$\eta' = (1, 3, 5, \cdots 2\varrho - 1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_r),$$

wo $r < \varrho$ (oder $> \varrho + 1$ — insofern man bekanntlich jede Combination von $\varrho + 1 + \alpha$ Indices durch diejenigen $\varrho - \alpha$ ersetzen kann, welche noch zur Reihe $0, 1, 2, \cdots 2\varrho$ fehlen), so wird stets

$$\vartheta_{\eta'} (0, 0, \cdots 0) = 0.$$

(Dieser Satz findet sich in einer Abhandlung meines verehrten Lehrers Herrn Königsberger über Transformation der Abel'schen Functionen, Crelle's Journal Bd. 64.) Der Beweis dieses Satzes beruht wesentlich darauf, dass die Argumente und Moduln der betreffenden ϑ-

Functionen in der bekannten Weise von einem entsprechenden Systeme hyperelliptischer Integrale 1ter Gattung abhängen, und es bildet daher dieses Verschwinden aller ϑ-Functionen, deren Index die Form η' hat, für die Nullwerthe der Argumente zunächst jedenfalls eine *nothwendige* Bedingung dafür, dass das System ein hyperelliptisches ist.

Diese Bedingung hat die Form von Relationen zwischen den ϑ-Moduln $\tau_{11} \cdots \tau_{\varrho\varrho}$, sobald sich unter den ϑ-Functionen von der Form $\vartheta_{\eta'}(v_1 \cdots v_\varrho)$ *gerade* Theta's befinden, welche also nicht für die Nullwerthe der Argumente an sich verschwinden würden. Es ist nun aber leicht zu zeigen, dass sich für $\varrho \geqq 3$ unter den Functionen, deren Index die Form η' hat, in der That stets eine Anzahl gerader Theta's befinden müssen.

Zunächst ist klar, dass die Indices *aller* überhaupt existirenden $2^{2\varrho}$ ϑ-Functionen sich auf eine der beiden Formen η oder η' bringen lassen müssen, und dass alsdann *alle ungeraden* Theta's Indices von der Form η' haben müssen — da sie ja für die Nullwerthe der Argumente in jedem Falle verschwinden. Nun lautet die Bedingung dafür, dass $\vartheta_\lambda(v_1 \cdots v_\varrho)$ eine ungerade Function sein soll:

$$m_1^\lambda n_1^\lambda + m_2^\lambda n_2^\lambda + \cdots + m_\varrho^\lambda n_\varrho^\lambda \equiv 1 \pmod 2,$$

wo m_α^λ, n_α^λ die Charakteristiken von ϑ_λ bedeuten. Die Anzahl aller möglichen ungeraden ϑ-Functionen wird daher gleich sein der Anzahl der Lösungen dieser Congruenz, wenn nur solche Lösungen in Betracht gezogen werden, welche nach dem Modul 2 incongruent sind, also alle Combination von der Form (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1) — mithin gleich $2^{\varrho-1}(2^\varrho - 1)$.

[NB. Ich will bei dieser Gelegenheit bemerken, dass sich die Anzahl der nach dem Modul 2 incongruenten Lösungen der obigen Congruenz noch in anderer Form darstellen lässt, und dass sich aus der Vergleichung dieser beiden verschiedenen Darstellungen eine a priori wohl nicht ersichtliche ganzzahlige Identität ergiebt. Befriedigt man nämlich zunächst jene Congruenz in der Weise, dass man dem ersten Gliede den Werth 1 giebt, während man alle übrigen verschwinden lässt, so bleiben für jedes der $\varrho - 1$ verschwindenden Glieder noch die drei Möglichkeiten (0, 0), (0, 1), (1, 0), im ganzen also $3^{\varrho-1}$ Combinationen, und man erhält daher, wenn man nun jenes eine nicht verschwindende Glied alle möglichen ϱ Stellen einnehmen lässt, $\varrho \cdot 3^{\varrho-1}$ Lösungen. Lässt man jetzt 3 Glieder den Werth 1 annehmen und die übrigen $\varrho - 3$ verschwinden, so ergeben sich durch Erschöpfung aller möglichen Combinationen $\frac{\varrho(\varrho-1)(\varrho-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3^{\varrho-3}$ Lösungen, u. s. f. Man gelangt auf diese Weise schliesslich zu einem Ausdrucke von der Form

$$\sum_{0}^{\varrho'}{}_{\alpha} \frac{\varrho(\varrho-1)(\varrho-2)\cdots(\varrho-2\alpha)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(2\alpha+1)}\, 3^{\varrho-(2\alpha+1)},$$

wo die Summation über α zu erstrecken ist über alle ganzen Zahlen von 0 bis ϱ' und $\varrho' = \frac{\varrho-1}{2}$, wenn ϱ ungerade, $\varrho' = \frac{\varrho}{2} - 1$, wenn ϱ gerade.

Hieraus ergiebt sich dann die erwähnte Identität in der Form

$$\sum_{0}^{\varrho'}{}_{\alpha} \frac{\varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-2\alpha)}{1\cdot 2\cdots(2\alpha+1)}\, 3^{\varrho-(2\alpha+1)} = 2^{\varrho-1}(2^{\varrho}-1)$$

welche sich unmittelbar verificiren lässt, indem man

$$2^{\varrho-1}(2^{\varrho}-1) = \tfrac{1}{2}(2^{2\varrho}-2^{\varrho}) = \tfrac{1}{2}\{(3+1)^{\varrho}-(3-1^{\varrho}\}$$

nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt.]

Aus dem Ausdrucke für die Anzahl aller ungeraden ϑ-Functionen ergiebt sich die Anzahl aller geraden gleich $2^{2\varrho} - 2^{\varrho-1}(2^{\varrho}-1)$ $= 2^{\varrho-1}(2^{\varrho}+1)$.

Ferner ist die Anzahl aller ϑ-Functionen, deren Index die Form η hat und welche sämmtlich gerade sein müssen, da sie für die Nullwerthe der Argumente nicht verschwinden, gleich

$$\frac{(2\varrho+1)(2\varrho)(2\varrho-1)\cdots(\varrho+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots\varrho}.$$

Mithin wäre die Zahl derjenigen geraden Theta's, welche etwa noch unter den Functionen mit den Indices η' enthalten sind, gleich

$$2^{\varrho-1}(2^{\varrho}+1) - \frac{(2\varrho+1)(2\varrho)(2\varrho-1)\cdots(\varrho+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots\varrho}$$

und dieser Ausdruck wird nur $=0$ für $\varrho = 2$, dagegen stets > 0 für $\varrho \geqq 3$.

Daraus folgt, dass für $\varrho = 2$, die hyperelliptischen Theta's keiner besonderen Beziehung zwischen den Modulen bedürfen, sondern dass sie gleichzeitig die allgemeinsten Theta's mit 2 Variablen sind. Es hat dies seinen Grund darin, dass die 3 charakteristischen Zahl'en

$\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}$ d. h. die Anzahl der in den allgemeinen ϑ-Function vorhandenen Moduln,

$3\varrho - 3$ d. h. die höchste mögliche Anzahl unabhängiger Constanten, welche in den Umkehrungsfunctionen Abel-scher Integrale 1ter Gattung vorkommen können,

$2\varrho - 1$ d. h. die Anzahl eben dieser Constanten für den speciellen Fall der hyperelliptischen Integrale

für $\varrho = 2$ sämmtlich denselben Werth 3 annehmen.

Für $\varrho = 3$ ist die Anzahl gerader Theta's, deren Index die Form η' hat, gleich 1 und es ist daher das Verschwinden *einer* geraden ϑ-Function — nämlich $\vartheta_{135}(v_1, v_2, v_3)$ die Bedingung dafür, dass das

System ein hyperelliptisches sei: in der That bleiben in Folge dieser einen Bedingung von den 6 vorhandenen ϑ-Moduln nur $2\varrho - 1 = 5$ unabhängig. Was die allgemeinste ϑ-Function mit 3 Variablen und 6 unabhängigen ϑ-Moduln betrifft, so führt diese zwar nicht mehr auf hyperelliptische Functionen, aber immerhin — weil hier $3\varrho - 3 = 6$ ist — noch auf eindeutige Umkehrungen Abel'scher Integrale erster Gattung.

Etwas Aehnliches findet nicht mehr statt, sobald $\varrho > 3$ wird. Denn schon für $\varrho = 4$ — in welchem Falle die Anzahl der überhaupt vorhandenen ϑ-Moduln $= 10$ ist — wird die Anzahl der unabhängigen Constanten im allgemeinsten Falle: $3\varrho - 3 = 9$, und erniedrigt sich für hyperelliptische Functionen auf $2\varrho - 1 = 7$. Und es ist klar, dass mit wachsendem ϱ die Differenz zwischen der Anzahl der vorhandenen ϑ-Moduln und der unabhängig anzunehmenden Constanten der betreffenden Classe Abel'scher Functionen immer mehr zunimmt, da ja die Zahl der ϑ-Moduln $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}$ die Zahl ϱ im Quadrat, dagegen die Anzahl der möglichen unabhängigen Constanten $3\varrho - 3$ die Zahl ϱ nur linear enthält. Es werden also für $\varrho > 3$ die allgemeinsten ϑ-Functionen nicht mehr auf *eindeutige* Umkehrungen Abel'scher Integrale erster Gattung führen, und es werden umgekehrt die betreffenden Abel'schen Functionen nicht die allgemeinsten 2ϱfach periodischen Functionen darstellen. Setzt man also

$$u_1 = \sum_{1}^{\varrho}{}_{\alpha}\, \psi_1(x_\alpha)$$

$$u_2 = \sum_{1}^{\varrho}{}_{\alpha}\, \psi_2(x_\alpha)$$

$$\vdots$$

$$u_\varrho = \sum_{1}^{\varrho}{}_{\alpha}\, \psi_\varrho(x_\alpha)$$

und bestimmt $\psi_1(x) \cdots \psi_\varrho(x)$ in der Weise als Abel'sche Integrale 1ter Gattung, dass jede rationale symmetrische Function von $(x_1, \cdots x_\varrho)$ sich als eindeutige Function von $(u_1 \cdots u_\varrho)$ ergiebt, so gelangt man zu einer *speciellen* Gattung von 2ϱfach periodischen Functionen, insofern zwischen den darin vorkommenden $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}$ Moduln so viele Relationen bestehen müssen, dass nur $3\varrho - 3$ willkürlich bleiben. In Folge dessen ist Herr Weierstrass, um zu den allgemeinsten 2ϱfach periodischen Functionen zu gelangen, zu einer Verallgemeinerung des Umkehrproblem's geführt worden, welche folgendermassen lautet: Es sollen die Functionen $\psi_1(x) \cdots \psi_\varrho(x)$ so bestimmt werden, dass zu

einem Systeme der Grössen $(u_1 \cdots u_\varrho)$ zwar nicht mehr *ein einziges* System, wohl aber nur eine *endliche* Anzahl von Systemen der Grössen $(x_1 \cdots x_\varrho)$ gehören. Alsdann lässt sich zeigen, dass $x_1 \cdots x_\varrho$ die Wurzeln einer Gleichung ϱ^{ten} Grades sind, deren Coefficienten sich *algebraisch* durch die partiellen Ableitungen einer eindeutigen, 2ϱfach periodischen Function von $(u_1 \cdots u_\varrho)$ ausdrücken lassen. Herr Weierstrass hat damit den Existenzbeweis dieser verallgemeinerten Abel'schen Functionen gegeben, während deren wirkliche Darstellung in Folge bedeutender, sich hierbei ergebender algebraischer Schwierigkeiten bisher noch nicht gelungen ist. (S. Monatsberichte der Berliner Akademie, 1869.)

Was nun die hyperelliptischen ϑ-Functionen beliebiger Ordnung betrifft, so müssen, wie oben bemerkt wurde, zwischen ihren Moduln $\frac{(\varrho-1)(\varrho-2)}{2}$ Relationen bestehen, derart, dass

$$2^{\varrho-1}(2^\varrho+1) - \frac{(2\varrho+1)\,2\varrho\,(2\varrho-1)\cdots(\varrho+2)}{1\cdot 2\cdot 3\quad\cdots\quad\varrho} = \mu$$

gerade ϑ-Functionen für die Nullwerthe der Argumente verschwinden. Da aber jedes solche gerade $\vartheta_\lambda(0, 0, \cdots 0)$ gleich Null gesetzt *eine* Bedingung für die ϑ-Moduln repräsentirt und für $\varrho > 3$

$$2^{\varrho-1}(2^\varrho+1) - \frac{(2\varrho+1)\,2\varrho\,(2\varrho-1)\cdots(\varrho+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\varrho} > \frac{(\varrho-1)(\varrho-2)}{2}$$

ist, so können diese μ Bedingungen nicht sämmtlich von einander unabhängig sein, sondern es muss ein Zusammenhang von der Beschaffenheit zwischen ihnen bestehen, dass nur $\frac{(\varrho-1)(\varrho-2)}{2}$ von den überhaupt vorhandenen $\frac{\varrho(\varrho+1)}{2}$ ϑ-Moduln dadurch beschränkt werden, während noch $2\varrho - 1$ völlig unabhängig bleiben.

In Folge dieser für hyperelliptische ϑ-Functionen als *nothwendig* sich ergebenden Bedingungen — (ich werde späterhin für den speciellen Fall $\varrho = 4$ zeigen, dass diese Bedingungen auch die *hinreichenden* dafür sind, dass ein System von ϑ-Functionen die Umkehrungsfunctionen eines hyperelliptischen Systemes liefert) — gestaltet sich das Additionstheorem, sowie eine Reihe daraus abgeleiteter Beziehungen bei weitem einfacher als für die allgemeinen ϑ-Functionen.

Für *allgemeine* Theta's stellt sich das Additionstheorem zunächst in der Form dar:

$$\text{(A)}\quad \begin{cases} \vartheta(u_1+v_1+w_1, \cdots u_\varrho+v_\varrho+w_\varrho)\,\vartheta(u_1-v_1, \cdots u_\varrho-v_\varrho)\cdot \\ \qquad = \sum_\lambda C_\lambda \cdot \vartheta_\lambda(u_1\cdots u_\varrho)\,\vartheta_\lambda(u_1+v_1, \cdots u_\varrho+v_\varrho), \end{cases}$$

wo die Summation nach λ über 2^ϱ beliebige Indices auszuführen ist und C_λ eine Grösse bedeutet, die vom Index λ und den Argumenten

v_α und w_α, *nicht* aber von u_α abhängig ist. Genügt nun ein System der Bedingung, dass alle Theta's, deren Index die Form hat:

$$\eta' = (1, 3, 5, \cdots 2\varrho - 1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_r) \text{ (wo } r < \varrho)$$

für die Nullwerthe der Argumente verschwinden, so lassen sich jene Coëfficienten C_λ in der Weise durch ϑ-Functionen mit Nullargumenten und den Argumenten v_α, w_α ausdrücken, dass Gl. (A) übergeht in:

$$\text{(B)} \quad \vartheta_\eta(0\cdots 0)\vartheta_\eta(w_1\cdots w_\varrho)\vartheta(u_1+v_1+w_1, \cdots u_\varrho+v_\varrho+w_\varrho)\vartheta(u_1-v_1, \cdots u_\varrho-v_\varrho)$$

$$= \sum_\gamma (-1)^{\sum_1^\varrho \alpha\, n_\alpha^\gamma m_\alpha^\eta} \vartheta_\gamma(u_1 \cdots u_\varrho)\, \vartheta_\gamma(u_1 + w_1, \cdots u_\varrho + w_\varrho)$$

$$\times \vartheta_{\eta\gamma}(v_1 \cdots v_\varrho)\, \vartheta_{\eta\gamma}(v_1 + w_1, \cdots v_\varrho + w_\varrho),$$

wo dann die Indices γ und η folgendermassen zu bestimmen sind: Man wählt ϱ beliebige Zahlen aus der Reihe $0, 1, 2, \cdots 2\varrho$, — es seien dies $\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_\varrho$ — und setzt

$$\eta = (1, 3, 5, \cdots 2\varrho - 1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_\varrho),$$

bestimmt alsdann noch einen beliebigen Index δ und bezeichnet mit γ jeden der 2^ϱ Indices, welche entstehen, wenn man δ mit allen möglichen Combinationen von $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_\varrho$ zur 0ten, 1ten, $\cdots \varrho^{\text{ten}}$ Classe verbindet, so dass also γ die folgenden Formen annimmt:

$$\begin{array}{l} \delta \\ \delta\varepsilon_1, \delta\varepsilon_2, \cdots \delta\varepsilon_\varrho \\ \delta\varepsilon_1\varepsilon_2, \delta\varepsilon_1\varepsilon_3, \cdots\cdots \delta\varepsilon_{\varrho-1}\varepsilon_\varrho \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta\varepsilon_1\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_\varrho \end{array}$$

(vgl. die oben erwähnte Königsberger'sche Abhandlung, Crelle's Journal Bd. 64.).

Setzt man jetzt in Gl. (B) $v_\alpha = 0$, $w_\alpha = 0$, so wird

$$\text{(C, 1)} \quad \vartheta_\eta^2 \vartheta^2(u_1 \cdots u_\varrho) = \sum_\gamma (-1)^{\gamma|\eta} \vartheta_{\eta\gamma}^2 \vartheta_\gamma^2(u_1 \cdots u_\varrho) \left(\begin{array}{c}\text{wo das Symbol} \\ (-1)^{\gamma|\eta} = (-1)^{\sum_1^\varrho \alpha\, n_\alpha^\gamma m_\alpha^\eta}\end{array}\right),$$

eine Gleichung, welche eine lineare homogene Relation — zunächst zwischen $1 + 2^\varrho$ ϑ-Quadraten liefert: diese Anzahl wird indessen dadurch beträchtlich erniedrigt, dass in Folge der oben gemachten Voraussetzung ein Theil der Coëfficienten von der Form $\vartheta_{\eta\gamma}^2$ verschwinden muss. Um dies zu beweisen, wähle ich für $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_\varrho$ die Reihe der geraden Zahlen $0, 2, \cdots 2\varrho - 2$, für δ die in der Reihe der über-

haupt möglichen, einfachen, geraden Indices noch fehlende Zahl 2ϱ; alsdann nimmt γ die Form an:

$$\begin{array}{l} 2\varrho \\ (0,\, 2\varrho),\, (2,\, 2\varrho),\cdots(2\varrho-2,\, 2\varrho) \\ (0,\, 2,\, 2\varrho),\, (0,\, 4,\, 2\varrho),\cdots\cdots(2\varrho-4,\, 2\varrho-2,\, 2\varrho) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (0,\, 2,\cdots 2\varrho-2,\, 2\varrho). \end{array}$$

Bildet man jetzt $\eta\gamma$, wo

$$\eta = (1,\, 3,\cdots 2\varrho-1,\, 0,\, 2,\cdots 2\varrho-2) = 2\varrho,$$

so resultirt für den Anfangswerth $\gamma = 2\varrho$ das Fundamentaltheta; ferner nimmt $\eta\gamma$ für die γ der zweiten Horizontalreihe die Werthe an

$$0,\, 2,\cdots\cdots 2\varrho-2,$$

hingegen für alle anderen γ solche Werthe, welche ausser den ungeraden Zahlen $1,\, 3,\cdots 2\varrho-1$ *weniger* als ϱ Zahlen aus der Reihe $0,\, 2,\cdots\cdot 2\varrho$ enthalten, so dass die betreffenden $\vartheta_{\eta\gamma}(0,\, 0,\cdots 0)$ verschwinden müssen, und somit auf der rechten Seite der Gleichung (C, 1) nur die $\varrho+1$ Glieder stehen bleiben, welche den Werthen γ der beiden ersten Horizontalreihen entsprechen.

Wendet man jetzt noch auf Gl. (C, 1) die Substitution (η) an, worunter hier, wie späterhin zu verstehen ist, dass jedes der Argumente

$$u_\alpha \text{ um } \tfrac{1}{2} m_\alpha^\eta + \tfrac{1}{2} n_1^\eta\, \tau_{1\alpha} + \cdots + \tfrac{1}{2} n_\varrho^\eta \tau_{\varrho\alpha}$$

vermehrt werden soll, und bezeichnet mit $a_0,\cdots a_\varrho$ Factoren von der Form ± 1, so ergiebt sich

$$\vartheta^2\vartheta^2(u_1\cdots u_\varrho) + a_0\vartheta_0^2\vartheta_0^2(u_1\cdots) + a_1\vartheta_2^2\vartheta_2^2(u_1,\cdots) + \cdots\cdots a_\varrho\vartheta_{2\varrho}^2\vartheta_{2\varrho}^2(u_1\cdots) = 0,$$

d. h.: Zwischen den $\varrho+2$ Quadraten der Theta's mit einfachem, *geradem* Index und des Fundamentaltheta's findet eine homogene lineare Relation statt. Oder — wenn wir dem Fundamentaltheta, wie üblich, noch den Index $2\varrho+1$ geben: Zwischen den Quadraten aller überhaupt möglichen $\varrho+2$ *geraden* ϑ-Functionen mit einfachem Index findet eine lineare homogene Relation statt.

Um diese Beziehungen nun auch auf ungerade Theta's auszudehnen, werde auf Gl. (C, 1) zunächst eine Substitution angewendet, deren Index $\varkappa$ heissen möge; dann geht dieselbe über in:

$$\text{(C, 2)} \qquad \vartheta_\eta^2\vartheta_\varkappa^2(u_1\cdots u_\varrho) = \sum_\gamma (-1)^{\varkappa|\gamma+\gamma|\eta}\,\vartheta_{\eta\gamma}^2\,\vartheta_{\gamma\varkappa}^2\,(u_1\cdots u_\varrho).$$

Ich wähle nun wieder für $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_\varrho$ die Reihe der geraden Zahlen $0, 2, \cdots 2\varrho - 2$, also wie früher

$$\eta = (1, 3, 5 \cdots 2\varrho - 1, 0, 2, \cdots 2\varrho - 2) = 2\varrho$$

setze aber jetzt

$$\delta = \varkappa,$$

wo $\varkappa$ irgend eine Zahl aus der Reihe der ungeraden $1, 3, 5, \cdots 2\varrho - 1$ bedeuten, also als Index einer ungeraden ϑ-Function angehören soll. Dann nimmt γ die folgenden Formen an:

$$\begin{array}{l} \varkappa \\ (0, \varkappa), (2, \varkappa), \cdots\cdots (2\varrho - 2, \varkappa) \\ (0, 2, \varkappa), (0, 4, \varkappa), \cdots\cdots (2\varrho - 4, 2\varrho - 2, \varkappa) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (0, 2, \cdots 2\varrho - 4, 2\varrho - 2, \varkappa) \end{array}$$

und es enthält somit $\eta\gamma$ wiederum für alle γ von der dritten Horizontalreihe ab neben den Zahlen $1, 3, \cdots 2\varrho - 1$ weniger als ϱ andere Zahlen, so dass also $\vartheta_{\eta\gamma}$ für alle diese verschwindet, während für die γ der ersten und zweiten Horizontalreihe $\eta\gamma$ die Werthe erhält:

$$\begin{array}{l} (\varkappa, 2\varrho) \\ (0, \varkappa, 2\varrho), (2, \varkappa, 2\varrho), \cdots\cdots (2\varrho - 2, \varkappa, 2\varrho), \end{array}$$

für welche $\vartheta_{\eta\gamma}$ *nicht* verschwindet. Gleichzeitig ergeben sich für den Index $\gamma\varkappa$ die Werthe

$$\begin{array}{l} 2\varrho + 1 \\ 0 \quad\quad 2 \cdots\cdots 2\varrho - 2, \end{array}$$

so dass, wenn wir mit $b_0 \cdots b_\varrho$ Factoren von der Form ± 1 bezeichnen, aus Gl. (C, 2) die folgende Beziehung resultirt:

$$\text{(II)} \quad \vartheta^2_{2\varrho} \vartheta^2_\varkappa (u_1 \cdots u_\varrho) + b_0 \vartheta^2_{0,\varkappa,2\varrho} \vartheta^2_0 (u_1 \cdots) + b_1 \vartheta^2_{2,\varkappa,2\varrho} \vartheta^2_2 (u_1 \cdots)$$
$$+ \cdots + b_{\varrho-1} \vartheta^2_{2\varrho-2,\varkappa,2\varrho} \vartheta^2_{2\varrho-2} (u_1 \cdots) + b_\varrho \vartheta^2_{\varkappa,2\varrho} \vartheta^2_{2\varrho+1} (u_1 \cdots),$$

also eine homogene lineare Relation zwischen $\varrho + 2$ Quadraten von ϑ-Functionen mit einfachem Index, von denen eine — $\vartheta_\varkappa (u_1 \cdots u_\varrho)$ — beliebig ungerade, die übrigen gerade sind. In der Reihe der letzteren fehlt hier $\vartheta_{2\varrho} (u_1 \cdots u_\varrho)$. Allein es ist klar, dass man mit Hilfe von Gl. (I) irgend ein gerades $\vartheta (u_1 \cdots u_\varrho)$ aus Gl. (II) eliminiren und dafür $\vartheta_{2\varrho} (u_1 \cdots u_\varrho)$ eintreten lassen kann, und dass man eben dasselbe auch ganz direct erreichen könnte, wenn man oben in der Reihe der $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_\varrho$ statt der Zahl 2ϱ irgend eine andere gerade Zahl weglässt.

Geben wir nun ferner in Gleichung (II) dem Index $\varkappa$ alle möglichen ϱ Werthe aus der Reihe $1, 3 \cdots 2\varrho - 1$, so erhalten wir ϱ Gleichungen, welche alle dieselben $\varrho + 1$ geraden und je eine ungerade ϑ-Function mit den Argumenten $u_1 \cdots u_\varrho$ enthalten. Aus $r + 1$ beliebigen dieser Gleichungen kann man stets r gerade Theta's eliminiren und es ergiebt sich dann also eine homogene lineare Relation zwischen $\varrho + 2$ ϑ-Quadraten, unter denen $r + 1$ ungeraden und $\varrho - r + 1$ geraden ϑ-Functionen angehören. Da aber ausserdem, wie vorher bemerkt wurde, die Wahl der $\varrho + 1$ geraden Theta's mit einfachem Index in Gleichung (II) eine durchaus beliebige ist, so folgt:

> Zwischen beliebigen $r + 2$ hyperelliptischen ϑ-Quadraten mit den Argumenten $u_1 \cdots u_\varrho$, deren Indices Zahlen der Reihe $0, 1, 2, \cdots 2\varrho + 1$ sind, findet eine homogene lineare Relation statt.

Hierbei ist freilich zunächst nicht ersichtlich, ob die Coefficienten dieser Relationen sich gleichfalls wie in Gleichung (I) und (II) in der Form einfacher ϑ-Quadrate mit Nullargumenten darstellen. Allein nachdem einmal die Existenz jener Relationen erwiesen, lässt sich dies leicht zeigen.

Wir bezeichnen mit

$\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{\varrho-1} \alpha_\varrho$ die Reihe der geraden Zahlen $0, 2, 4 \cdots 2\varrho - 2, 2\varrho$

$\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_{\varrho-1} \beta_\varrho$ „ „ „ ungeraden „ $1, 3 \cdots 2\varrho - 3, 2\varrho - 1$

in irgend einer beliebigen Reihenfolge. Dann muss — wenn wir vorläufig die Relationen, in denen das Fundamentaltheta $\vartheta_{2\varrho+1}(u_1 \cdots u_\varrho)$ vorkommt, bei Seite lassen — jede der in Rede stehenden Beziehungen sich in die Form setzen lassen:

$$\text{(III)} \quad \vartheta^2_{\alpha_0}(u_1 \cdots) = A_1 \vartheta^2_{\alpha_1}(u_1 \cdots) + A_2 \vartheta^2_{\alpha_2}(u_1 \cdots) + \cdots\cdots + A_\varkappa \vartheta^2_{\alpha_\varkappa}(u_1 \cdots)$$
$$+ B_1 \vartheta^2_{\beta_1}(u_1 \cdots) + B_2 \vartheta^2_{\beta_2}(u_1 \cdots) + \cdots\cdots + B_\lambda \vartheta^2_{\beta_\lambda}(u_1 \cdots)$$

wo $\varkappa$ und λ ganze Zahlen sind, welche der Bedingung $\varkappa + \lambda = \varrho + 1$ genügen, und $A_1 \cdots A_\varkappa$ $B_1 \cdots B_\lambda$ gewisse Constanten bezeichnen.

Ich setze jetzt zur Abkürzung die combinirten Indices

$(\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_{\varrho+1}, \beta_\varrho) = (1, 3, 5 \cdots\cdot 2_{\varrho-1}) = \varepsilon$

$(\alpha_1 \ \alpha_2 \cdots \alpha_\varkappa \beta_1 \beta_2 \cdots\cdots \beta_\lambda) = \xi$ (also $\varepsilon\xi = \alpha_1 \cdots \alpha_\varkappa \beta_{\lambda+1} \cdots \beta_\varrho$)

und denke mir auf Gleichung (III) die folgenden $\varrho + 1$ Substitutionen halber Perioden angewendet:

$$(\varepsilon \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_{\varkappa-1} \alpha_\varkappa \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_{\lambda-1} \beta_\lambda) = \varepsilon \xi \alpha_1$$
$$(\varepsilon \alpha_3 \alpha_4 \cdots \alpha_\varkappa \quad \beta_1 \beta_2 \beta_3 \cdots \beta_\lambda \quad \alpha_1) = \varepsilon \xi \alpha_2$$
$$\vdots$$
$$(\varepsilon \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{\varkappa-2} \alpha_{\varkappa-1} \alpha_\varkappa \beta_1 \cdots \beta_{\lambda-2} \beta_{\lambda-1}) = \varepsilon \xi \beta_\lambda$$

und alsdann die Argumente $u_1 \cdots u_\varrho$ sämmtlich $= 0$ gesetzt. Dann wird die *linke* Seite der aus (III) resultirenden Gleichungen stets Indices annehmen, welche aus ε und $\varrho + 1$ anderen Indices zusammengesetzt sind, und es werden somit die auf diese Weise sich ergebenden

$$\vartheta_{\alpha_0 \alpha_1 \varepsilon \xi}\, \vartheta_{\alpha_0 \alpha_2 \varepsilon \xi} \cdots \cdots \vartheta_{\alpha_0 \alpha_\varkappa \varepsilon \xi}\, \vartheta_{\alpha_0 \beta_1 \varepsilon \xi} \cdots \cdots \vartheta_{\alpha_0 \beta_\lambda \varepsilon \xi}$$

nicht verschwinden. — Auf der rechten Seite wird fur die erste Substitution das Glied mit A_1 den Index $\varepsilon \xi$ erhalten, und zwar kann $\vartheta_{\varepsilon\xi}(0 \cdots 0)$ *nicht* verschwinden, da ja $\varepsilon\xi$ ausser ε noch $\varrho + 1$ andere Indices $(\alpha_1 \cdots \alpha_\varkappa\, \beta_1 \cdots \beta_\lambda)$ enthält. Hingegen werden alle anderen Glieder Indices erhalten, welche ausser ε nur noch $\varrho - 1$ Zahlen enthalten (da sich von den ϱ Zahlen, welche jeder Substitutions-Index ausser 2 noch enthält, immer eine forthebt) und müssen folglich verschwinden. Ebenso erhält für die zweite Substitution das Glied mit $A_2 \cdots \cdots$, für die letzte das mit B_λ den Index $\varepsilon\xi$, während wiederum alle übrigen Glieder verschwinden. Es ergeben sich somit zur Bestimmung der unbekannten Coefficienten $A_1 \cdots A_\varkappa\, B_1 \cdots B_\lambda$ folgende Gleichungen:

$$\vartheta^2_{\alpha_0 \alpha_1 \varepsilon \xi} = \pm A_1 \vartheta^2_{\varepsilon\xi} \quad \cdots \cdots \quad \vartheta^2_{\alpha_0 \alpha_\varkappa \varepsilon \xi} = \pm A_\varkappa \vartheta^2_{\varepsilon\xi}$$

$$\vartheta^2_{\alpha_0 \beta_1 \varepsilon \xi} = \pm B_1 \vartheta^2_{\varepsilon\xi} \quad \cdots \cdots \quad \vartheta^2_{\alpha_0 \beta_\lambda \varepsilon \xi} = \pm B_\lambda \vartheta^2_{\varepsilon\xi},$$

sodass — wenn wir mit $a_1 \cdots \cdots a_\varkappa\; b_1 \cdots \cdots b_\lambda$ Factoren von der Form ± 1 bezeichnen — Gleichung (III) in die folgende übergeht:

$$\text{(IV)}\; \vartheta^2_{\varepsilon\xi} \vartheta^2_{\alpha_0}(u_1 \cdots) + a_1 \vartheta^2_{\alpha_0\alpha_1\varepsilon\xi} \vartheta^2_{\alpha_1}(u_1 \cdots) + \cdots\cdots + a_\varkappa \vartheta^2_{\alpha_0\alpha_\varkappa\varepsilon\xi} \vartheta^2_{\alpha_\varkappa}(u_1 \cdots)$$
$$+ b_1 \vartheta^2_{\alpha_0\beta_1\varepsilon\xi} \vartheta^2_{\beta_1}(u_1 \cdots) + \cdots\cdots + b_\lambda \vartheta^2_{\alpha_0\beta_\lambda\varepsilon\xi} \vartheta^2_{\beta_\lambda}(u_1 \cdots) = 0.$$

Jetzt bleibt nur noch der oben ausgeschlossene Fall zu betrachten, dass Gleichung (III) etwa das Fundamentaltheta $\vartheta_{2\varrho+1}(u_1 \cdots \cdots u_\varrho)$ enthalte. In diesem Falle möge dasselbe unter $\vartheta_{\alpha_0}(u_1 \cdots \cdots u_\varrho)$ verstanden werden: dann sind die Indices, welche die linke Seite in Folge der gemachten Substitutionen annimmt, die Indices dieser Substitutionen selbst, und da diese sämmtlich aus ε und ϱ anderen Zahlen zusammengesetzt sind, so wird auch in diesem Falle die linke Seite für keine der gemachten Substitutionen verschwinden, während auf der rechten Seite alles genau so bleibt wie früher. Es wird somit schliesslich in Gleichung (IV) statt $\vartheta^2_{\alpha_0}(u_1 \cdots u_\varrho) \cdots \vartheta_{2\varrho+1}(u_1 \cdots u_\varrho)$ zu setzen und in den zusammengesetzten Indices der Coefficienten die Zahl α_0 einfach wegzulassen sein. — Wir können jetzt dem bereits oben ausgesprochenen Satze folgende noch präcisere Form geben:

Genügt ein System von ϑ-Functionen mit ϱ Argumenten der Bedingung, dass alle geraden Theta's, deren Index die Form $\eta' = (1, 3, \cdots 2\varrho - 1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_r)$, wo $r < \varrho$, hat, für

die Nullargumente verschwinden, so findet zwischen $r+2$ beliebigen ϑ-Quadraten mit einfachem Index eine homogene lineare Relation statt, deren Coefficienten einfache und nicht verschwindende ϑ-Quadrate mit Nullargumenten sind. —

Denkt man sich die Zahlen $0, 1, 2, \cdots 2\varrho+1$ in der Weise zu je $\varrho+2$ combinirt, dass man die Indices jedesmal um eine Stelle cyclisch vorrücken lässt, so kann man $2\varrho+2$ Relationen von der Form (IV) erhalten, und wenn man auf jede derselben alle möglichen $2^{2\varrho}-1$ Substitutionen halber Perioden anwendet, so ergeben sich im Ganzen $2^{2\varrho}(2\varrho+2)$ derartige Beziehungen — eine Zahl, welche den von Rosenhain aufgestellten 96 Relationen für die hyperelliptischen Functionen 1ter Ordnung entspricht.

Ich bemerke, dass der soeben ausgesprochene Satz und seine Folgerung mit den beiden Sätzen übereinkommt, welche Herr Weierstrass in seiner Theorie der Abel'schen Functionen folgendermassen ausspricht (Crelle's Journal, a. a. O. § 5.):

I. Durch je ϱ von den Quadraten der Grössen

$$p_1, p_2, \cdots\cdots p_{2\varrho+1}$$

können die übrigen linear ausgedrückt werden.

II. Ebenso können durch je ϱ Quadrate der Grössen

$$p_\gamma, p_{1\gamma}, p_{2\gamma}, \cdots p_{(2\varrho+1)\gamma} \begin{pmatrix}\gamma \text{ eine der Zahlen } 1, 2\cdots 2\varrho+1\\ \text{wo } p_{\gamma\gamma} \text{ fortzulassen ist}\end{pmatrix}$$

die übrigen linear ausgedrückt werden

(wo

$$p_\alpha \;=\; al_\alpha(u_1, u_2 \cdots u_\varrho) = \frac{\vartheta_{2\alpha-1}(v_1\cdots v_\varrho)}{\vartheta(v_1\cdots v_\varrho)} \quad \alpha = 1, 2, \cdots \varrho$$

$$p_{\varrho+\beta} = al_{\varrho+\beta}(u_1, u_2 \cdots u_\varrho) = \frac{\vartheta_{2\beta}(v_1\cdots v_\varrho)}{\vartheta(v_1\cdots v_\varrho)} \quad \beta = 0, 1, 2\cdots \varrho).$$

Man erhält nämlich offenbar den ersten dieser beiden Sätze aus Gleichung (III), wenn man darin $\alpha_0 = 2\varrho+1$ setzt, die übrigen Indices irgendwie aus der Reihe $0, 1, \cdots 2\varrho$ wählt und die ganze Gleichung durch $\vartheta^2_{2\varrho+1}(u_1\cdots u_\varrho)$ dividirt; und ebenso den zweiten jener Sätze, wenn man noch auf Gleichung (III) — in welcher wiederum $a_0 = 2\varrho+1$ zu nehmen ist, falls die Endgleichung ein Theta mit einfachem Index (dem p_γ entsprechend) enthalten soll — eine Substitution halber Perioden anwendet, deren Index einer derjenigen ist, welche in der Gleichung selbst vorkommen, und schliesslich wieder durch $\vartheta^2_{2\varrho+1}(u_1\cdots u_\varrho)$ dividirt.

Ich beweise jetzt einen analogen Satz für gewisse Producte von je 2 ϑ-Functionen, nämlich solche, deren zweiter Factor durch die näm-

liche Substitution halber Perioden aus dem ersten hergeleitet ist, wie in $\vartheta_\alpha(u_1\cdots)\,\vartheta_{\alpha\mu}(u_1\cdots)$, $\vartheta_\beta(u_1\cdots)\,\vartheta_{\beta\mu}(u_1\cdots)$ etc.

Ich zeige:

Zwischen $\varrho+1$ ϑ-Producten von der Form $\vartheta_\alpha(u_1\cdots)\,\vartheta_{\alpha\mu}(u_1\cdots)$, wo α einen variablen Index aus der Reihe $0, 1, \cdots 2\varrho$, μ einen festen Index (aus derselben Reihe und von α verschieden) bedeutet, findet eine homogene lineare Relation statt.

Zu diesem Behufe vermehre ich in Gleichung (B) (S. 441.)

$$v_a \text{ um } -\frac{1}{2}m_a^\beta \qquad -\frac{1}{2}n_1^\beta\,\tau_{a1} \qquad -\cdots\cdots-\frac{1}{2}n_\varrho^\beta\,\tau_{a\varrho}$$

$$w_a \text{ um } +\frac{1}{2}\left(m_a^\alpha+m_a^\beta\right)+\frac{1}{2}\left(n_1^\alpha+n_1^\beta\right)\tau_{a1}+\cdots\cdots+\frac{1}{2}\left(n_\varrho^\alpha+n_\varrho^\beta\right)\tau_{a\varrho}.$$

Alsdann ergiebt sich

$$\text{(D,1)}\ \vartheta_\eta(0,\cdots 0)\,\vartheta_{\eta\alpha\beta}(w_1\cdots)\,\vartheta_\alpha(u_1+v_1+w_1,\cdots)\,\vartheta_\beta(u_1-v_1,\cdots)$$
$$=\sum_\gamma(-1)^{C_\gamma}\vartheta_\gamma(u_1\cdots)\,\vartheta_{\gamma\alpha\beta}(u_1+w_1,\cdots)\,\vartheta_{\eta\gamma\beta}(v_1\cdots)\,\vartheta_{\eta\gamma\alpha}(v_1+w_1\cdots)$$

wo C_γ eine aus den Charakteristiken der vorkommenden Indices zusammengesetzte ganze Zahl bedeutet, welche sich folgendermassen bestimmt: Man setze

$$m_a^{\eta\gamma}=m_a^\eta+m_a^\gamma+2H_a$$

$$m_a^\eta+m_a^\alpha+m_a^\beta=-2M_a+m_a^\nu \qquad m_a^\eta+m_a^\gamma-m_a^\beta+2H_a=-2M_a''+m_a^{\nu''}$$

$$m_a^\gamma+m_a^\alpha+m_a^\beta=-2M_a'+m_a^{\nu'} \qquad m_a^\eta+m_a^\gamma+m_a^\alpha+2H_a=-2M_a'''+m_a^{\nu'''}$$

(wo die ganzen Zahlen H_a, M_a, M_a' etc. durch die Bedingung völlig bestimmt sind, dass die eingeführten Hilfsgrössen m_a^ν, $m_a^{\nu'}$ etc. nur die Werthe 0 oder -1 annehmen sollen).

Dann ist

$$C_\gamma=\sum_1^\varrho{}_a\Big\{n_a^\gamma m_a^\eta+n_a^\alpha m_a^\gamma+H_a\left(n_a^\alpha+n_a^\beta\right)+M_a\left(n_a^\eta+n_a^\alpha+n_a^\beta\right)$$
$$+M_a'\left(n_a^\gamma+n_a^\beta+n_a^\alpha\right)+M_a''\left(n_a^\eta+n_a^\gamma+n_a^\beta\right)+M_a'''\left(n_a^\eta+n_a^\gamma+n_a^\alpha\right)\Big\}.$$

Setzt man nun in Gleichung (D, 1) $v_a=0$, $w_a=0$, so wird:

$$\text{(D,2)}\ \vartheta_\eta\vartheta_{\eta\alpha\beta}\vartheta_\alpha(u_1\cdots)\,\vartheta_\varrho(u_1\cdots)=\sum_\gamma(-1)^{C_\gamma}\vartheta_{\eta\gamma\alpha}\vartheta_{\eta\gamma\beta}\vartheta_\gamma(u_1\cdots)\,\vartheta_{\gamma\alpha\beta}(u_1\cdots).$$

Ich bezeichne jetzt mit $\varepsilon_1, {}_2, \cdots \varepsilon_{\varrho+2}$ $\varrho+2$ verschiedene Zahlen der Reihe $0, 1, \cdots 2\varrho$ und setze

$$\alpha=\varepsilon_{\varrho+1}\ \ \beta=\varepsilon_{\varrho+1}\varepsilon_{\varrho+2}\ \ \eta=(1, 3, \cdots 2\varrho-1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_\varrho).$$

Dann ist zunächst ersichtlich, dass der Coefficient der linken Seite in Gleichung (D, 2) *nicht* verschwindet. Wird ferner $\delta=2\varrho+1$ (Index des Fundamentaltheta's) gesetzt, so nimmt γ die Werthe an

$$2\varrho+1$$
$$\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \varepsilon_\varrho$$
$$\varepsilon_1\varepsilon_2 \quad \varepsilon_1\varepsilon_3 \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \varepsilon_{\varrho-1}\varepsilon_\varrho$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_\varrho .$$

Daraus folgt zunächst, dass auf der rechten Seite der Gleichung (D, 2) $\vartheta_{\eta\gamma\alpha}$ für alle γ, ausser für diejenigen der ersten und zweiten Horizontalreihe verschwindet.

Ausserdem verschwindet aber noch $\vartheta_{\eta\gamma\beta}$ für $\gamma = 2\varrho+1$, während für $\gamma = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_\varrho$ weder $\vartheta_{\eta\gamma\alpha}$, noch $\vartheta_{\eta\gamma\beta}$ verschwindet. Es ergiebt sich somit, wenn man nunmehr die betreffenden Werthe von $\gamma\alpha\beta$ bildet, dass zwischen den Producten:

$$\vartheta_{\varepsilon_{\varrho+1}}(u_1\cdots)\,\vartheta_{\varepsilon_{\varrho+1}\varepsilon_{\varrho+2}}(u_1\cdots)$$

und

$$\vartheta_{\varepsilon_1}(u_1\cdots)\,\vartheta_{\varepsilon_1\varepsilon_{\varrho+2}}(u_1\cdots)\cdots\cdot\vartheta_{\varepsilon_\varrho}(u_1\cdots)\,\vartheta_{\varepsilon_\varrho\varepsilon_{\varrho+2}}(u_1\cdots)$$

eine homogene lineare Relation besteht — womit der oben ausgesprochene Satz bewiesen ist. Derselbe entspricht wiederum einem Satze von Herrn Weierstrass, welcher folgendermassen lautet:

Durch je ϱ von den Producten

$$p_1p_{1\gamma}\ \ p_2p_{2\gamma}\cdots\cdot p_{2\varrho+1}p_{2\varrho+1,\gamma} \quad (\text{wo } p_{\gamma\gamma} \text{ fortzulassen ist})$$

lässt sich jedes der übrigen linear und homogen ausdrücken. —

Ich bemerke schliesslich noch, dass die Anzahl der in jeder der soeben betrachteten Relationen enthaltenen ϑ-Functionen sich noch beträchtlich reducirt, sobald man die Argumente zu Null werden lässt. Bezeichnet man z. B. mit $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ irgend drei Zahlen aus der Reihe $0, 2, \cdots 2\varrho$ — resp. auch die Zahl $2\varrho+1$ — so muss nach Gl. (IV) (S. 445) u. a. auch eine Relation von folgender Form bestehen:

$$\vartheta^2_{\varepsilon\xi}\vartheta^2_{\alpha_0}(u_1\cdots)+a_1\vartheta^2_{\alpha_0\alpha_1\varepsilon\xi}\vartheta^2_{\alpha_1}(u_1\cdots)+a_2\vartheta^2_{\alpha_0\alpha_2\varepsilon\xi}\vartheta^2_{\alpha_2}(u_1\cdots)+P=0$$

wo P ein Aggregat von $\varrho-1$ ϑ-Quadraten bezeichnen soll, deren Indices der Reihe $1, 3, \cdots 2\varrho-1$ angehören. In diesem Falle ist in Gl. (IV) $\lambda = \varrho-1$ zu setzen, und daher:

$$\xi = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \cdots \beta_{\varrho-1}) \quad \varepsilon\xi = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_\varrho).$$

Setzen wir jetzt in obiger Gleichung $u_1 = u_2 = \cdots = u_\varrho = 0$, so muss P verschwinden, und es wird daher, wenn wir noch statt β_ϱ, welches ja einen beliebigen Index der Reihe $1, 3, \cdots 2\varrho-1$ bezeichnet, einfach β schreiben:

$$\text{(V, 1)} \qquad \vartheta^2_{\alpha_1\alpha_2\beta}\vartheta^2_{\alpha_0}+a_1\vartheta^2_{\alpha_0\alpha_2\beta}\vartheta^2_{\alpha_1}+a_2\vartheta^2_{\alpha_0\alpha_1\beta}\vartheta^2_{\alpha_2}=0$$

und für den speciellen Fall, das α_0 den Index des Fundamentaltheta's bedeutet:

$$(\mathrm{V}, 2) \qquad \vartheta^2_{\alpha_1\alpha_2\beta}\vartheta^2_{2\varrho+1} + a_1\vartheta^2_{\alpha_2\beta}\vartheta^2_{\alpha_1} + a_2\vartheta^2_{\alpha_1\beta}\vartheta^2_{\alpha_2} = 0.$$

Es findet somit zwischen je drei ϑ-Quadraten gerader ϑ-Functionen mit einfachem Index und Nullargumenten eine homogene lineare Relation statt.

Ich wende mich jetzt zu dem speciellen Fall $\varrho = 4$ und will mit Hilfe von ϑ-Functionen mit 4 Variablen, welche der Bedingung für hyperelliptische Systeme genügen, das Umkehrproblem für die hyperelliptischen Integrale 1ter Gattung und 3ter Ordnung nach derselben Methode behandeln, welche Rosenhain in seinem „Mémoire sur les Fonctions de deux Variables et à quatre Périodes etc." für die hyperelliptischen Functionen 1ter Ordnung angewendet hat. Ich werde demgemäss eine Anzahl von Relationen zwischen 10 ϑ-Functionen mit den Indices 0, 1, 2, $\cdots$ 8, 9 (wo 9 der Index des Fundamentaltheta's) und mit vier veränderlichen Argumenten $u_1, \cdots u_4$, sowie eine Reihe von Beziehungen für die Theta's mit Nullargumenten entwickeln, werde alsdann zeigen, dass sich die Quotienten aller Theta's mit Nullargumenten durch 7 (bez. 9) Constanten, die aller Theta's mit variablen Argumenten als symmetrische Functionen von 4 Variablen $x_1 \cdots x_4$ und eben jenen Constanten darstellen lassen, und dass endlich die auf diese Weise eingeführten Grössen $x_1 \cdots x_4$ einem hyperelliptischen Differentialgleichung-Systeme 3ter Ordnung genügen, mithin jene ϑ-Quadrate die Lösungen für das Umkehrproblem der betreffenden hyperelliptischen Integrale 3ter Ordnung liefern. —

Die Anzahl derjenigen ϑ-Functionen, deren Index die Form $\eta' = (1, 3, 5, 7, \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r)$ — wo $r < 4$ — hat, beträgt hier 130; unter diesen sind 120 *ungerade* und verschwinden also an sich schon für die Nullargumente, während die folgenden 10 mit den Indices

1357,1 1357,3 1357,5 1357,7 1357,0 1357,2 1357,4 1357,6 1357,8 1357

oder

157 357 137 135 2468 0468 0268 0248 0246 1357

gerade sind und also erst in Folge unserer besonderen Annahme für die Nullargumente verschwinden werden. —

Zunächst gebe ich nun eine Uebersicht über die Indices und Charakteristiken der überhaupt existirenden 256 ϑ-Functionen mit 4 Argumenten, da eine solche für jede weitere Rechnung durchaus unentbehrlich.

	Index λ	m_1^λ	m_2^λ	m_3^λ	m_4^λ	n_1^λ	n_2^λ	n_3^λ	n_4^λ
	0	−1	−1	−1	−1	0	0	0	0
*	1	−1	−1	−1	−1	1	0	0	0
	2	0	−1	−1	−1	1	0	0	0
*	3	0	−1	−1	−1	0	1	0	0
	4	0	0	−1	−1	0	1	0	0
*	5	0	0	−1	−1	0	0	1	0
	6	0	0	0	−1	0	0	1	0
*	7	0	0	0	−1	0	0	0	1
	8	0	0	0	0	0	0	0	1
	9	0	0	0	0	0	0	0	0
	01	0	0	0	0	1	0	0	0
*	02	−1	0	0	0	1	0	0	0
	03	−1	0	0	0	0	1	0	0
*	04	−1	−1	0	0	0	1	0	0
	05	−1	−1	0	0	0	0	1	0
*	06	−1	−1	−1	0	0	0	1	0
	07	−1	−1	−1	0	0	0	0	1
*	08	−1	−1	−1	−1	0	0	0	1
	12	−1	0	0	0	0	0	0	0
*	13	−1	0	0	0	1	1	0	0
	14	−1	−1	0	0	1	1	0	0
*	15	−1	−1	0	0	1	0	1	0
	16	−1	−1	−1	0	1	0	1	0
*	17	−1	−1	−1	0	1	0	0	1
	18	−1	−1	−1	−1	1	0	0	1
	23	0	0	0	0	1	1	0	0
*	24	0	−1	0	0	1	1	0	0
	25	0	−1	0	0	1	0	1	0
*	26	0	−1	−1	0	1	0	1	0
	27	0	−1	−1	0	1	0	0	1
*	28	0	−1	−1	−1	1	0	0	1
	34	0	−1	0	0	0	0	0	0
*	35	0	−1	0	0	0	1	1	0
	36	0	−1	−1	0	0	1	1	0
*	37	0	−1	−1	0	0	1	0	1
	38	0	−1	−1	−1	0	1	0	1
	45	0	0	0	0	0	1	1	0
*	46	0	0	−1	0	0	1	1	0
	47	0	0	−1	0	0	1	0	1
*	48	0	0	−1	−1	0	1	0	1
	56	0	0	−1	0	0	0	0	0
*	57	0	0	−1	0	0	0	1	1
	58	0	0	−1	−1	0	0	1	1
	67	0	0	0	0	0	0	1	1

	Index λ	m_1^λ	m_2^λ	m_3^λ	m_4^λ	n_1^λ	n_2^λ	n_3^λ	n_4^λ
*	68	0	0	0	−1	0	0	1	1
	78	0	0	0	−1	0	0	0	0
	012	0	−1	−1	−1	0	0	0	0
*	013	0	−1	−1	−1	1	1	0	0
	014	0	0	−1	−1	1	1	0	0
*	015	0	0	−1	−1	1	0	1	0
	016	0	0	0	−1	1	0	1	0
*	017	0	0	0	−1	1	0	0	1
	018	0	0	0	0	1	0	0	1
	023	−1	−1	−1	−1	1	1	0	0
*	024	−1	0	−1	−1	1	1	0	0
	025	−1	0	−1	−1	1	0	1	0
*	026	−1	0	0	−1	1	0	1	0
	027	−1	0	0	−1	1	0	0	1
*	028	−1	0	0	0	1	0	0	1
	034	−1	0	−1	−1	0	0	0	0
*	035	−1	0	−1	−1	0	1	1	0
	036	−1	0	0	−1	0	1	1	0
*	037	−1	0	0	−1	0	1	0	1
	038	−1	0	0	0	0	1	0	1
	045	−1	−1	−1	−1	0	1	1	0
*	046	−1	−1	0	−1	0	1	1	0
	047	−1	−1	0	−1	0	1	0	1
*	048	−1	−1	0	0	0	1	0	1
	056	−1	−1	0	−1	0	0	0	0
*	057	−1	−1	0	−1	0	0	1	1
	058	−1	−1	0	0	0	0	1	1
	067	−1	−1	−1	−1	0	0	1	1
*	068	−1	−1	−1	0	0	0	1	1
	078	−1	−1	−1	0	0	0	0	0
*	123	−1	−1	−1	−1	0	1	0	0
	124	−1	0	−1	−1	0	1	0	0
*	125	−1	0	−1	−1	0	0	1	0
	126	−1	0	0	−1	0	0	1	0
*	127	−1	0	0	−1	0	0	0	1
	128	−1	0	0	0	0	0	0	1
*	134	−1	0	−1	−1	1	0	0	0
**	135	−1	0	−1	−1	1	1	1	0
*	136	−1	0	0	−1	1	1	1	0
**	137	−1	0	0	−1	1	1	0	1
*	138	−1	0	0	0	1	1	0	1
*	145	−1	−1	−1	−1	1	1	1	0
	146	−1	−1	0	−1	1	1	1	0
*	147	−1	−1	0	−1	1	1	0	1

(NB. Die mit einem * bezeichneten Indices gehören ungeraden, die mit ** bezeichneten hingegen solchen geraden Theta's an, welche in Folge der gemachten Voraussetzung für die Nullargumente verschwinden.)

	Index λ	m_1^λ	m_2^λ	m_3^λ	m_4^λ	n_1^λ	n_2^λ	n_3^λ	n_4^λ
	148	−1	−1	0	0	1	1	0	1
*	156	−1	−1	0	−1	1	0	0	0
**	157	−1	−1	0	−1	1	0	1	1
*	158	−1	−1	0	0	1	0	1	1
*	167	−1	−1	−1	−1	1	0	1	1
	168	−1	−1	−1	0	1	0	1	1
*	178	−1	−1	−1	0	1	0	0	0
	234	0	0	−1	−1	1	0	0	0
*	235	0	0	−1	−1	1	1	1	0
	236	0	0	0	−1	1	1	1	0
*	237	0	0	0	−1	1	1	0	1
	238	0	0	0	0	1	1	0	1
	245	0	−1	−1	−1	1	1	1	0
*	246	0	−1	0	−1	1	1	1	0
	247	0	−1	0	−1	1	1	0	1
*	248	0	−1	0	0	1	1	0	1
	256	0	−1	0	−1	1	0	0	0
*	257	0	−1	0	−1	1	0	1	1
	258	0	−1	0	0	1	0	1	1
	267	0	−1	−1	−1	1	0	1	1
*	268	0	−1	−1	0	1	0	1	1
	278	0	−1	−1	0	1	0	0	0
*	345	0	−1	−1	−1	0	0	1	0
	346	0	−1	0	−1	0	0	1	0
*	347	0	−1	0	−1	0	0	0	1
	348	0	−1	0	0	0	0	0	1
*	356	0	−1	0	−1	0	1	0	0
**	357	0	−1	0	−1	0	1	1	1
*	358	0	−1	0	0	0	1	1	1
*	367	0	−1	−1	−1	0	1	1	1
	368	0	−1	−1	0	0	1	1	1
*	378	0	−1	−1	0	0	1	0	0
	456	0	0	0	−1	0	1	0	0
*	457	0	0	0	−1	0	1	1	1
	458	0	0	0	0	0	1	1	1
	467	0	0	−1	−1	0	1	1	1
*	468	0	0	−1	0	0	1	1	1
	478	0	0	−1	0	0	1	0	0
*	567	0	0	−1	−1	0	0	0	1
	568	0	0	−1	0	0	0	0	1
*	578	0	0	−1	0	0	0	1	0
	678	0	0	0	0	0	0	1	0
	0123	0	0	0	0	0	1	0	0
*	0124	0	−1	0	0	0	1	0	0
	0125	0	−1	0	0	0	0	1	0
*	0126	0	−1	−1	0	0	0	1	0
	0127	0	−1	−1	0	0	0	0	1
*	0128	0	−1	−1	−1	0	0	0	1

	Index λ	m_1^λ	m_2^λ	m_3^λ	m_4^λ	n_1^λ	n_2^λ	n_3^λ	n_4^λ
	0134	0	−1	0	0	1	0	0	0
*	0135	0	−1	0	0	1	1	1	0
	0136	0	−1	−1	0	1	1	1	0
*	0137	0	−1	−1	0	1	1	0	1
	0138	0	−1	−1	−1	1	1	0	1
	0145	0	0	0	0	1	1	1	0
*	0146	0	0	−1	0	1	1	1	0
	0147	0	0	−1	0	1	1	0	1
*	0148	0	0	−1	−1	1	1	0	1
	0156	0	0	−1	0	1	0	0	0
*	0157	0	0	−1	0	1	0	1	1
	0158	0	0	−1	−1	1	0	1	1
	0167	0	0	0	0	1	0	1	1
*	0168	0	0	0	−1	1	0	1	1
	0178	0	0	0	−1	1	0	0	0
*	0234	−1	−1	0	0	1	0	0	0
	0235	−1	−1	0	0	1	1	1	0
*	0236	−1	−1	−1	0	1	1	1	0
	0237	−1	−1	−1	0	1	1	0	1
*	0238	−1	−1	−1	−1	1	1	0	1
*	0245	−1	0	0	0	1	1	1	0
**	0246	−1	0	−1	0	1	1	1	0
*	0247	−1	0	−1	0	1	1	0	1
**	0248	−1	0	−1	−1	1	1	0	1
*	0256	−1	0	−1	0	1	0	0	0
	0257	−1	0	−1	0	1	0	1	1
*	0258	−1	0	−1	−1	1	0	1	1
*	0267	−1	0	0	0	1	0	1	1
**	0268	−1	0	0	−1	1	0	1	1
*	0278	−1	0	0	−1	1	0	0	0
	0345	−1	0	0	0	0	0	1	0
*	0346	−1	0	−1	0	0	0	1	0
	0347	−1	0	−1	0	0	0	0	1
*	0348	−1	0	−1	−1	0	0	0	1
	0356	−1	0	−1	0	0	1	0	0
*	0357	−1	0	−1	0	0	1	1	1
	0358	−1	0	−1	−1	0	1	1	1
	0367	−1	0	0	0	0	1	1	1
*	0368	−1	0	0	−1	0	1	1	1
	0378	−1	0	0	−1	0	1	0	0
*	0456	−1	−1	−1	0	0	1	0	0
	0457	−1	−1	−1	0	0	1	1	1
*	0458	−1	−1	−1	−1	0	1	1	1
*	0467	−1	−1	0	0	0	1	1	1
**	0468	−1	−1	0	−1	0	1	1	1
*	0478	−1	−1	0	−1	0	1	0	0
	0567	−1	−1	0	0	0	0	0	1
*	0568	−1	−1	0	−1	0	0	0	1

Index λ	m_1^λ	m_2^λ	m_3^λ	m_4^λ	n_1^λ	n_2^λ	n_3^λ	n_4^λ
0578	−1	−1	0	−1	0	0	1	0
*0678	−1	−1	−1	−1	0	0	1	0
1234	−1	−1	0	0	0	0	0	0
*1235	−1	−1	0	0	0	1	1	0
1236	−1	−1	−1	0	0	1	1	0
*1237	−1	−1	−1	0	0	1	0	1
1238	−1	−1	−1	−1	0	1	0	1
1245	−1	0	0	0	0	1	1	0
*1246	−1	0	−1	0	0	1	1	0
1247	−1	0	−1	0	0	1	0	1
*1248	−1	0	−1	−1	0	1	0	1
1256	−1	0	−1	0	0	0	0	0
*1257	−1	0	−1	0	0	0	1	1
1258	−1	0	−1	−1	0	0	1	1
1267	−1	0	0	0	0	0	1	1
*1268	−1	0	0	−1	0	0	1	1
1278	−1	0	0	−1	0	0	0	0
*1345	−1	0	0	0	1	0	1	0
1346	−1	0	−1	0	1	0	1	0
*1347	−1	0	−1	0	1	0	0	1
1348	−1	0	−1	−1	1	0	0	1
*1356	−1	0	−1	0	1	1	0	0
**1357	−1	0	−1	0	1	1	1	1
*1358	−1	0	−1	−1	1	1	1	1
*1367	−1	0	0	0	1	1	1	1
1368	−1	0	0	−1	1	1	1	1
*1378	−1	0	0	−1	1	1	0	0
1456	−1	−1	−1	0	1	1	0	0
*1457	−1	−1	−1	0	1	1	1	1
1458	−1	−1	−1	−1	1	1	1	1
1467	−1	−1	0	0	1	1	1	1
*1468	−1	−1	0	−1	1	1	1	1
1478	−1	−1	0	−1	1	1	0	0
*1567	−1	−1	0	0	1	0	0	1
1568	−1	−1	0	−1	1	0	0	1
*1578	−1	−1	0	−1	1	0	1	0

Index λ	m_1^λ	m_2^λ	m_3^λ	m_4^λ	n_1^λ	n_2^λ	n_3^λ	n_4^λ
1678	−1	−1	−1	−1	1	0	1	0
2345	0	0	0	0	1	0	1	0
*2346	0	0	−1	0	1	0	1	0
2347	0	0	−1	0	1	0	0	1
*2348	0	0	−1	−1	1	0	0	1
2356	0	0	−1	0	1	1	0	0
*2357	0	0	−1	0	1	1	1	1
2358	0	0	−1	−1	1	1	1	1
2367	0	0	0	0	1	1	1	1
*2368	0	0	0	−1	1	1	1	1
2378	0	0	0	−1	1	1	0	0
*2456	0	−1	−1	0	1	1	0	0
2457	0	−1	−1	0	1	1	1	1
*2458	0	−1	−1	−1	1	1	1	1
*2467	0	−1	0	0	1	1	1	1
**2468	0	−1	0	−1	1	1	1	1
*2478	0	−1	0	−1	1	1	0	0
2567	0	−1	0	0	1	0	0	1
*2568	0	−1	0	−1	1	0	0	1
2578	0	−1	0	−1	1	0	1	0
*2678	0	−1	−1	−1	1	0	1	0
3456	0	−1	−1	0	0	0	0	0
*3457	0	−1	−1	0	0	0	1	1
3458	0	−1	−1	−1	0	0	1	1
3467	0	0	0	0	0	0	1	1
*3468	0	−1	0	−1	0	0	1	1
3478	0	−1	0	−1	0	0	0	0
*3567	0	−1	0	0	0	1	0	1
3568	0	−1	0	−1	0	0	1	1
*3578	0	−1	0	−1	0	1	1	0
3678	0	−1	−1	−1	0	1	1	0
4567	0	0	0	0	0	1	0	1
*4568	0	0	0	−1	0	0	1	1
4578	0	0	0	−1	0	1	1	0
*4678	0	0	−1	−1	0	1	1	0
5678	0	0	−1	−1	0	0	0	0

Ich entwickle jetzt 5 Relationen zwischen je 6 der 10 ϑ-Functionen mit den einfachen Indices $0, 1, 2, \cdots 9$: und zwar wähle ich diese Relationen so, dass jede derselben das Fundamentaltheta $\vartheta_9(v_1 \cdots v_4)$ und die 4 geraden Functionen mit den Indices 0, 2, 4, 6, ausserdem aber je eine ungerade ϑ-Function oder das noch fehlende $\vartheta_8(v_1 \cdots v_4)$ enthält. Man könnte diese Beziehungen durch Specialisirung von $\varrho = 4$ auf demselben Wege herleiten, wie oben die Gleichung (IV): indessen wird die Rechnung zur Bestimmung der Vorzeichen eine kürzere, wenn man sich jener ebenfalls oben bereits benützten Formeln bedient, wie

sie sich unmittelbar aus dem Additionstheorem durch Nullsetzen gewisser Argumente ergeben.

Man findet zunächst aus Gleichung (C_1), wenn man

$$\begin{array}{llllll} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & \eta & \delta \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 0246 \end{array}$$

die Werthe giebt und ausserdem auf die Gleichung noch die Substitution (η) anwendet:

$$\vartheta_8^2 \cdot \vartheta_8^2(v_1 \cdots) = \vartheta_9^2 \vartheta_9^2(v_1 \cdots) - \vartheta_0^2 \vartheta_0^2(v_1 \cdots) - \vartheta_2^2 \cdot \vartheta_2^2(v_1 \cdots)$$
$$- \vartheta_4^2 \vartheta_4^2(v_1 \cdots) - \vartheta_6^2 \vartheta_6^2(v_1 \cdots)$$

oder wenn ich von jetzt ab zur Abkürzung

$\vartheta_\alpha(v_1, \cdots v_4)$ mit $[\alpha]$

$\vartheta_\alpha(0, \cdots 0)$ mit α und im Falle einer Zweideutigkeit mit (α)

bezeichne:

(VI, 1) $9^2 \cdot [9]^2 = 0^2 \cdot [0]^2 + 2^2 \cdot [2]^2 + 4^2 \cdot [4]^2 + 6^2 \cdot [6] + 8^2 \cdot [8]^2$.

Ferner ergeben sich aus Gleichung (C, 2), wenn man darin wiederum

$$\varepsilon_1 = 0 \quad \varepsilon_2 = 2 \quad \varepsilon_3 = 4 \quad \varepsilon_4 = 6 \quad \text{also} \quad \eta = 8$$

wählt, und sowohl δ als $\varkappa$ der Reihe nach die Werthe 1, 3, 5, 7 giebt, die folgenden 4 Beziehungen:

$$(\text{VI})\begin{cases} 18^2 \cdot [9]^2 = 018^2 \cdot [0]^2 - 128^2 \cdot [2]^2 - 148^2 \cdot [4]^2 - 168^2 \cdot [6]^2 - 8^2 \cdot [1]^2 & (2) \\ 38^2 \cdot [9]^2 = 038^2 \cdot [0]^2 + 238^2 \cdot [2]^2 - 348^2 \cdot [4]^2 - 368^2 \cdot [6]^2 - 8^2 \cdot [3]^2 & (3) \\ 58^2 \cdot [9]^2 = 058^2 \cdot [0]^2 + 258^2 \cdot [2]^2 + 458^2 \cdot [4]^2 - 568^2 \cdot [6]^2 - 8^2 \cdot [5]^2 & (4) \\ 78^2 \cdot [9]^2 = 078^2 \cdot [0]^2 + 278^2 \cdot [2]^2 + 478^2 \cdot [4]^2 + 678^2 \cdot [6]^2 - 8^2 \cdot [7]^2 & (5) \end{cases}$$

Ehe ich mit diesen Gleichungen weiter operiren kann, muss ich nun eine Anzahl von Relationen für die ϑ-Functionen mit Nullargumenten entwickeln. Ich gebe hier drei Kategorien solcher Relationen. Die erste giebt eine Beziehung für die Theta's mit dreifachem Index und solche mit ein- und zweifachem Index und entsteht durch Specialisirung der Indices aus Gleichung (Vb). Ich ziehe es indessen wiederum vor die betreffenden Relationen aus der Formel (C, 1) herzuleiten, indem ich darin zunächst $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$ setze, sodass also

$$(\text{E}) \qquad \vartheta_\eta^2 \vartheta_9^2 = \sum_\gamma (-1)^{\gamma|\eta} \vartheta_\gamma^2 \vartheta_{\eta\gamma}^2 .$$

Giebt man hierin

$$(\text{VII})\begin{cases} & \varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3\ \varepsilon_4\ \delta & & & \\ \text{die Werthe} & 0\ 2\ 4\ 7\ 8, & \text{so folgt:} & 9^2 \cdot 678^2 = 8^2 \cdot 67^2 + 6^2 \cdot 78^2 \cdots & (1) \\ & 0\ 2\ 6\ 7\ 8 & - & 9^2 \cdot 478^2 = 8^2 \cdot 47^2 + 4^2 \cdot 78^2 \cdots & (2) \\ & 0\ 4\ 6\ 7\ 8 & - & 9^2 \cdot 278^2 = 8^2 \cdot 27^2 + 2^2 \cdot 78^2 \cdots & (3) \\ & 2\ 4\ 6\ 7\ 8 & - & 9^2 \cdot 078^2 = 8^2 \cdot 07^2 + 0^2 \cdot 78^2 \cdots & (4) \end{cases}$$

	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	δ			
(VII) die Werthe	0	2	4	5	8,	so folgt:	$9^2 \cdot 568^2 = 8^2 \cdot 56^2 - 6^2 \cdot 58^2$ ···	(5)
	0	2	4	3	8	—	$9^2 \cdot 368^2 = 8^2 \cdot 36^2 - 6^2 \cdot 38^2$ ···	(6)
	0	2	4	1	8	—	$9^2 \cdot 168^2 = 8^2 \cdot 16^2 - 6^2 \cdot 18^2$ ···	(7)
	0	2	6	5	8	—	$9^2 \cdot 458^2 = 8^2 \cdot 45^2 + 4^2 \cdot 58^2$ ···	(8)
	0	4	6	5	8	—	$9^2 \cdot 258^2 = 8^2 \cdot 25^2 + 2^2 \cdot 58^2$ ···	(9)
	2	4	6	5	8	—	$9^2 \cdot 058^2 = 8^2 \cdot 05^2 + 0^2 \cdot 58^2$ ···	(10)
	0	2	6	3	8	—	$9^2 \cdot 348^2 = 8^2 \cdot 34^2 - 4^2 \cdot 38^2$ ···	(11)
	0	2	6	1	8	—	$9^2 \cdot 148^2 = 8^2 \cdot 14^2 - 4^2 \cdot 18^2$ ···	(12)
	0	4	6	3	8	—	$9^2 \cdot 238^2 = 8^2 \cdot 23^2 + 2^2 \cdot 38^2$ ···	(13)
	2	4	6	3	8	—	$9^2 \cdot 038^2 = 8^2 \cdot 03^2 + 0^2 \cdot 38^2$ ···	(14)
	0	4	6	1	8	—	$9^2 \cdot 128^2 = 8^2 \cdot 12^2 - 2^2 \cdot 18^2$ ···	(15)
	2	4	6	1	8	—	$9^2 \cdot 018^2 = 8^2 \cdot 01^2 + 0^2 \cdot 18^2$ ···	(16)
	0	2	8	7	6	—	$9^2 \cdot 467^2 = 4^2 \cdot 67^2 - 6^2 \cdot 47^2$ ···	(17)
	0	4	8	7	6	—	$9^2 \cdot 267^2 = 2^2 \cdot 67^2 - 6^2 \cdot 27^2$ ···	(18)
	2	4	8	7	6	—	$9^2 \cdot 067^2 = 0^2 \cdot 67^2 - 6^2 \cdot 07^2$ ···	(19)
	0	6	8	7	4	—	$9^2 \cdot 247^2 = 2^2 \cdot 47^2 - 4^2 \cdot 27^2$ ···	(20)
	2	6	8	7	4	—	$9^2 \cdot 047^2 = 0^2 \cdot 47^2 - 4^2 \cdot 07^2$ ···	(21)
	4	6	8	7	2	—	$9^2 \cdot 027^2 = 0^2 \cdot 27^2 - 2^2 \cdot 07^2$ ···	(22)
	0	2	8	5	6	—	$9^2 \cdot 456^2 = 6^2 \cdot 45^2 + 4^2 \cdot 56^2$ ···	(23)
	0	4	8	5	6	—	$9^2 \cdot 256^2 = 6^2 \cdot 25^2 + 2^2 \cdot 56^2$ ···	(24)
	2	4	8	5	6	—	$9^2 \cdot 056^2 = 6^2 \cdot 05^2 + 0^2 \cdot 56^2$ ···	(25)
	0	2	8	3	6	—	$9^2 \cdot 346^2 = 6^2 \cdot 34^2 - 4^2 \cdot 36^2$ ···	(26)
	0	2	8	1	6	—	$9^2 \cdot 146^2 = 6^2 \cdot 14^2 - 4^2 \cdot 16^2$ ···	(27)
	0	4	8	3	6	—	$9^2 \cdot 236^2 = 6^2 \cdot 23^2 + 2^2 \cdot 36^2$ ···	(28)
	2	4	8	3	6	—	$9^2 \cdot 036^2 = 6^2 \cdot 03^2 + 0^2 \cdot 36^2$ ···	(29)
	0	4	8	1	6	—	$9^2 \cdot 126^2 = 6^2 \cdot 12^2 - 2^2 \cdot 16^2$ ···	(30)
	2	4	8	1	6	—	$9^2 \cdot 016^2 = 6^2 \cdot 01^2 + 0^2 \cdot 16^2$ ···	(31)
	0	6	8	5	4	—	$9^2 \cdot 245^2 = 2^2 . 45^2 - 4^2 \cdot 25^2$ ···	(32)
	2	6	8	5	4	—	$9^2 \cdot 045^2 = 0^2 \cdot 45^2 - 4^2 \cdot 05^2$ ···	(33)
	4	6	8	5	2	—	$9^2 \cdot 025^2 = 0^2 \cdot 25^2 - 2^2 \cdot 05^2$ ···	(34)
	0	6	8	3	4	—	$0^2 \cdot 234^2 = 4^2 \cdot 23^2 + 2^2 \cdot 34^2$ ···	(35)
	2	6	8	3	4	—	$9^2 \cdot 034^2 = 4^2 \cdot 03^2 + 0^2 \cdot 34^2$ ···	(36)
	0	6	8	1	4	—	$9^2 \cdot 124^2 = 4^2 \cdot 12^2 - 2^2 \cdot 14^2$ ···	(37)
	2	6	8	1	4	—	$9^2 \cdot 014^2 = 4^2 \cdot 01^2 + 0^2 \cdot 14^2$ ···	(38)
	4	6	8	3	2	—	$9^2 \cdot 023^2 = 0^2 \cdot 23^2 - 2^2 \cdot 03^2$ ···	(39)
	4	6	8	1	2	—	$9^2 \cdot 012^2 = 2^2 \cdot 01^2 + 0^2 \cdot 12^2$ ···	(40)

Hiermit sind alle ϑ-Functionen mit dreifachem Index, welche für die Nullargumente nicht verschwinden, erschöpft.

Das zweite zu entwickelnde System von Relationen giebt eine Beziehung zwischen ϑ-Functionen mit vierfachem Index und solchen mit ein-, zwei- und dreifachem Index. Ich brauche hier nicht alle Theta's zu betrachten, sondern nur diejenigen, welche einen Index, z. B. 8 gemeinschaftlich haben. Für jede dieser Functionen entwickle ich zwei Relationen mit Hilfe der Formel (C, 2) (S. 10) und eine dritte als Eliminationsresultat dieser beiden. Setzen wir in (C, 2) die Argumente gleich Null, so wird

$$\text{(F)} \qquad \vartheta_{\eta}^{2}\vartheta_{\varkappa}^{2} = \sum_{\gamma}(-1)^{\varkappa|\gamma+\gamma|\eta}\,\vartheta_{\eta\gamma}^{2}\,\vartheta_{\gamma\varkappa}^{2}$$

und hieraus ergiebt sich, wenn $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_4$, δ, $\varkappa$ die jedesmal angegebenen Werthe erhalten, eine Reihe von Beziehungen, welche auf der Tabelle am Ende dieser Abhandlung (VIII) und (VIII a) zusammengestellt sind.

Die dritte Classe der zu entwickelnden Formeln für die ϑ-Functionen mit Nullargumenten, soll eine Beziehung zwischen je zwei Producten von 4 solchen Theta's liefern.

Setzt man in Gleichung (D, 1) (S. 15) die Argumente sämmtlich gleich Null, so wird

$$\text{(G)} \qquad \vartheta_{\eta}\vartheta_{\eta\alpha\beta}\vartheta_{\alpha}\vartheta_{\beta} = \sum_{\gamma}(-1)^{\sigma_{\gamma}}\,\vartheta_{\gamma}\vartheta_{\gamma\alpha\beta}\,\vartheta_{\eta\gamma\alpha}\vartheta_{\eta\gamma\beta}$$

und es ergeben sich, wenn $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_4$, α, β, δ die jedesmal beigefügten Werthe erhalten, und die resultirende Gleichung noch in's Quadrat erhoben wird, die folgenden Beziehungen:

(IX)

ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	α	β	δ		
0	2	6	5	47	56	8	$\cdots 47^2 \cdot 56^2 \cdot 458^2 \cdot 678^2 = 45^2 \cdot 67^2 \cdot 568^2 \cdot 478^2 \cdots$	(1)
0	4	6	5	27	56	8	$\cdots 27^2 \cdot 56^2 \cdot 258^2 \cdot 678^2 = 25^2 \cdot 67^2 \cdot 568^2 \cdot 278^2 \cdots$	(2)
2	4	6	5	07	56	8	$\cdots 07^2 \cdot 56^2 \cdot 058^2 \cdot 678^2 = 05^2 \cdot 67^2 \cdot 568^2 \cdot 078^2 \cdots$	(3)
0	2	6	3	47	36	8	$\cdots 47^2 \cdot 36^2 \cdot 348^2 \cdot 678^2 = 34^2 \cdot 67^2 \cdot 368^2 \cdot 478^2 \cdots$	(4)
0	4	6	3	27	36	8	$\cdots 27^2 \cdot 36^2 \cdot 238^2 \cdot 678^2 = 23^2 \cdot 67^2 \cdot 368^2 \cdot 278^2 \cdots$	(5)
2	4	6	3	07	36	8	$\cdots 07^2 \cdot 36^2 \cdot 038^2 \cdot 678^2 = 03^2 \cdot 67^2 \cdot 368^2 \cdot 078^2 \cdots$	(6)
0	2	6	1	47	16	8	$\cdots 47^2 \cdot 16^2 \cdot 148^2 \cdot 678^2 = 14^2 \cdot 67^2 \cdot 168^2 \cdot 478^2 \cdots$	(7)
0	4	6	1	27	16	8	$\cdots 27^2 \cdot 16^2 \cdot 128^2 \cdot 678^2 = 12^2\ 67^2 \cdot 168^2 \cdot 278^2 \cdots$	(8)
2	4	6	1	07	16	8	$\cdots 07^2 \cdot 16^2 \cdot 018^2 \cdot 678^2 = 01^2 \cdot 67^2 \cdot 168^2 \cdot 078^2 \cdots$	(9)
0	2	8	5	47	58	6	$\cdots 47^2 \cdot 58^2 \cdot 456^2 \cdot 678^2 = 45^2 \cdot 78^2 \cdot 568^2 \cdot 478^2 \cdots$	(10)
0	4	8	5	27	58	6	$\cdots 27^2 \cdot 58^2 \cdot 256^2 \cdot 678^2 = 25^2 \cdot 78^2 \cdot 568^2 \cdot 278^2 \cdots$	(11)
2	4	8	5	07	58	6	$\cdots 07^2 \cdot 58^2 \cdot 056^2 \cdot 678^2 = 05^2 \cdot 78^2 \cdot 568^2 \cdot 078^2 \cdots$	(12)
0	2	8	3	47	38	6	$\cdots 47^2 \cdot 38^2 \cdot 346^2 \cdot 678^2 = 34^2 \cdot 78^2 \cdot 368^2 \cdot 467^2 \cdots$	(13)
0	4	8	3	27	38	6	$\cdots 27^2 \cdot 38^2 \cdot 236^2 \cdot 678^2 = 23^2 \cdot 78^2 \cdot 368^2 \cdot 267^2 \cdots$	(14)
2	4	8	3	07	38	6	$\cdots 07^2 \cdot 38^2 \cdot 036^2 \cdot 678^2 = 03^2 \cdot 78^2 \cdot 368^2 \cdot 067^2 \cdots$	(15)

(IX)

ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	α	β	δ		
0	2	8	1	47	18	6	$\cdots 47^2 \cdot 18^2 \cdot 146^2 \cdot 678^2 = 14^2 \cdot 78^2 \cdot 168^2 \cdot 467^2 \cdots$	(16)
0	4	8	1	27	18	6	$\cdots 27^2 \cdot 18^2 \cdot 126^2 \cdot 678^2 = 12^2 \cdot 78^2 \cdot 168^2 \cdot 267^2 \cdots$	(17)
2	4	8	1	07	18	6	$\cdots 07^2 \cdot 18^2 \cdot 016^2 \cdot 678^2 = 01^2 \cdot 78^2 \cdot 168^2 \cdot 067^2 \cdots$	(18)
0	6	8	5	27	58	4	$\cdots 27^2 \cdot 58^2 \cdot 245^2 \cdot 478^2 = 25^2 \cdot 78^2 \cdot 458^2 \cdot 247^2 \cdots$	(19)
2	6	8	5	07	58	4	$\cdots 07^2 \cdot 58^2 \cdot 045^2 \cdot 478^2 = 05^2 \cdot 78^2 \cdot 458^2 \cdot 047^2 \cdots$	(20)
0	6	8	3	27	38	4	$\cdots 27^2 \cdot 38^2 \cdot 234^2 \cdot 478^2 = 23^2 \cdot 78^2 \cdot 348^2 \cdot 247^2 \cdots$	(21)
2	6	8	3	07	38	4	$\cdots 07^2 \cdot 38^2 \cdot 034^2 \cdot 478^2 = 03^2 \cdot 78^2 \cdot 348^2 \cdot 047^2 \cdots$	(22)
0	6	8	1	27	18	4	$\cdots 27^2 \cdot 18^2 \cdot 124^2 \cdot 478^2 = 12^2 \cdot 78^2 \cdot 148^2 \cdot 247^2 \cdots$	(23)
2	6	8	1	07	18	4	$\cdots 07^2 \cdot 18^2 \cdot 014^2 \cdot 478^2 = 01^2 \cdot 78^2 \cdot 148^2 \cdot 047^2 \cdots$	(24)
4	6	8	5	07	58	2	$\cdots 07^2 \cdot 58^2 \cdot 025^2 \cdot 278^2 = 05^2 \cdot 78^2 \cdot 258^2 \cdot 027^2 \cdots$	(25)
4	6	8	3	07	38	2	$\cdots 07^2 \cdot 38^2 \cdot 023^2 \cdot 278^2 = 03^2 \cdot 78^2 \cdot 238^2 \cdot 027^2 \cdots$	(26)
4	6	8	1	07	18	2	$\cdots 07^2 \cdot 18^2 \cdot 012^2 \cdot 278^2 = 01^2 \cdot 78^2 \cdot 128^2 \cdot 027^2 \cdots$	(27)

und eine grosse Anzahl ähnlicher, deren Bildungsweise ich späterhin, wo sie für die Rechnung nothwendig sind, angeben werde. —

Es lässt sich nun zeigen, dass vermöge dieser Relationen zwischen den Theta's mit Nullargumenten alle möglichen Quotienten dieser Theta's sich durch irgend 7 von ihnen ausdrücken lassen. Hierzu greife ich die Gleichungen 1, 2, 3, 4 des System's (VII) und 1, 3, 5 des System's (VIII) heraus und bringe sie zunächst auf die Form $b^2 + b'^2 = 1$, also

$$\frac{(8)^2 \cdot (67)^2}{(9)^2 \cdot (678)^2} + \frac{(6)^2 \cdot (78)^2}{(9)^2 \cdot (678)^2} = 1$$

$$\frac{(8)^2 \cdot (47)^2}{(9)^2 \cdot (478)^2} + \frac{(4)^2 \cdot (78)^2}{(9)^2 \cdot (478)^2} = 1$$

$$\frac{(8)^2 \cdot (27)^2}{(9)^2 \cdot (278)^2} + \frac{(2)^2 \cdot (78)^2}{(9)^2 \cdot (278)^2} = 1$$

$$\frac{(8)^2 \cdot (07)^2}{(9)^2 \cdot (078)^2} + \frac{(0)^2 \cdot (78)^2}{(9)^2 \cdot (078)^2} = 1$$

$$\frac{(67)^2 \cdot (568)^2}{(56)^2 \cdot (678)^2} + \frac{(6)^2 \cdot (5678)^2}{(56)^2 \cdot (678)^2} = 1$$

$$\frac{(67)^2 \cdot (368)^2}{(36)^2 \cdot (678)^2} + \frac{(6)^2 \cdot (3678)^2}{(36)^2 \cdot (678)^2} = 1$$

$$\frac{(67)^2 \cdot (168)^2}{(16)^2 \cdot (678)^2} + \frac{(6)^2 \cdot (1678)^2}{(16)^2 \cdot (678)^2} = 1 \,.$$

Ich führe nun für die in jeder dieser Gleichungen zuerst stehenden 7 ϑ-Quotienten Constanten ein, zu deren Bezeichnung ich mich einer Reihe von 9 Grössen $a_0, a_1 \cdots a_8$ in der Weise bediene, dass nur die Quotienten der Differenzen je zweier von ihnen in den Definitionsgleichungen vorkommen. Setze ich ausserdem noch zur Abkürzung

$$a_\varkappa - a_\lambda = a_{\varkappa\lambda},$$

so soll sein:

$$
\text{(X)}\quad
\begin{cases}
\dfrac{a_{78}}{a_{68}} = \dfrac{8^2 \cdot 67^2}{9^2 \cdot 678^2} \quad \dfrac{a_{78}}{a_{48}} = \dfrac{8^2 \cdot 47^2}{9^2 \cdot 478^2} \quad \dfrac{a_{78}}{a_{28}} = \dfrac{8^2 \cdot 27^2}{9^2 \cdot 278^2} \quad \dfrac{a_{78}}{a_{08}} = \dfrac{8^2 \cdot 07^2}{9^2 \cdot 078^2} \\[2ex]
\qquad \dfrac{a_{78}}{a_{58}} = \dfrac{67^2 \cdot 568^2}{56^2 \cdot 678^2} \quad \dfrac{a_{78}}{a_{38}} = \dfrac{67^2 \cdot 368^2}{36^2 \cdot 678^2} \quad \dfrac{a_{78}}{a_{18}} = \dfrac{67^2 \cdot 168^2}{16^2 \cdot 678^2} \\[2ex]
\text{sodass sich vermöge der obigen Gleichungen zunächst noch ergiebt:} \\[2ex]
\dfrac{a_{67}}{a_{68}} = \dfrac{6^2 \cdot 78^2}{9^2 \cdot 678^2} \quad \dfrac{a_{47}}{a_{48}} = \dfrac{4^2 \cdot 78^2}{9^2 \cdot 478^2} \quad \dfrac{a_{27}}{a_{28}} = \dfrac{2^2 \cdot 78^2}{9^2 \cdot 278^2} \quad \dfrac{a_{07}}{a_{08}} = \dfrac{0^2 \cdot 78^2}{9^2 \cdot 078^2} \\[2ex]
\qquad \dfrac{a_{57}}{a_{58}} = \dfrac{6^2 \cdot 5678^2}{56^2 \cdot 678^2} \quad \dfrac{a_{37}}{a_{38}} = \dfrac{67^2 \cdot 3678^2}{36^2 \cdot 678^2} \quad \dfrac{a_{17}}{a_{18}} = \dfrac{67^2 \cdot 1678^2}{16^2 \cdot 678^2}
\end{cases}
$$

Ich nehme nun an, die Moduln des betrachteten Theta-Systems seien rein imaginär. Dann sind die Theta's mit Nullargumenten sämmtlich reell, folglich ihre Quadrate positiv. Daraus folgt, dass, wenn nun $a_7 > a_8$ und $a_8 > 0$ genommen wird (worüber ja willkürlich verfügt werden kann, da durch die Gleichungen (X) nur 7 von den Constanten $a_\varkappa$ bestimmt sind), auch $a_0, a_1, \cdots a_6, a_7$ positiv sind und es ergiebt sich ferner aus den Gleichungen (X) und einer Anzahl ähnlicher, die sogleich noch entwickelt werden sollen, dass alsdann

$$a_0 > a_1 > \cdots\cdots > a_7 > a_8 > 0$$

und dass also

$$a_{\varkappa\lambda} > 0 \text{ sobald } \lambda > \varkappa$$

ist. — Man kann nun vermöge der Beziehung

$$\frac{a_{\varkappa\lambda}}{a_{\mu\nu}} = \frac{a_{\varkappa 8} - a_{\lambda 8}}{a_{\mu 8} - a_{\nu 8}}$$

offenbar jeden beliebigen Quotienten dieser Form mit Hilfe des System's (X) durch ϑ-Functionen ausdrücken — und es werden sich dann umgekehrt alle möglichen ϑ-Quotienten, durch die Constanten $a_{\varkappa\lambda}$ ausdrücken lassen. Um dies schliesslich zu bewerkstelligen bilde ich zunächst eine Reihe von Quotienten der Grössen $a_{\varkappa\lambda}$, nämlich alle möglichen von der Form

$$\frac{a_{\varkappa\lambda}}{a_{\iota\lambda}}$$

wo:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = 0, 2, \cdots 8 \\ \iota = 0, 2, \cdots 8 \end{array}\right\} \iota \gtrless \lambda$$
$$\varkappa = 1, 3, \cdots 7$$

oder:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = 1, 3, \cdots 7 \\ \iota = 1, 3, \cdots 7 \end{array}\right\} \iota \gtrless \lambda$$
$$\varkappa = 0, 2, \cdots 8$$

von denen die ersteren den Relationen des System's (VII), die letzteren

denen von (VIII) in derselben Weise entsprechen, wie die unter (X) gegebenen den zu ihrer Definition herbeigezogenen ϑ-Relationen. (Die Relationen IX dienen hierbei zur Vereinfachung gewisser resultirender Ausdrücke.)

Die betreffenden Ausdrücke finden sich auf der Tabelle am Ende unter (XI) zusammengestellt.

Ich bilde jetzt das folgende Product von Quotienten:

$$\frac{a_{01}}{a_{02}} \cdot \frac{a_{03}}{a_{04}} \cdot \frac{a_{05}}{a_{06}} \cdot \frac{a_{07}}{a_{08}} = \frac{0^8 \cdot\ 12^2 \cdot\ 34^2 \cdot\ 56^2 \cdot\ 78^2}{9^8 \cdot 012^2 \cdot 034^2 \cdot 056^2 \cdot 078^2}.$$

Nun folgt aus der Formel (G) (S. 455),

	wenn $\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3\, \varepsilon_4\, \alpha\ \ \beta\ \ \delta$		
die Werthe	1 5 7 4 0 12 9	erhält:	$0^2 . 12^2 . 34^2 . 5678^2 = 9^2 . 012^2 . 034^2 . 1234^2$
	1 3 5 8 0 56 9	—	$0^2 . 56^2 . 78^2 . 1234^2 = 9^2 . 056^2 . 078^2 . 5678^2$

und durch Multiplication dieser beiden Gleichungen:

$$0^4 . 12^2 . 34^2 . 56^2 . 78^2 = 9^4 . 012^2 . 034^2 . 056^2 . 078^2$$

Es geht somit die obige Relation über in:

$$\text{(XII)} \qquad (1)\ \frac{0^4}{9^4} = \frac{a_{01}\, a_{03}\, a_{05}\, a_{07}}{a_{02}\, a_{04}\, a_{06}\, a_{08}}.$$

In ähnlicher Weise ergeben sich vermöge der Beziehungen:

$\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3\, \varepsilon_4\, \alpha\ \ \beta\ \ \delta$		
1 5 7 4 2 01 9	—	$2^2 . 01^2 . 34^2 . 5678^2 = 9^2 . 012^2 . 234^2 . 0134^2$
1 3 5 8 2 56 9	—	$2^2 . 56^2 . 78^2 . 0134^2 = 9^2 . 256^2 . 278^2 . 5678^2$
1 5 7 2 4 01 9	—	$4^2 . 01^2 . 23^2 . 5678^2 = 9^2 . 014^2 . 234^2 . 0123^2$
1 3 5 8 4 56 9	—	$4^2 . 56^2 . 78^2 . 0123^2 = 9^2 . 456^2 . 478^2 . 5678^2$
1 5 7 2 6 01 9	—	$6^2 . 01^2 . 23^2 . 4578^2 = 9^2 . 016^2 . 236^2 . 0123^2$
1 3 5 8 6 45 9	—	$6^2 . 45^2 . 78^2 . 0123^2 = 9^2 . 456^2 . 678^2 . 4578^2$
1 5 7 2 8 01 9	—	$8^2 . 01^2 . 23^2 . 4567^2 = 9^2 . 018^2 . 238^2 . 0133^2$
1 3 5 6 8 45 9	—	$8^2 . 45^2 . 67^2 . 0123^2 = 9^2 . 458^2 . 678^2 . 4567^2$

für die übrigen ϑ-Function mit einfachem geraden Index die Ausdrücke

$$\text{(XII)} \quad \begin{cases} (2)\ \dfrac{2^4}{9^4} = \dfrac{a_{12}\, a_{23}\, a_{25}\, a_{27}}{a_{02}\, a_{24}\, a_{26}\, a_{28}} & (3)\ \dfrac{4^4}{9^4} = \dfrac{a_{14}\, a_{34}\, a_{45}\, a_{47}}{a_{04}\, a_{24}\, a_{46}\, a_{48}} \\[2ex] (4)\ \dfrac{6^4}{9^4} = \dfrac{a_{16}\, a_{36}\, a_{56}\, a_{67}}{a_{06}\, a_{26}\, a_{46}\, a_{68}} & (5)\ \dfrac{8^4}{9^4} = \dfrac{a_{18}\, a_{38}\, a_{58}\, a_{78}}{a_{08}\, a_{28}\, a_{48}\, a_{68}} \end{cases}$$

Wir bilden ferner das Product:

$$\frac{a_{12}}{a_{02}} \cdot \frac{a_{14}}{a_{04}} \cdot \frac{a_{16}}{a_{06}} \cdot \frac{a_{18}}{a_{08}} \cdot \frac{a_{03}}{a_{13}} \cdot \frac{a_{05}}{a_{15}} \cdot \frac{a_{07}}{a_{17}} = \frac{01^8 \cdot 018^4 \cdot\ \ 2^2 \cdot\ \ 4^2 \cdot\ \ 6^2 \cdot\ \ 38^2 \cdot\ \ 58^2 \cdot\ \ 78^2}{9^8 .\ \ 8^4 \cdot 012^2 \cdot 014^2 \cdot 016^2 \cdot 0138^2 \cdot 0158^2 \cdot 0178^2}$$

und leiten jetzt zur Vereinfachung dieses Ausdruckes aus der Formel (G) die folgenden Beziehungen her:

$$\begin{array}{llll}
\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3\,\varepsilon_4\,\alpha\;\;\beta\;\;\delta & & & \\
1\,5\,7\,8\,2\,01\,9 & - & 2^2.01^2.38^2.4567^2=9^2.012^2.238^2.0138^2 \\
1\,3\,7\,8\,4\,01\,9 & - & 4^2.01^2.58^2.2367^2=9^2.014^2.458^2.0158^2 \\
1\,3\,5\,8\,6\,01\,9 & - & 6^2.01^2.78^2.2345^2=9^2.016^2.678^2.0178^2 \\
1\,3\,5\,6\,8\,01\,9 & - & 8^2.01^2.67^2.2345^2=9^2.018^2.678^2.0167^2
\end{array}$$

Multiplicirt man jetzt die ersten dieser drei Gleichungen mit einander und dann noch kreuzweise mit der vierten, so ergiebt sich:

$$01^4\cdot 018^2\cdot 2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 38^2\cdot 58^2\cdot 78^2\cdot 0167^2\cdot 2367^2\cdot 4567^2$$
$$=9^4\cdot 8^2\cdot 012^2\cdot 014^2\cdot 016^2\cdot 0138^2\cdot 0158^2\cdot 0178^2\cdot 67^2\cdot 238^2\cdot 458^2$$

und es geht daher der obige Ausdruck zunächst über in:

$$\frac{a_{12}a_{14}a_{16}a_{18}a_{03}a_{05}a_{07}}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{08}a_{13}a_{15}a_{17}}=\frac{01^4\cdot 67^2\cdot\ 018^2\cdot\ 238^2\cdot\ 458^2}{9^4\cdot\ 8^2\cdot 0167^2\cdot 2367^2\cdot 4567^2}.$$

Nun folgt aber noch aus Formel (G)

für $\varepsilon_1\;\varepsilon_2\;\varepsilon_3\;\varepsilon_4\;\;\alpha\;\;\;\beta\;\;\;\delta$
$=0\;4\;6\;3\;67\;018\;8\;-\;67^2\cdot 018^2\cdot 238^2\cdot 458^2=8^2\cdot 0167^2\cdot 2367^2\cdot 4567^2,$
mithin wird:

(XIII, 1)
$$\frac{01^4}{9^4}=\frac{a_{12}a_{14}a_{16}a_{18}a_{03}a_{05}a_{07}}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{08}a_{13}a_{15}a_{17}}.$$

In durchaus analoger Weise ergeben sich für die sämmtlichen übrigen ϑ-Functionen mit zweifachem Index, welche für die Nullargumente nicht verschwinden, die folgenden Ausdrücke:

(XIII)
$$\left\{\begin{array}{llll}
(2)\;\dfrac{03^4}{9^4}=\dfrac{a_{23}a_{34}a_{36}a_{38}a_{01}a_{05}a_{07}}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{08}a_{13}a_{35}a_{37}} & (3)\;\dfrac{05^4}{9^4}=\dfrac{a_{25}a_{45}a_{56}a_{58}a_{01}a_{03}a_{07}}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{08}a_{15}a_{35}a_{57}} \\
(4)\;\dfrac{07^4}{9^4}=\dfrac{a_{17}a_{47}a_{67}a_{78}a_{01}a_{03}a_{05}}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{08}a_{17}a_{37}a_{57}} & (5)\;\dfrac{12^4}{9^4}=\dfrac{a_{01}a_{14}a_{16}a_{18}a_{23}a_{25}a_{27}}{a_{02}a_{24}a_{26}a_{28}a_{13}a_{15}a_{17}} \\
(6)\;\dfrac{14^4}{9^4}=\dfrac{a_{01}a_{12}a_{16}a_{18}a_{34}a_{45}a_{47}}{a_{34}a_{24}a_{46}a_{48}a_{13}a_{15}a_{17}} & (7)\;\dfrac{16^4}{9^4}=\dfrac{a_{01}a_{12}a_{14}a_{18}a_{36}a_{56}a_{67}}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{68}a_{13}a_{15}a_{17}} \\
(8)\;\dfrac{18^4}{9^4}=\dfrac{a_{01}a_{12}a_{14}a_{16}a_{38}a_{58}a_{78}}{a_{08}a_{28}a_{48}a_{68}a_{13}a_{15}a_{17}} & (9)\;\dfrac{23^4}{9^4}=\dfrac{a_{03}a_{34}a_{36}a_{38}a_{12}a_{25}a_{27}}{a_{02}a_{24}a_{26}a_{28}a_{13}a_{35}a_{37}} \\
(10)\;\dfrac{25^4}{9^4}=\dfrac{a_{05}a_{45}a_{56}a_{58}a_{12}a_{23}a_{27}}{a_{02}a_{24}a_{26}a_{28}a_{15}a_{35}a_{57}} & (11)\;\dfrac{27^4}{9^4}=\dfrac{a_{07}a_{47}a_{67}a_{78}a_{12}a_{23}a_{25}}{a_{02}a_{24}a_{26}a_{28}a_{17}a_{37}a_{57}} \\
(12)\;\dfrac{34^4}{9^4}=\dfrac{a_{03}a_{23}a_{36}a_{38}a_{14}a_{45}a_{47}}{a_{04}a_{24}a_{46}a_{48}a_{13}a_{35}a_{37}} & (13)\;\dfrac{36^4}{9^4}=\dfrac{a_{03}a_{23}a_{34}a_{38}a_{16}a_{56}a_{67}}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{68}a_{13}a_{35}a_{37}} \\
(14)\;\dfrac{38^4}{9^4}=\dfrac{a_{03}a_{23}a_{34}a_{36}a_{18}a_{58}a_{78}}{a_{08}a_{28}a_{48}a_{68}a_{13}a_{35}a_{37}} & (15)\;\dfrac{45^4}{9^4}=\dfrac{a_{05}a_{25}a_{56}a_{58}a_{14}a_{34}a_{47}}{a_{04}a_{24}a_{46}a_{48}a_{15}a_{35}a_{57}} \\
(16)\;\dfrac{47^4}{9^4}=\dfrac{a_{07}a_{27}a_{67}a_{78}a_{14}a_{34}a_{45}}{a_{04}a_{24}a_{46}a_{48}a_{17}a_{37}a_{57}} & (17)\;\dfrac{56^4}{9^4}=\dfrac{a_{05}a_{25}a_{45}a_{58}a_{16}a_{36}a_{67}}{a_{06}a_{26}a_{45}a_{68}a_{15}a_{35}a_{57}} \\
(18)\;\dfrac{58^4}{9^4}=\dfrac{a_{05}a_{25}a_{45}a_{56}a_{18}a_{38}a_{78}}{a_{08}a_{28}a_{48}a_{68}a_{15}a_{35}a_{57}} & (19)\;\dfrac{67^4}{9^4}=\dfrac{a_{07}a_{27}a_{47}a_{78}a_{16}a_{36}a_{56}}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{68}a_{17}a_{37}a_{57}} \\
\multicolumn{2}{c}{(20)\;\dfrac{78^4}{9^4}=\dfrac{a_{07}a_{27}a_{47}a_{67}a_{18}a_{38}a_{58}}{a_{08}a_{28}a_{48}a_{68}a_{17}a_{37}a_{57}}.}
\end{array}\right.$$

Die entsprechenden Ausdrücke für die ϑ-Functionen mit drei-

fachem Index ergeben sich nunmehr unmittelbar mit Hülfe der Relationen (VII). Man erhält aus diesen:

$$(\mathrm{XIV})\left\{\begin{array}{ll}
(1)\ \frac{678^4}{9^4}=\frac{a_{16}a_{36}a_{56}a_{18}a_{38}a_{58}a_{07}a_{27}a_{47}}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{08}a_{28}a_{48}a_{17}a_{37}a_{57}} & (2)\ \frac{478^4}{9^4}=\frac{a_{14}a_{34}a_{45}a_{18}a_{38}a_{58}a_{07}a_{27}a_{67}}{a_{04}a_{24}a_{46}a_{08}a_{28}a_{68}a_{17}a_{37}a_{57}} \\
(3)\ \frac{278^4}{9^4}=\frac{a_{12}a_{23}a_{25}a_{18}a_{38}a_{58}a_{07}a_{47}a_{67}}{a_{02}a_{24}a_{26}a_{08}a_{48}a_{68}a_{17}a_{37}a_{57}} & (4)\ \frac{078^4}{9^4}=\frac{a_{01}a_{03}a_{05}a_{18}a_{38}a_{58}a_{27}a_{47}a_{67}}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{28}a_{48}a_{68}a_{17}a_{37}a_{57}} \\
(5)\ \frac{568^4}{9^4}=\frac{a_{16}a_{36}a_{67}a_{18}a_{38}a_{78}a_{05}a_{25}a_{45}}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{08}a_{28}a_{48}a_{15}a_{35}a_{57}} & (6)\ \frac{368^4}{9^4}=\frac{a_{16}a_{56}a_{67}a_{18}a_{58}a_{78}a_{03}a_{23}a_{34}}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{08}a_{28}a_{48}a_{13}a_{35}a_{37}} \\
(7)\ \frac{468^4}{9^4}=\frac{a_{36}a_{56}a_{67}a_{38}a_{58}a_{78}a_{01}a_{12}a_{14}}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{08}a_{28}a_{48}a_{13}a_{15}a_{17}} & (8)\ \frac{458^4}{9^4}=\frac{a_{14}a_{34}a_{47}a_{18}a_{38}a_{78}a_{05}a_{25}a_{56}}{a_{04}a_{24}a_{46}a_{08}a_{28}a_{68}a_{15}a_{35}a_{57}} \\
(9)\ \frac{258^4}{9^4}=\frac{a_{12}a_{23}a_{27}a_{18}a_{38}a_{78}a_{05}a_{45}a_{56}}{a_{02}a_{24}a_{26}a_{08}a_{48}a_{68}a_{15}a_{35}a_{57}} & (10)\ \frac{058^4}{9^4}=\frac{a_{01}a_{03}a_{07}a_{18}a_{28}a_{78}a_{25}a_{45}a_{56}}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{28}a_{48}a_{68}a_{15}a_{35}a_{57}} \\
(11)\ \frac{348^4}{9^4}=\frac{a_{14}a_{45}a_{47}a_{18}a_{58}a_{78}a_{03}a_{23}a_{36}}{a_{04}a_{24}a_{46}a_{08}a_{28}a_{68}a_{13}a_{35}a_{37}} & (12)\ \frac{148^4}{9^4}=\frac{a_{34}a_{45}a_{47}a_{38}a_{58}a_{78}a_{01}a_{12}a_{16}}{a_{04}a_{24}a_{46}a_{08}a_{28}a_{68}a_{13}a_{15}a_{17}} \\
(13)\ \frac{238^4}{9^4}=\frac{a_{12}a_{25}a_{27}a_{18}a_{58}a_{78}a_{03}a_{34}a_{36}}{a_{02}a_{24}a_{26}a_{08}a_{48}a_{68}a_{13}a_{35}a_{37}} & (14)\ \frac{038^4}{9^4}=\frac{a_{01}a_{05}a_{07}a_{18}a_{58}a_{78}a_{12}a_{14}a_{16}}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{28}a_{48}a_{68}a_{13}a_{35}a_{37}} \\
(15)\ \frac{128^4}{9^4}=\frac{a_{23}a_{25}a_{27}a_{38}a_{58}a_{78}a_{01}a_{14}a_{16}}{a_{02}a_{24}a_{26}a_{08}a_{48}a_{68}a_{13}a_{15}a_{17}} & (16)\ \frac{018^4}{9^4}=\frac{a_{03}a_{05}a_{07}a_{38}a_{58}a_{78}a_{12}a_{14}a_{16}}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{28}a_{48}a_{68}a_{13}a_{15}a_{17}} \\
(17)\ \frac{467^4}{9^4}=\frac{a_{14}a_{34}a_{45}a_{16}a_{36}a_{56}a_{07}a_{27}a_{78}}{a_{04}a_{24}a_{48}a_{06}a_{26}a_{68}a_{17}a_{37}a_{57}} & (18)\ \frac{267^4}{9^4}=\frac{a_{12}a_{23}a_{25}a_{16}a_{36}a_{56}a_{07}a_{47}a_{78}}{a_{02}a_{24}a_{28}a_{06}a_{46}a_{68}a_{17}a_{37}a_{57}} \\
(19)\ \frac{067^4}{9^4}=\frac{a_{01}a_{03}a_{05}a_{16}a_{36}a_{56}a_{27}a_{47}a_{78}}{a_{02}a_{04}a_{08}a_{26}a_{46}a_{68}a_{17}a_{37}a_{57}} & (20)\ \frac{247^4}{9^4}=\frac{a_{12}a_{23}a_{25}a_{14}a_{34}a_{45}a_{07}a_{67}a_{78}}{a_{02}a_{26}a_{28}a_{04}a_{46}a_{48}a_{17}a_{37}a_{57}} \\
(21)\ \frac{047^4}{9^4}=\frac{a_{01}a_{03}a_{05}a_{14}a_{34}a_{45}a_{27}a_{67}a_{78}}{a_{02}a_{06}a_{08}a_{24}a_{46}a_{48}a_{17}a_{37}a_{57}} & (22)\ \frac{027^4}{9^4}=\frac{a_{01}a_{03}a_{05}a_{12}a_{23}a_{25}a_{47}a_{67}a_{78}}{a_{04}a_{06}a_{08}a_{24}a_{26}a_{28}a_{17}a_{37}a_{57}} \\
(23)\ \frac{456^4}{9^4}=\frac{a_{14}a_{34}a_{47}a_{16}a_{36}a_{67}a_{05}a_{25}a_{58}}{a_{04}a_{24}a_{48}a_{06}a_{26}a_{68}a_{15}a_{35}a_{57}} & (24)\ \frac{256^4}{9^4}=\frac{a_{12}a_{23}a_{27}a_{16}a_{36}a_{67}a_{05}a_{45}a_{58}}{a_{02}a_{24}a_{28}a_{06}a_{46}a_{68}a_{15}a_{35}a_{57}} \\
(25)\ \frac{056^4}{9^4}=\frac{a_{01}a_{03}a_{07}a_{16}a_{36}a_{67}a_{25}a_{45}a_{58}}{a_{02}a_{04}a_{08}a_{26}a_{46}a_{68}a_{15}a_{35}a_{57}} & (26)\ \frac{346^4}{9^4}=\frac{a_{14}a_{45}a_{47}a_{16}a_{56}a_{67}a_{03}a_{23}a_{38}}{a_{\ 4}a_{24}a_{48}a_{06}a_{26}a_{68}a_{13}a_{35}a_{37}} \\
(27)\ \frac{146^4}{9^4}=\frac{a_{34}a_{45}a_{47}a_{36}a_{56}a_{67}a_{01}a_{12}a_{18}}{a_{04}a_{24}a_{48}a_{06}a_{26}a_{68}a_{13}a_{15}a_{17}} & (28)\ \frac{236^4}{9^4}=\frac{a_{12}a_{25}a_{27}a_{16}a_{56}a_{67}a_{03}a_{34}a_{38}}{a_{02}a_{24}a_{28}a_{06}a_{46}a_{68}a_{13}a_{35}a_{37}} \\
(29)\ \frac{036^4}{9^4}=\frac{a_{01}a_{05}a_{07}a_{16}a_{56}a_{67}a_{23}a_{34}a_{38}}{a_{02}a_{04}a_{08}a_{26}a_{46}a_{68}a_{13}a_{35}a_{37}} & (30)\ \frac{126^4}{9^4}=\frac{a_{23}a_{25}a_{27}a_{36}a_{56}a_{67}a_{01}a_{14}a_{18}}{a_{02}a_{24}a_{28}a_{06}a_{46}a_{68}a_{13}a_{15}a_{17}} \\
(31)\ \frac{016^4}{9^4}=\frac{a_{03}a_{05}a_{07}a_{36}a_{56}a_{67}a_{12}a_{14}a_{18}}{a_{02}a_{04}a_{08}a_{26}a_{46}a_{68}\alpha_{13}a_{15}a_{17}} & (32)\ \frac{245^4}{9^4}=\frac{a_{12}a_{23}a_{27}a_{14}a_{34}a_{47}a_{05}a_{56}a_{58}}{a_{02}a_{26}a_{28}a_{04}a_{46}a_{48}a_{15}a_{35}a_{57}} \\
(33)\ \frac{045^4}{9^4}=\frac{a_{01}a_{03}a_{07}a_{14}a_{34}a_{47}a_{25}a_{56}a_{58}}{a_{02}a_{06}a_{08}a_{24}a_{46}a_{48}a_{15}a_{35}a_{57}} & (34)\ \frac{025^4}{9^4}=\frac{a_{01}a_{03}a_{07}c_{12}a_{23}a_{27}a_{45}a_{56}a_{58}}{a_{04}a_{06}a_{08}a_{24}a_{26}a_{28}a_{15}a_{35}a_{57}} \\
(35)\ \frac{234^4}{9^4}=\frac{a_{12}a_{25}a_{27}a_{14}a_{45}a_{47}a_{03}a_{36}a_{38}}{a_{02}a_{26}a_{28}a_{04}a_{46}a_{48}a_{13}a_{35}a_{37}} & (36)\ \frac{034^4}{9^4}=\frac{a_{01}a_{05}a_{07}a_{14}a_{45}a_{47}a_{23}a_{36}a_{38}}{a_{02}a_{06}a_{08}a_{24}a_{46}a_{48}a_{13}a_{35}a_{37}} \\
(37)\ \frac{124^4}{9^4}=\frac{a_{23}a_{25}a_{27}a_{34}a_{45}a_{47}a_{03}a_{36}a_{38}}{a_{02}a_{26}a_{28}a_{04}a_{46}a_{48}a_{13}a_{15}a_{17}} & (38)\ \frac{014^4}{9^4}=\frac{a_{03}a_{05}a_{07}a_{34}a_{45}a_{47}a_{12}a_{16}a_{18}}{a_{02}a_{06}a_{08}a_{24}a_{46}a_{48}a_{13}a_{15}a_{17}} \\
(39)\ \frac{023^4}{9^4}=\frac{a_{01}a_{05}a_{07}a_{12}a_{25}a_{27}a_{34}a_{36}a_{38}}{a_{04}a_{06}a_{08}a_{24}a_{26}a_{28}a_{13}a_{35}a_{37}} & (40)\ \frac{012^4}{9^4}=\frac{a_{03}a_{05}a_{07}a_{23}a_{25}a_{27}a_{14}a_{16}a_{18}}{a_{04}a_{06}a_{08}a_{24}a_{26}a_{28}a_{13}a_{15}a_{17}}
\end{array}\right.$$

Endlich bestimmen sich die ϑ-Functionen mit vierfachem Index am bequemsten mit Hülfe von Relationen, wie sie unter (VIII) gegeben worden sind; z. B.

$$\frac{5678^4}{9^4} = \frac{a_{05}\,a_{25}\,a_{45}\,a_{07}\,a_{27}\,a_{47}\,a_{16}\,a_{36}\,a_{18}\,a_{38}}{a_{06}\,a_{26}\,a_{46}\,a_{08}\,a_{28}\,a_{48}\,a_{15}\,a_{35}\,a_{17}\,a_{37}}.$$

Ich gehe indessen auf diese Ausdrücke hier nicht weiter ein, da sie für das Folgende nicht nothwendig sind.

Ich wende mich nun zu den fünf Relationen zurück, welche ich unter (VI) (S. 21) für die 10 ϑ-Functionen mit einfachem Index und beliebigen Argumenten $v_1 \cdots v_4$ entwickelt habe und zwar setze ich dieselben zunächst in die Form:

$$1 = \frac{(0)^2}{(9)^2}\cdot\frac{[0]^2}{[9]^2} + \frac{(2)^2}{(9)^2}\cdot\frac{[2]^2}{[9]^2} + \frac{(4)^2}{(9)^2}\cdot\frac{[4]^2}{[9]^2} + \frac{(6)^2}{(9)^2}\cdot\frac{[6]^2}{[9]^2} + \frac{(8)^2}{(9)^2}\cdot\frac{[8]^2}{[9]^2}$$

$$1 = \frac{(018)^2}{(18)^2}\cdot\frac{[0]^2}{[9]^2} - \frac{(8)^2}{(18)^2}\cdot\frac{[1]^2}{[9]^2} - \frac{(128)^2}{(18)^2}\cdot\frac{[2]^2}{[9]^2} - \frac{(148)^2}{(18)^2}\cdot\frac{[4]^2}{[9]^2} - \frac{(168)^2}{(9)^2}\cdot\frac{[6]^2}{[9]^2}$$

$$1 = \frac{(038)^2}{(38)^2}\cdot\frac{[0]^2}{[9]^2} + \frac{(238)^2}{(38)^2}\cdot\frac{[2]^2}{[9]^2} - \frac{(8)^2}{(38)^2}\cdot\frac{[3]^2}{[9]^2} - \frac{(348)^2}{(38)^2}\cdot\frac{[4]^2}{[9]^2} - \frac{(368)^2}{(9)^2}\cdot\frac{[6]^2}{[9]^2}$$

$$1 = \frac{(058)^2}{(58)^2}\cdot\frac{[0]^2}{[9]^2} + \frac{(258)^2}{(58)^2}\cdot\frac{[2]^2}{[9]^2} + \frac{(458)^2}{(58)^2}\cdot\frac{[4]^2}{[9]^2} - \frac{(18)^2}{(58)^2}\cdot\frac{[5]^2}{[9]^2} - \frac{(568)^2}{(58)^2}\cdot\frac{[6]^2}{[9]^2}$$

$$1 = \frac{(078)^2}{(78)^2}\cdot\frac{[0]^2}{[9]^2} + \frac{(278)^2}{(78)^2}\cdot\frac{[2]^2}{[9]^2} + \frac{(478)^2}{(78)^2}\cdot\frac{[4]^2}{[9]^2} + \frac{(678)^2}{(78)^2}\cdot\frac{[6]^2}{[9]^2} - \frac{(8)^2}{(58)^2}\cdot\frac{[7]^2}{[9]^2}.$$

Oder, wenn man jetzt für die ϑ-Quotienten mit Nullargumenten die Constanten-Ausdrücke aus (XII), (XIII), (XIV) einsetzt:

$$(\mathrm{XV})\begin{cases}
1 = \sqrt{\dfrac{a_{01}a_{03}a_{05}a_{07}}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{08}}}\cdot\dfrac{[0]^2}{[9]^2} + \sqrt{\dfrac{a_{12}a_{23}a_{25}a_{27}}{a_{02}a_{24}a_{26}a_{28}}}\cdot\dfrac{[2]^2}{[9]^2} + \sqrt{\dfrac{a_{14}a_{34}a_{45}a_{47}}{a_{04}a_{24}a_{46}a_{48}}}\cdot\dfrac{[4]^2}{[9]^2} \\
\qquad + \sqrt{\dfrac{a_{16}a_{36}a_{56}a_{67}}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{68}}}\cdot\dfrac{[6]^2}{[9]^2} + \sqrt{\dfrac{a_{18}a_{38}a_{58}a_{78}}{a_{08}a_{28}a_{48}a_{68}}}\cdot\dfrac{[8]^2}{[9]^2} \\
1 = \sqrt{\dfrac{a_{03}a_{05}a_{07}a_{08}}{a_{01}a_{02}a_{04}a_{06}}}\cdot\dfrac{[0]^2}{[9]^2} - \sqrt{\dfrac{a_{13}a_{15}a_{17}a_{18}}{a_{01}a_{12}a_{14}a_{16}}}\cdot\dfrac{[1]^2}{[9]^2} - \sqrt{\dfrac{a_{23}a_{25}a_{27}a_{28}}{a_{02}a_{12}a_{24}a_{26}}}\cdot\dfrac{[2]^2}{[9]^2} \\
\qquad - \sqrt{\dfrac{a_{34}a_{45}a_{47}a_{48}}{a_{04}a_{14}a_{24}a_{46}}}\cdot\dfrac{[4]^2}{[9]^2} - \sqrt{\dfrac{a_{36}a_{56}a_{67}a_{68}}{a_{06}a_{16}a_{26}a_{46}}}\cdot\dfrac{[6]^2}{[9]^2} \\
1 = \sqrt{\dfrac{a_{01}a_{05}a_{07}a_{08}}{a_{02}a_{03}a_{04}a_{06}}}\cdot\dfrac{[0]^2}{[9]^2} + \sqrt{\dfrac{a_{12}a_{25}a_{27}a_{28}}{a_{02}a_{23}a_{24}a_{26}}}\cdot\dfrac{[2]^2}{[9]^2} - \sqrt{\dfrac{a_{13}a_{35}a_{37}a_{38}}{a_{03}a_{23}a_{34}a_{36}}}\cdot\dfrac{[3]^2}{[9]^2} \\
\qquad - \sqrt{\dfrac{a_{14}a_{45}a_{47}a_{48}}{a_{04}a_{24}a_{34}a_{46}}}\cdot\dfrac{[4]^2}{[9]^2} - \sqrt{\dfrac{a_{16}a_{56}a_{67}a_{68}}{a_{06}a_{26}a_{56}a_{46}}}\cdot\dfrac{[6]^2}{[9]^2} \\
1 = \sqrt{\dfrac{a_{01}a_{03}a_{07}a_{08}}{a_{02}a_{04}a_{05}a_{06}}}\cdot\dfrac{[0]^2}{[9]^2} + \sqrt{\dfrac{a_{12}a_{23}a_{27}a_{28}}{a_{02}a_{24}a_{25}a_{26}}}\cdot\dfrac{[2]^2}{[9]^2} + \sqrt{\dfrac{a_{14}a_{34}a_{47}a_{48}}{a_{04}a_{24}a_{45}a_{46}}}\cdot\dfrac{[4]^2}{[9]^2} \\
\qquad - \sqrt{\dfrac{a_{15}a_{35}a_{57}a_{58}}{a_{05}a_{25}a_{45}a_{56}}}\cdot\dfrac{[5]^2}{[9]^2} - \sqrt{\dfrac{a_{16}a_{36}a_{67}a_{68}}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{56}}}\cdot\dfrac{[6]^2}{[9]^2} \\
1 = \sqrt{\dfrac{a_{01}a_{03}a_{05}a_{08}}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{07}}}\cdot\dfrac{[0]^2}{[9]^2} + \sqrt{\dfrac{a_{12}a_{23}a_{25}a_{28}}{a_{02}a_{24}a_{26}a_{27}}}\cdot\dfrac{[2]^2}{[9]^2} + \sqrt{\dfrac{a_{14}a_{34}a_{45}a_{48}}{a_{04}a_{24}a_{46}a_{47}}}\cdot\dfrac{[4]^2}{[9]^2} \\
\qquad + \sqrt{\dfrac{a_{16}a_{36}a_{56}a_{68}}{a_{06}a_{28}a_{46}a_{67}}}\cdot\dfrac{[6]^2}{[9]^2} - \sqrt{\dfrac{a_{17}a_{37}a_{57}a_{78}}{a_{02}a_{24}a_{47}a_{67}}}\cdot\dfrac{[6]^2}{[9]^2}
\end{cases}$$

Hierbei sind die Wurzelausdrücke, welche die Coëfficienten dieser Gleichungen bilden, sämmtlich positiv zu nehmen, da ja in Folge der oben gemachten Annahme die ϑ-Quadrate für die Nullargumente

sämmtlich positiv zu nehmen sind. (NB. Auch wenn man diese Annahme fallen lässt, so ist das Vorzeichen jedes dieser Wurzelausdrücke durch den entsprechenden quadratischen ϑ-Quotienten eindeutig definirt.)

Aus diesen fünf Gleichungen zwischen den neun ϑ-Quotienten $\frac{\vartheta_0(v_1\cdots)}{\vartheta_9(v_1\cdots)}\cdots\frac{\vartheta_8(v_1\cdots)}{\vartheta_9(v_1\cdots)}$ lassen sich je fünf dieser Quotienten durch die anderen vier ausdrücken. Statt dessen kann man aber offenbar alle 9 Quotienten durch 4 neue unabhängige Variablen $x_1\cdots x_4$ darstellen. Wir setzen:

$$
\text{(XVI)}\quad\begin{cases}
\dfrac{\vartheta_0^2(v_1\cdots v_4)}{\vartheta_9^2(v_1\cdots v_4)}=\dfrac{(a_0-x_1)(a_0-x_2)(a_0-x_3)(a_0-x_4)}{\sqrt{a_{01}a_{02}a_{03}a_{04}a_{05}a_{06}a_{07}a_{08}}}\\[2ex]
\dfrac{\vartheta_1^2(v_1\cdots v_4)}{\vartheta_9^2(v_1\cdots v_4)}=\dfrac{(a_1-x_1)(a_1-x_2)(a_1-x_3)(a_1-x_4)}{\sqrt{a_{01}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}a_{16}a_{17}a_{18}}}\\[2ex]
\dfrac{\vartheta_2^2(v_1\cdots v_4)}{\vartheta_9^2(v_1\cdots v_4)}=-\dfrac{(a_2-x_1)(a_2-x_2)(a_2-x_3)(a_2-x_4)}{\sqrt{a_{02}a_{12}a_{23}a_{24}a_{25}a_{26}a_{27}a_{28}}}\\[2ex]
\dfrac{\vartheta_3^2(v_1\cdots v_4)}{\vartheta_9^2(v_1\cdots v_4)}=-\dfrac{(a_3-x_1)(a_3-x_2)(a_3-x_3)(a_3-x_4)}{\sqrt{a_{03}a_{13}a_{23}a_{34}a_{35}a_{36}a_{37}a_{38}}}\\[2ex]
\dfrac{\vartheta_4^2(v_1\cdots v_4)}{\vartheta_9^2(v_1\cdots v_4)}=\dfrac{(a_4-x_1)(a_4-x_2)(a_4-x_3)(a_4-x_4)}{\sqrt{a_{04}a_{14}a_{24}a_{34}a_{45}a_{46}a_{47}a_{48}}}\\[2ex]
\dfrac{\vartheta_5^2(v_1\cdots v_4)}{\vartheta_9^2(v_1\cdots v_4)}=\dfrac{(a_5-x_1)(a_5-x_2)(a_5-x_3)(a_5-x_4)}{\sqrt{a_{05}a_{15}a_{25}a_{35}a_{45}a_{56}a_{57}a_{58}}}\\[2ex]
\dfrac{\vartheta_6^2(v_1\cdots v_4)}{\vartheta_9^2(v_1\cdots v_4)}=-\dfrac{(a_6-x_1)(a_6-x_2)(a_6-x_3)(a_6-x_4)}{\sqrt{a_{06}a_{16}a_{26}a_{36}a_{46}a_{56}a_{67}a_{68}}}\\[2ex]
\dfrac{\vartheta_7^2(v_1\cdots v_4)}{\vartheta_9^2(v_1\cdots v_4)}=-\dfrac{(a_7-x_1)(a_7-x_2)(a_7-x_3)(a_7-x_4)}{\sqrt{a_{07}a_{17}a_{27}a_{37}a_{47}a_{57}a_{67}a_{78}}}\\[2ex]
\dfrac{\vartheta_8^2(v_1\cdots v_4)}{\vartheta_9^2(v_1\cdots v_4)}=\dfrac{(a_8-x_1)(a_8-x_2)(a_8-x_3)(a_8-x_4)}{\sqrt{a_{08}a_{18}a_{28}a_{38}a_{48}a_{58}a_{68}a_{78}}}
\end{cases}
$$

Die Wurzelzeichen in den Nennern dieser Ausdrücke sind wiederum sämmtlich positiv zu nehmen, da für $v_1=v_2=v_3=v_4=0$ — wo dann x_1, x_2, x_3, x_4 in Folge der Relationen (XII) die Werthe a_1, a_3, a_5, a_7 annehmen müssen — in Folge der gemachten Annahme die betreffenden Ausdrücke wiederum positiv werden müssen.

Durch Einsetzen der Ausdrücke (XVI) gehen nun die Gleichungen (XV) in die folgenden über:

$$
\begin{aligned}
1=\frac{(a_0-x_1)\cdots(a_0-x_4)}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{08}}-\frac{(a_2-x_1)\cdots(a_2-x_4)}{a_{02}a_{24}a_{26}a_{28}}+\frac{(a_4-x_1)\cdots(a_4-x_4)}{a_{04}a_{24}a_{46}a_{48}}\\
-\frac{(a_6-x_1)\cdots(a_6-x_4)}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{48}}+\frac{(a_8-x_1)\cdots(a_8-x_4)}{a_{08}a_{28}a_{48}a_{68}}\\
1=\frac{(a_0-x_1)\cdots(a_0-x_4)}{a_{01}a_{02}a_{04}a_{06}}-\frac{(a_1-x_1)\cdots(a_1\cdots x_4)}{a_{01}a_{12}a_{14}a_{16}}+\frac{(a_2-x_1)\cdots(a_2-x_4)}{a_{02}a_{12}a_{24}a_{26}}\\
-\frac{(a_4-x_1)\cdots(a_4-x_4)}{a_{04}a_{14}a_{24}a_{46}}+\frac{(a_6-x_1)\cdots(a_6-x_4)}{a_{06}a_{16}a_{26}a_{46}}
\end{aligned}
$$

$$1 = \frac{(a_0 - x_1)\cdots(a_0 - x_4)}{a_{02}a_{03}a_{04}a_{06}} - \frac{(a_2 - x_1)\cdots(a_2 - x_4)}{a_{02}a_{23}a_{24}a_{26}} + \frac{(a_3 - x_1)\cdots(a_3 - x_4)}{a_{03}a_{23}a_{34}a_{36}} - \frac{(a_4 - x_1)\cdots(a_4 - x_4)}{a_{04}a_{24}a_{34}a_{46}} + \frac{(a_6 - x_1)\cdots(a_6 - x_4)}{a_{06}a_{26}a_{36}a_{46}}$$

$$1 = \frac{(a_0 - x_1)\cdots(a_0 - x_4)}{a_{02}a_{04}a_{05}a_{06}} - \frac{(a_2 - x_1)\cdots(a_2 - x_4)}{a_{02}a_{24}a_{25}a_{26}} + \frac{(a_4 - x_1)\cdots(a_4 - x_4)}{a_{04}a_{24}a_{45}a_{46}} - \frac{(a_5 - x_1)\cdots(a_5 - x_4)}{a_{05}a_{25}a_{45}a_{56}} + \frac{(a_6 - a_1)\cdots(a_6 - x_4)}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{56}}$$

$$1 = \frac{(a_0 - x_1)\cdots(a_0 - x_4)}{a_{02}a_{04}a_{06}a_{07}} - \frac{(a_2 - x_1)\cdots(a_2 - x_4)}{a_{02}a_{24}a_{26}a_{27}} + \frac{(a_4 - x_1)\cdots(a_4 - x_4)}{a_{04}a_{24}a_{46}a_{47}} - \frac{(a_6 - x_1)\cdots(a_6 - x_4)}{a_{06}a_{26}a_{46}a_{67}} + \frac{(a_7 - x_1)\cdots(a_7 - x_4)}{a_{07}a_{27}a_{47}a_{67}}$$

welche, wie man sich leicht überzeugt, identisch befriedigt werden. Setzt man nämlich

$$\varphi(z) = (z - x_1)(z - x_2)(z - x_3)(z - x_4)$$

$$Q(z) = (z - a_0)(z - a_2)(z - a_4)(z - a_6)(z - a_8) \quad \left(\frac{dQ(z)}{dz}\right)_{z = a_\alpha} = Q'(a_\alpha),$$

so lässt sich die erste der obigen Gleichungen auf die Form bringen:

$$1 = \frac{\varphi(a_0)}{Q'(a_0)} + \frac{\varphi(a_2)}{Q'(a_2)} + \frac{\varphi(a_4)}{Q'(a_4)} + \frac{\varphi(a_6)}{Q'(a_6)} + \frac{\varphi(a_8)}{Q'(a_8)}$$

und dass diese Gleichung identisch befriedigt wird, folgt unmittelbar aus der Partialbruchzerlegung:

$$\frac{\varphi(z)}{Q(z)} = \frac{\varphi(a_0)}{Q'(a_0)} \cdot \frac{1}{z - a_0} + \frac{\varphi(a_2)}{Q'(a_2)} \cdot \frac{1}{z - a_2} + \cdots + \frac{\varphi(a_8)}{Q'(a_8)} \, \frac{1}{z - a_4}$$

durch Multiplication mit $Q(z)$ und Aufsuchung des Coëfficienten von z^5. Die Identität der übrigen Gleichungen ergiebt sich alsdann unmittelbar, wenn man an Stelle von a_8 der Reihe nach a_1, a_3, a_5, a_7 setzt. — Daraus folgt dann die Berechtigung, die Ausdrücke der 15 einfachen ϑ-Quotienten durch $x_1 \cdots x_4$ in der Form (XVI) anzusetzen.

Man kann nun auch alle möglichen anderen ϑ-Quotienten durch $x_1 \cdots x_4$ ausdrücken.

Ich will allgemein zeigen, in welcher Weise dies für die ϑ-Quotienten, welche aus einer ϑ-Function mit zweifachem Index und $\vartheta_9(v_1 \cdots v_4)$ gebildet sind, zu bewerkstelligen ist, da diese späterhin in den ersten Ableitungen der Functionen (XVI) auftreten werden. Hierzu setze ich zunächst in der Formel (D, 2) — S. 15 — statt $u_\alpha \cdots v_\alpha$ und bezeichne analog den bisher gebrauchten Abkürzungen $\vartheta_\mu(v_1 \cdots v_4)$ mit $[\mu]$, $\vartheta_\mu(0, 0, 0, 0)$ mit (μ) — dann wird

$$\text{(H)} \qquad (\eta)(\eta\alpha\beta)[\alpha][\beta] = \sum_\gamma (-1)^{c_\gamma} (\eta\gamma\alpha)(\eta\gamma\beta)[\gamma][\gamma\alpha\beta].$$

Ich bezeichne ferner mit

$$r_0 \; r_1 \; r_2 \; r_3 \; r_4$$

die Reihe der geraden Zahlen 0, 2, 4, 6, 8 in irgend einer Reihenfolge, desgleichen mit

$$s_1\ s_2\ s_3\ s_4$$

die der ungeraden 1, 3, 5, 7. Dann wird zunächst — wenn ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 gleich r_1, r_2, r_3, r_4 gewählt werden:

$$\eta = (1,\ 3,\ 5,\ 7,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4) = r_0.$$

Ausserdem werde noch gesetzt:

$$\alpha = s_1 \quad \beta = (r_0 s_1) \quad \delta = (r_1 r_2 r_3 r_4).$$

Dann nimmt γ die folgende Werthe an:

$$\begin{array}{llllll}
(r_1 r_2 r_3 r_4) & — & — & — & — & (1)\\
(r_2 r_3 r_4) & (r_1 r_3 r_4) & (r_1 r_2 r_4) & (r_1 r_2 r_3) & — & (2)\\
(r_3 r_4) & (r_2 r_4) & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & (r_1 r_2) & (3)\\
r_4\ \ r_3\ \ r_2\ \ r_1 & — & — & — & — & (4)\\
9 & — & — & — & — & (5).
\end{array}$$

Mithin erhält $\eta\gamma\beta$ für die γ der ersten, zweiten und fünften Zeile die Werthe:

$$\begin{array}{l}
(s_1 s_2 s_3 s_4 r_0 s_1)\\
(s_1 s_2 s_3 s_4 r_0 r_1 s_1) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (s_1 s_2 s_3 s_4 r_0 r_4 s_1)\\
s_1
\end{array}$$

und $\eta\gamma\alpha$ für die γ der dritten Zeile die Werthe:

$$(s_1 s_2 s_3 s_4 r_1 r_2 s_1)\ (s_1 s_2 s_3 s_4 r_1 r_3 s_1) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (s_1 s_2 s_3 s_4 r_3 r_4 s_1),$$

so dass die betreffenden Glieder sämmtlich verschwinden müssen, und nur diejenigen mit den γ der vierten Zeile übrig bleiben, für welche

$$\begin{aligned}
\eta\gamma\alpha &= (r_0 r_4 s_1),\ (r_0 r_3 s_1),\ (r_0 r_2 s_1),\ (r_0 r_1 s_1)\\
\eta\gamma\beta &= (r_4 s_1),\quad (r_3 s_1),\quad (r_2 s_1),\quad (r_1 s_1)\\
\gamma\alpha\beta &= (r_0 r_4),\quad (r_0 r_3),\quad (r_0 r_2),\quad (r_0 r_1).
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir daher noch mit $c_1, \cdot \cdot\, c_4$ den Factor ± 1, so liefert die Formel (H) nunmehr die folgende Beziehung:

$$(\mathrm{J}) \left\{ \begin{aligned}
&(9)(r_0)[s_1][r_0 s_1] + c_1 (r_1 s_1)(r_0 r_1 s_1)[r_1][r_0 r_1] + c_2 (r_2 s_1)(r_0 r_2 s_1)[r_2][r_0 r_2]\\
&\qquad + c_3 (r_3 s_1)(r_0 r_3 s_1)[r_3][r_0 r_3] + c_4 (r_4 s_1)(r_0 r_4 s_1)[r_4][r_0 r_4] = 0.
\end{aligned}\right.$$

Nun müssen ferner lineare homogene Relationen — (wie allgemein gezeigt wurde) — zwischen folgenden ϑ-Quadraten stattfinden:

$$\begin{array}{l}
[9]\ [r_0]\ [r_1]\ [r_2]\ [r_3]\ [s_1]\\
[9]\ [r_0]\ [r_1]\ [r_2]\ [r_4]\ [s_1]\\
[9]\ [r_0]\ [r_1]\ [r_3]\ [r_4]\ [s_1]\\
[9]\ [r_0]\ [r_2]\ [r_3]\ [r_4]\ [s_1],
\end{array}$$

folglich, wenn man auf die Argumente in den betreffenden Gleichungen diejenigen Substitutionen halber Perioden angewendet denkt, welche

durch den Index r_0 charakterisirt werden, auch zwischen folgenden ϑ-Quadraten:

$$[r_0]\,[9]\,[r_0r_1]\,[r_0r_2]\,[r_0r_3]\,[r_0s_1]$$
$$[r_0]\,[9]\,[r_0r_1]\,[r_0r_2]\,[r_0r_4]\,[r_0s_1]$$
$$[r_0]\,[9]\,[r_0r_1]\,[r_0r_3]\,[r_0r_4]\,[r_0s_1]$$
$$[r_0]\,[9]\,[r_0r_2]\,[r_0r_3]\,[r_0r_4]\,[r_0s_1].$$

Aus diesen vier Gleichungen in Verbindung mit Gl. (J) kann man nun irgend vier der 5 Grössen $[r_0r_1]\cdots[r_0r_4]$, $[r_0s_1]$ eliminiren und erhält dann schliesslich eine Gleichung, in welcher ausser *einer* solchen ϑ-Function mit den Argumenten $(v_1\cdots v_4)$ nur noch solche mit einfachen Indices, und ausserdem ϑ-Functionen mit Nullargumenten enthalten sind, und aus der man also vermöge der Ausdrücke (XVI) und (XII), (XIII), (XIV) die Quotienten von der Form $\frac{[r_0r_1]^2}{[9]^2}\cdots$ und $\frac{[r_0s_1]^2}{[9]^2}$ als Functionen von $x_1\cdots x_4$ und der Constanten $a_0\cdots a_8$ darstellen kann. Hierbei bedeuten r_0, r_1 beliebige gerade, s_1 eine beliebige ungerade Zahl der Reihe $0, 1, \cdots 8$. Es bleibt also noch der Fall zu betrachten übrig, dass beide Ziffern des zusammengesetzten Index ungerade Zahlen sind, der betreffende Quotient also die Form hat $\frac{[s_1s_2]^2}{[9]^2}$.

Nun muss eine homogene Linear-Relation zwischen den ϑ-Quadraten:

$$[s_1]\,[s_2]\,[9]\,[r_0]\,[r_1]\,[r_2]$$

bestehen, folglich auch — vermöge der Substitution (s_1) — zwischen:

$$[9]\,[s_1s_2]\,[s_1]\,[r_0s_1]\,[r_1s_1]\,[r_2s_1]$$

und da diese Gleichung ausser $[s_1s_2]$ nur solche ϑ-Functionen enthält, wis sie bereits oben betrachtet worden sind, so ergiebt sich, dass man jetzt auch die Quotienten von der Form $\frac{[s_1s_2]^2}{[9]^2}$ als Functionen von $x_1,\cdots x_4$, $a_0\cdots a_8$ darstellen kann.

Setzt man

$$(z-a_0)(z-a_1)\cdots(z-a_7)(z-a_8)=R(z)$$
$$(z-x_1)(z-x_2)(z-x_3)(z-x_4)=\varphi(z)$$

und

$$\left(\frac{dR(z)}{dz}\right)_{z=a_\alpha}=R'(a_\alpha)$$
$$\left(\frac{d\varphi(z)}{dz}\right)_{z=x_\alpha}=\varphi'(x_\alpha),$$

so ergeben sich auf diese Weise — wenn man die zweideutigen Wurzelvorzeichen so wählt, dass die Endausdrücke mit denjenigen übereinstimmen, wie sie späterhin in den Ableitungen der Functionen mit einfachem Index auftreten werden — Beziehungen von der Form:

$$\text{(XVII)} \quad \frac{\vartheta_{\lambda\mu}(v_1\cdots v_4)}{\vartheta_0(v_1\cdots v_4)} = \frac{\sqrt{(-1)^{\bar\lambda+\bar\mu} a_{\lambda\mu}\varphi(a_\lambda)\varphi(a_\mu)}}{\sqrt[4]{(-1)^{\lambda+\mu}R'(a_\lambda)R'(a_\mu)}} \sum\nolimits^{\mathfrak{a}} \left\{ \frac{\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}}{(x_{\mathfrak{a}}-a_\lambda)(x_{\mathfrak{a}}-a_\mu)\varphi'(x_{\mathfrak{a}})} \right\}$$

wo $\bar\lambda$ und $\bar\mu$ die grösste in $\frac{\lambda}{2}$ resp. $\frac{\mu}{2}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnen und $a_\lambda > a_\mu$, also $a_{\lambda\mu}$ positiv zu nehmen ist.

Es handelt sich jetzt darum, den Beweis zu führen, dass der durch die Gleichungen (XVI) und (XVII) statuirte Zusammenhang zwischen den Variablen v_1, v_2, v_3, v_4 und x_1, x_2, x_3, x_4 wirklich ein derartiger ist, dass sich die Differentialien $dv_1 \cdots dv_4$ als hyperelliptische Differentialausdrücke in $x_1 \cdots x_4$ darstellen, dass also Gleichungen bestehen von der Form:

$$dv_{\mathfrak{a}} = \sum\nolimits^{\mathfrak{b}} F_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(x_{\mathfrak{b}}, \sqrt{R(x_{\mathfrak{b}})})\, dx_{\mathfrak{b}}.$$

Zu diesem Behufe führen wir vier neue Variablen $u_1 \cdots u_4$ ein, welche wir durch hyperelliptische Differentialgleichungen von ganz bestimmter Form definiren: alsdann wird sich zeigen lassen, dass sich jede der Grössen $dv_{\mathfrak{a}}$ in der Form

$$dv_{\mathfrak{a}} = A_{\mathfrak{a}}du_1 + B_{\mathfrak{a}}du_2 + C_{\mathfrak{a}}du_3 + D_{\mathfrak{a}}du_4$$

darstellen lässt, wo $A_{\mathfrak{a}} \cdots D_{\mathfrak{a}}$, welche offenbar vermöge der identischen Relation

$$dv_{\mathfrak{a}} = \frac{\partial v_{\mathfrak{a}}}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial v_{\mathfrak{a}}}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial v_{\mathfrak{a}}}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial v_{\mathfrak{a}}}{\partial u_4}du_4$$

nichts anderes sind als die partiellen Ableitungen von $v_{\mathfrak{a}}$ nach $u_1 \cdots u_4$, sich als fest bestimmte Constanten ergeben.

Ich setze

$$(z-a_1)(z-a_3)(z-a_5)(z-a_7) = P(z) \quad \left(\frac{dP(z)}{dz}\right)_{z=a_{\mathfrak{a}}} = P'(a_{\mathfrak{a}}),$$

dann sollen $u_1 \cdots u_4$ durch die folgenden Differentialgleichungen definirt werden:

$$\text{(XVIII)} \quad \begin{cases} du_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{P(x_1)}{x_1-a_1}\cdot\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{P(x_2)}{x_2-a_1}\cdot\frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} \\ \qquad + \frac{1}{2}\cdot\frac{P(x_3)}{x_3-a_1}\cdot\frac{dx_3}{\sqrt{R(x_3)}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{P(x_4)}{x_4-a_1}\cdot\frac{dx_4}{\sqrt{R(x_4)}} \\ du_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{P(x_1)}{x_1-a_3}\cdot\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{P(x_2)}{x_2-a_3}\cdot\frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} \\ \qquad + \frac{1}{2}\cdot\frac{P(x_3)}{x_3-a_3}\cdot\frac{dx_3}{\sqrt{R(x_3)}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{P(x_4)}{x_4-a_3}\cdot\frac{dx_4}{\sqrt{R(x_4)}} \\ du_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{P(x_1)}{x_1-a_5}\cdot\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{P(x_2)}{x_2-a_5}\cdot\frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} \\ \qquad + \frac{1}{2}\cdot\frac{P(x_3)}{x_3-a_5}\cdot\frac{dx_3}{\sqrt{R(x_3)}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{P(x_4)}{x_4-a_5}\cdot\frac{dx_4}{\sqrt{R(x_4)}} \end{cases}$$

$$\text{(XVIII)} \quad \begin{cases} du_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P(x_1)}{x_1 - a_7} \cdot \frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{P(x_2)}{x_2 - a_7} \cdot \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} \\ \quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{P(x_3)}{x_3 - a_7} \cdot \frac{dx_3}{\sqrt{R(x_3)}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{P(x_4)}{x_4 - a_7} \cdot \frac{dx_4}{\sqrt{R(x_4)}} \end{cases}$$

Eliminirt man aus diesem System dx_2, dx_3, dx_4, und beachtet, dass:

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x_1}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial x_1}{\partial u_3} du_3 + \frac{\partial x_1}{\partial u_4} du_4,$$

so ergiebt sich:

$$\frac{\partial x_1}{\partial u_1} = - \frac{(x_4 - a_1)(x_3 - a_1)(x_2 - a_1)\, 2\sqrt{R(x_1)}}{a_{13} a_{15} a_{17} (x_1 - x_4)(x_1 - x_3)(x_1 - x_2)} = \frac{2\varphi(a_1)\sqrt{R(x_1)}}{P'(a_1)(a_1 - x_1)\varphi'(x_1)}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial u_2} = \frac{(x_4 - a_3)(x_3 - a_3)(x_2 - a_3)\, 2\sqrt{R(x_1)}}{a_{13} a_{35} a_{37} (x_1 - x_4)(x_1 - x_3)(x_1 - x_2)} = \frac{2\varphi(a_3)\sqrt{R(x_1)}}{P'(a_3)(a_3 - x_1)\varphi'(x_1)}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial u_3} = - \frac{(x_4 - a_5)(x_3 - a_5)(x_2 - a_5)\, 2\sqrt{R(x_1)}}{a_{15} a_{35} a_{57} (x_1 - x_4)(x_1 - x_3)(x_1 - x_2)} = \frac{2\varphi(a_5)\sqrt{R(x_1)}}{P'(a_5)(a_5 - x_1)\varphi'(x_1)}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial u_4} = \frac{(x_4 - a_7)(x_3 - a_7)(x_2 - a_7)\, 2\sqrt{R(x_1)}}{a_{17} a_{37} a_{57} (x_1 - x_4)(x_1 - x_3)(x_1 - x_2)} = \frac{2\varphi(a_7)\sqrt{R(x_1)}}{P'(a_7)(a_7 - x_1)\varphi'(x_1)}$$

und analoge Ausdrücke für x_2, x_3, x_4, so dass allgemein:

$$\text{(XIX)} \qquad \frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial u_{\mathfrak{b}}} = \frac{2\varphi(a_{2\mathfrak{b}-1})\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}}{P'(a_{2\mathfrak{b}-1})(a_{2\mathfrak{b}-1} - x_{\mathfrak{a}})\varphi'(x_{\mathfrak{a}})}.$$

Ich bezeichne ferner

$$\frac{\vartheta_\alpha(v_1 \cdots v_4)}{\vartheta_9(v_1 \cdots v_4)} \text{ mit } f_\alpha(v_1 \cdots v_4)$$

und bilde zunächst

$$\frac{\partial f_0(v \cdots v_4)}{\partial u_1} = \frac{\partial}{\partial u_1} \left\{ \frac{\sqrt{\varphi(a_0)}}{\sqrt[4]{R'(a_0)}} \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{R'(a_0)}} \left\{ \frac{\partial \sqrt{\varphi(a_0)}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u_1} + \cdots\cdots + \frac{\partial \sqrt{\varphi(a_0)}}{\partial x_4} \cdot \frac{\partial x_4}{\partial u_1} \right\}$$

$$= - \frac{\varphi(a_1)\sqrt{\varphi(a_0)}}{\sqrt[4]{R'(a_0)} \cdot P'(a_1)} \sum_{\mathfrak{a}}^{4}{}_{1} \frac{\sqrt{R(x_{\mathfrak{a}})}}{(a_0 - x_{\mathfrak{a}})(a_1 - x_{\mathfrak{a}})\varphi'(x_{\mathfrak{a}})}$$

$$\text{(XXa)} \quad \begin{cases} = - \sqrt{\frac{a_{12} a_{14} a_{16} a_{18}}{a_{13} a_{15} a_{17}}} \cdot f_1(v_1 \cdots v_4)\, f_{01}(v_1 \cdots v_4) \\ \text{Ebenso:} \\ \frac{\partial f_0(v_1 \cdots v_4)}{\partial u_2} = - \sqrt{\frac{a_{23} a_{34} a_{36} a_{38}}{a_{13} a_{35} a_{37}}} \cdot f_3(v_1 \cdots v_4)\, f_{03}(v_1 \cdots v_4) \\ \frac{\partial f_0(v_1 \cdots v_4)}{\partial u_3} = - \sqrt{\frac{a_{25} a_{45} a_{56} a_{58}}{a_{15} a_{35} a_{57}}} \cdot f_5(v_1 \cdots v_4)\, f_{05}(v_1 \cdots v_4) \\ \frac{\partial f_0(v_1 \cdots v_4)}{\partial u_4} = - \sqrt{\frac{a_{27} a_{47} a_{67} a_{78}}{a_{17} a_{37} a_{57}}} \cdot f_7(v_1 \cdots v_4)\, f_{07}(v_1 \cdots v_4) \end{cases}$$

und in ähnlicher Weise, wenn wiederum:

$$(z - a_0)(z - a_2)(z - a_4)(z - a_6)(z - a_8) = Q(z)$$

gesetzt wird, allgemein:

$$\text{(XXb)} \quad \frac{\partial f_{2\mathfrak{a}}(v_1 \cdots v_4)}{\partial u_{\mathfrak{b}}} = -\sqrt{\pm \frac{1}{(a_{2\mathfrak{b}-1} - a_{\mathfrak{a}})} \cdot \frac{-Q(a_{2\mathfrak{b}-1})}{P'(a_{2\mathfrak{b}-1})}} f_{2\mathfrak{b}-1}(v_1 \cdots v_4) f_{2\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(v_1 \cdots v_4)$$

wo das Vorzeichen von $\pm(a_{2\mathfrak{b}-1} - a_{\mathfrak{a}})$ so zu wählen ist, dass diese Grösse — und damit, wie leicht ersichtlich, der ganze Ausdruck unter der Wurzel positiv wird.

Es sollen jetzt diese Ausdrücke für die partiellen Ableitungen von $f_{2\mathfrak{a}}(v_1 \cdots v_4)$ nach $u_1 \cdots u_4$ mit den entsprechenden Ableitungen nach $v_1 \cdots v_4$ verglichen werden. Um diese letzteren herzuleiten, entwickle ich eine Formel, vermöge deren gewisse ϑ-Producte, deren Argumente aus Summen und Differenzen zweier Systeme von Variablen bestehen, sich durch Aggregate von ϑ-Functionen mit den betreffenden einfachen Variablen ausdrücken.

Aus der allgemeinen Additionsformel (D, 1) — S. 15 — folgt, wenn man $w_{\mathfrak{a}} = 0$ setzt und ausserdem $v_{\mathfrak{a}}$ statt $u_{\mathfrak{a}}$, $w_{\mathfrak{a}}$ statt $v_{\mathfrak{a}}$ schreibt:

$$\text{(K)} \quad \vartheta_\eta \vartheta_{\eta\alpha\beta} \vartheta_\alpha(v_1 + w_1, \cdots v_4 + w_4)\, \vartheta_\beta(v_1 - w_1, \cdots v_4 - w_4)$$
$$= \sum_\gamma (-1)^{C_\gamma} \vartheta_\gamma(v_1 \cdots v_4)\, \vartheta_{\gamma\alpha\beta}(v_1 \cdots v_4)\, \vartheta_{\eta\gamma\alpha}(w_1 \cdots w_4)\, \vartheta_{\eta\gamma\beta}(w_1 \cdots w_4) \cdot$$

Wählt man jetzt

$$\eta = (1, 3, 5, 7, 1, 3, 5, 7) = 9 \quad \delta = 9 \quad \alpha = 0 \quad \beta = 9$$

und bezeichnet zur Abkürzung

$$\begin{array}{ll} \vartheta_\lambda(v_1 + w_1, \cdots v_4 + w_4) & \text{mit } P_\lambda \\ \vartheta_\lambda(v_1 - w_1, \cdots v_4 - w_4) & \text{mit } Q_\lambda \\ \vartheta_\lambda(v_1 \cdots v_4) & \text{mit } p_\lambda \\ \vartheta_\lambda(w_1 \cdots w_4) & \text{mit } q_\lambda \\ \vartheta_\lambda(0 \cdots 0) \text{ wie früher} & \text{mit } \lambda, \end{array}$$

so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} \text{(XXI)} \quad 0 \cdot 9 \cdot P_0 \cdot Q_9 = {} & p_9 p_0 q_9 q_0 + p_1 p_{01} q_1 q_{01} + p_3 p_{03} q_3 q_{03} + p_5 p_{05} q_5 q_{05} \\ & + p_7 p_{07} q_7 q_{07} + p_{13} p_{013} q_{13} q_{013} + p_{15} p_{015} q_{15} q_{015} \\ & + p_{17} p_{017} q_{17} q_{017} + p_{35} p_{035} q_{35} q_{035} + p_{37} p_{037} q_{37} q_{037} \\ & + p_{57} p_{057} q_{57} q_{057} + p_{135} p_{0135} q_{135} q_{0135} + p_{137} p_{0137} q_{137} q_{0137} \\ & + p_{157} p_{0157} q_{157} q_{0157} + p_{357} p_{0357} q_{357} q_{0357} \\ & + p_{1357} p_{2468} q_{1357} q_{2468} \cdot \end{aligned}$$

(Ich bemerke beiläufig, dass sich ganz analoge Relationen für die noch übrigen P_λ mit einfachem geraden Index ergeben, wenn man in Gl. (K) mit Beibehaltung der übrigen Bestimmungen α der Reihe nach die Werthe 2, 4, 6, 8 annehmen lässt. — Giebt man ferner α die

Werthe 1, 3, 5, 7, so erhält man ähnliche Beziehungen für die P_λ mit ungeradem Index; nur darf in diesen Fällen η nicht den Werth 9 erhalten, weil sonst $\vartheta_{\eta\alpha\beta}$ und somit die linke Seite verschwinden würde. Man hat vielmehr dann für η irgend einen geraden Index z. B. $\eta = (1, 3, 5, 7, 0, 2, 4, 6) = 8$ zu wählen und man erhält z. B. auf diese Weise für $\alpha = 1$ die Gleichung:

$$\begin{aligned} 8 \cdot 18 \cdot P_1 \cdot Q_9 = & p_9 p_1 q_8 q_{18} + p_0 p_{01} q_{08} q_{018} - p_2 p_{12} p_{28} p_{128} - p_4 p_{14} p_{18} p_{148} \\ & p_6 p_{16} q_{68} q_{168} - p_{02} p_{012} q_{028} q_{0128} - p_{04} p_{014} q_{048} q_{0148} \\ & - p_{06} p_{016} q_{068} q_{0168} + p_{24} p_{124} q_{248} q_{1248} + p_{26} p_{126} q_{268} p_{1268} \\ & + p_{46} p_{146} q_{468} q_{1468} + p_{024} p_{0124} q_{0248} q_{3567} + p_{026} p_{0126} q_{0268} q_{3457} \\ & + p_{046} p_{0146} q_{0468} q_{2357} - p_{246} p_{1246} q_{2468} q_{0357} \\ & - p_{0246} p_{3578} q_{1357} q_{357} \cdot) \end{aligned}$$

Ich differenzire jetzt Gl. (XXI) nach $w_\mathfrak{a}$ (für $\mathfrak{a} = 1, 2, 3, 4$) und setze dann $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 0$. Dabei ist zu beachten, dass wenn F eine beliebige Function von ϱ Variablen darstellt

$$\frac{\partial F(x_1 \pm y_1, \cdots x_\varrho \pm y_\varrho)}{\partial y_\mathfrak{a}} = \frac{\partial F(x_1 \pm y_1, \cdots x_\varrho \pm y_\varrho)}{\partial (x_\mathfrak{a} \pm y_\mathfrak{a})} \cdot \frac{\partial (x_\mathfrak{a} \pm y_\mathfrak{a})}{\partial y_\mathfrak{a}}$$

$$= \pm \frac{\partial F(x_1 \pm y_1, \cdots x_\varrho \pm y_\varrho)}{\partial (x_\mathfrak{a} \pm y_\mathfrak{a})},$$

mithin

$$\left(\frac{\partial F(x_1 \pm y_1, \cdots x_\varrho \pm y_\varrho)}{\partial y_\mathfrak{a}} \right)_{y_1 \cdots y_\varrho = 0} = \pm \frac{\partial F(x_1 \cdots x_\varrho)}{\partial x_\mathfrak{a}}.$$

Es wird daher bei jener Differentiation die linke Seite der Gleichung (XXI) die Form annehmen:

$$\left(\frac{\partial (P_0 Q_9)}{\partial w_\mathfrak{a}} \right)_{w_1 \dots w_4 = 0} = \left(Q_9 \frac{\partial P_0}{\partial (v_\mathfrak{a} + w_\mathfrak{a})} - P_0 \frac{\partial Q_9}{\partial (v_\mathfrak{a} - w_\mathfrak{a})} \right)_{w_1 \dots w_4 = 0}$$

$$= p_9 \frac{\partial p_0}{\partial v_\mathfrak{a}} - p_0 \frac{\partial p_9}{\partial v_\mathfrak{a}}$$

$$= p_9^2 \frac{\partial \frac{p_0}{p_9}}{\partial v_\mathfrak{a}}$$

oder mit Anwendung der bereits früher gebrauchten Bezeichnungen:

$$\left(\frac{\partial (P_0 Q_9)}{\partial w_\mathfrak{a}} \right)_{w_1 \dots w_4 = 0} = [9]^2 \frac{\partial f_0 (v_1 \cdots v_4)}{\partial v_\mathfrak{a}}.$$

Auf der rechten Seite der Gl. (XXI) sind die p von $w_\mathfrak{a}$ unabhängig; ferner müssen die Ausdrücke von der Form

$$\frac{\partial (q_\alpha q_\beta)}{\partial w_\mathfrak{a}} = q_\alpha \frac{\partial q_\beta}{\partial w_\mathfrak{a}} + q_\beta \frac{\partial q_\alpha}{\partial w_\mathfrak{a}}$$

für $w_1 \cdots w_4 = 0$ verschwinden, sobald α und β *gleichzeitig* Indices gerader oder Indices ungerader Theta's sind (weil im ersten Falle

$\frac{\partial q_\alpha}{\partial w_a}$ und $\frac{\partial q_\beta}{\partial w_a}$ als erste Ableitungen gerader Function, im zweiten q_α und q_β für die Nullargumente verschwinden müssen. Ist α der Index einer geraden, β der einer ungeraden ϑ-Function — oder umgekehrt, so nehmen jene Ausdrücke die Form

$$\left(q_\alpha \frac{\partial q_\beta}{\partial w_a}\right)_{w_1 \ldots w_4 = 0} \quad \text{resp.} \quad \left(q_\beta \frac{\partial q_\alpha}{\partial w_a}\right)_{w_1 \ldots w_4 = 0}$$

an, und müssen in Folge der für die hier betrachteten hyperelliptischen Theta's geltenden Bedingungen auch diese noch verschwinden, sobald α resp. β einen Index aus der Reihe

135, 137, 157, 357, 0246, 0248, 0268, 0468, 2468, 1357

bezeichnet. Beachtet man schliesslich noch, dass

$$(q_\alpha)_{w_1 \ldots w_4 = 0} = (p_\alpha)_{v_1 \ldots v_4 = 0},$$

wofür wir wiederum wie früher einfach α schreiben können, und dass

$$\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial w_a}\right)_{w_1 \ldots w_4 = 0} = \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial v_a}\right)_{v_1 \ldots v_4 = 0},$$

wofür wir zur Abkürzung der Bezeichnung $(\alpha)'_{v_a}$ einführen wollen, so ergiebt sich in Folge der bezeichneten Differentiation aus Gl. (XXI) die folgende Relation:

$$\text{(XXII)} \qquad 0.9.\frac{\partial f_0(v_1 \cdots v_4)}{\partial v_a} = 01.(1)'_{v_a} f_1(v_1 \ldots) f_{01}(v_1 \ldots)$$

$$+ 03(3)'_{v_a} f_3(v_1 \ldots) f_{03}(v_1 \ldots) + 05.(5)'.f_5(v_1 \ldots) f_{05}(v_1 \ldots) + 07(7)'_{v_a}.f_7(v_1 \ldots) f_{07}(v_1 \ldots)$$

und wenn man diese jetzt mit den unter (XX, a) gegebenen Ausdrücken vergleicht, so folgt:

$$\frac{\partial f_0(v_1 \cdots)}{\partial v_a} = -\frac{01 \cdot (1)'_{v_a}}{0 \cdot 9} \sqrt{\frac{a_{13} a_{15} a_{17}}{a_{12} a_{14} a_{16} a_{18}}} \cdot \frac{\partial f_0(v_1 \cdots)}{\partial u_1} - \frac{03 \cdot (3)'_{v_a}}{0 \cdot 9} \sqrt{\frac{a_{13} a_{35} a_{37}}{a_{23} a_{34} a_{36} a_{38}}} \cdot \frac{\partial f_0(v_1 \cdots)}{\partial u_2}$$

$$- \frac{05 \cdot (5)'_{v_a}}{0 \cdot 9} \sqrt{\frac{a_{15} a_{35} a_{57}}{a_{25} a_{45} a_{56} a_{58}}} \cdot \frac{\partial f_0(v_1 \cdots)}{\partial u_3} - \frac{07 \cdot (7)'_{v_a}}{0 \cdot 9} \sqrt{\frac{a_{17} a_{37} a_{57}}{a_{27} a_{47} a_{67} a_{78}}} \cdot \frac{\partial f_0(v_1 \cdots)}{\partial u_4}$$

und weil

$$\frac{\partial f_0(v_1 \cdots)}{\partial v_a} = \frac{\partial f_0(v_1 \cdots)}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial v_a} + \frac{\partial f_0(v_1 \cdots)}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial v_a} + \frac{\partial f_0(v_1 \cdots)}{\partial u_3} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial v_a} + \frac{\partial f_0(v_1 \cdots)}{\partial v_4} \cdot \frac{\partial u_4}{\partial v_a}$$

so ergiebt sich:

$$\text{(XXIII)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial v_a} = -\sqrt{\dfrac{a_{13} a_{15} a_{17}}{a_{12} a_{14} a_{16} a_{18}}} \cdot \dfrac{01 \cdot (1)'_{v_a}}{0 \cdot 9} = -\sqrt[4]{\dfrac{a_{13} a_{15} a_{17}}{a_{01} a_{12} a_{14} a_{16} a_{18}}} \cdot \dfrac{(1)'_{v_a}}{9} \\ \qquad = -\sqrt[4]{-\dfrac{P'(a_1)}{Q(a_1)}} \cdot \dfrac{(1)'_{v_a}}{9} \end{cases}$$

$$(\mathrm{XXIII})\begin{cases}\dfrac{\partial u_2}{\partial v_\alpha}=-\sqrt{\dfrac{a_{13}a_{35}a_{37}}{a_{23}a_{34}a_{36}a_{38}}}\cdot\dfrac{03\cdot(3)'_{v_\alpha}}{0\cdot 9}=-\sqrt[4]{\dfrac{a_{13}a_{35}a_{37}}{a_{03}a_{23}a_{34}a_{36}a_{38}}}\cdot\dfrac{(3)'_{v_\alpha}}{9}\\ \qquad=-\sqrt[4]{-\dfrac{P'(a_3)}{Q(a_3)}}\cdot\dfrac{(3)'_{v_\alpha}}{9}\\ \dfrac{\partial u_3}{\partial v_\alpha}=-\sqrt{\dfrac{a_{15}a_{35}a_{57}}{a_{25}a_{45}a_{56}a_{58}}}\cdot\dfrac{05\cdot(5)'_{v_\alpha}}{0\cdot 9}=-\sqrt[4]{\dfrac{a_{15}a_{35}a_{57}}{a_{05}a_{25}a_{45}a_{56}a_{58}}}\cdot\dfrac{(5)'_{v_\alpha}}{9}\\ \qquad=-\sqrt[4]{-\dfrac{P'(a_5)}{Q(a_5)}}\cdot\dfrac{(5)'_{v_\alpha}}{9}\\ \dfrac{\partial u_4}{\partial v_\alpha}=-\sqrt{\dfrac{a_{17}a_{37}a_{57}}{a_{27}a_{47}a_{67}a_{78}}}\cdot\dfrac{07\cdot(7)'_{v_\alpha}}{0\cdot 9}=-\sqrt[4]{\dfrac{a_{17}a_{37}a_{57}}{a_{07}a_{27}a_{47}a_{67}a_{78}}}\cdot\dfrac{(7)'_{v_\alpha}}{9}\\ \qquad=-\sqrt[4]{-\dfrac{P'(a_7)}{Q(a_7)}}\cdot\dfrac{(7)'_{v_\alpha}}{9}\end{cases}$$

(NB. Würde man statt des bei der vorangehenden Rechnung als charakteristisch auftretenden Index 0 irgend einen der anderen geraden Indices 2, 4, 6, 8 gewählt haben, so hätte man in ganz analoger Weise erhalten:

$$\frac{\partial u_1}{\partial v_\alpha}=-\sqrt{\frac{a_{13}a_{15}a_{17}}{a_{01}a_{14}a_{16}a_{18}}}\cdot\frac{12(1)'_{v_\alpha}}{2\cdot 9}=-\sqrt{\frac{a_{13}a_{15}a_{17}}{a_{01}a_{12}a_{16}a_{18}}}\cdot\frac{14(1)'_{v_\alpha}}{4\cdot 9}$$
$$=-\sqrt{\frac{a_{13}a_{15}a_{17}}{a_{01}a_{12}a_{14}a_{18}}}\cdot\frac{16(1)'_{v_\alpha}}{6\cdot 9}=-\sqrt{\frac{a_{13}a_{15}a_{17}}{a_{01}a_{12}a_{14}a_{16}}}\cdot\frac{18(1)'_{v_\alpha}}{8\cdot 9}\quad\text{etc.}$$

Ausdrücke, welche, wie man sich leicht überzeugt, in Folge der Beziehungen (XII) und (XIII) (S. 26, 27) sowohl unter einander als mit dem unter (XXIII) gegebenen identisch sind.)

Es sind hiermit die Coëfficienten des Systems

$$(\mathrm{XXIV})\begin{cases}du_1=\mathsf{A}_1dv_1+\mathsf{B}_1dv_2+\Gamma_1dv_3+\Delta_1dv_4\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ du_4=\mathsf{A}_4dv_4+\mathsf{B}_4dv_2+\Gamma_4dv_3+\Delta_4dv_4\end{cases}$$

bestimmt und folglich auch diejenigen des reciproken Systems

$$(\mathrm{XXV})\begin{cases}dv_1=A_1du_1+B_1du_2+C_1du_3+D_1du_4\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ dv_4=A_4du_1+B_4du_2+C_4du_3+D_4du_4\end{cases}$$

d. h. es sind $dv_1\cdots dv_4$ als hyperelliptische Differentiale der

$$x_1\cdots x_4,\ \sqrt{R(x_1)}\cdots\sqrt{R(x_4)}$$

dargestellt. — Die als Nenner der Coëfficienten $A_\alpha\cdots D_\alpha$ auftretende Functionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} (1)'_{v_1} & (1)'_{v_2} & (1)'_{v_3} & (1)'_{v_4} \\ (3)'_{v_1} & (3)'_{v_2} & (3)'_{v_3} & (3)'_{v_4} \\ (5)'_{v_1} & (5)'_{v_2} & (5)'_{v_3} & (5)'_{v_4} \\ (7)'_{v_1} & (7)'_{v_2} & (7)'_{v_3} & (7)'_{v_4} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial \vartheta_1(v_1 \cdots)}{\partial v_1}\right)_{v_1 \ldots v_4 = 0} & \cdots\cdots & \left(\frac{\partial \vartheta_1(v_1 \cdots)}{\partial v_4}\right)_{v_1 \ldots v_4 = 0} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \left(\frac{\partial \vartheta_7(v_1 \cdots)}{\partial v_1}\right)_{v_1 \ldots v_4 = 0} & \cdots\cdots & \left(\frac{\partial \vartheta_7(v_1 \cdots)}{\partial v_1}\right)_{v_1 \ldots v_4 = 0} \end{vmatrix} = \Delta(1, 3, 5, 7).$$

lässt sich durch ein Product gerader ϑ-Functionen mit Nullargumenten darstellen, nämlich

$$\Delta(1, 3, 5, 7) = \pi^4 \cdot \vartheta_9 \vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_4 \vartheta_6 \vartheta_8$$

und es existiren ähnliche Beziehungen für alle möglichen Determinanten von der Form $\Delta(s_1, s_2, s_3, s_4)$ — wenn $s_1 \cdots s_4$ irgend 4 Indices ungerader ϑ-Functionen bezeichnen. —

Nachdem nun gezeigt, dass zwischen $du_1 \cdots du_4$ und $dv_1 \cdots dv_4$ lineare homogene Relationen mit constanten Coefficienten bestehen, lassen sich diese Coefficienten auch noch in der von Herrn Weierstrass gegebenen Form, durch die sog. reellen Periodicitätsmoduln der Functionen $f_\alpha(v_1 \cdots v_4)$ ausdrücken. Man hat dann nur die Gleichungen (XXIV), nachdem man für $du_1 \cdots du_4$ die hyperelliptischen Differentialausdrücke (XVIII) eingesetzt hat, für entsprechende Werthsysteme von $(v_1 \cdots v_4)$ und $(x_1 \cdots x_4)$ zu integriren — wobei hinsichtlich der Integrationswege und des Vorzeichens von $\sqrt{R(x)}$ die Bestimmungen maassgebend sind, welche Herr Weierstrass in seiner Abhandlung über Abel'sche Functionen — Crelle's Journal, Bd. 47, § 5 — gegeben hat.

Man erhält durch Integration der Gleichungen (XXIV) von dem Werthsystem

$$(v_1, v_2, v_3, v_4) = (0, 0, 0, 0) \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) = (a_1, a_3, a_5, a_7)$$

(welches wie unmittelbar ersichtlich den Bedingungen (XVI) genügt) bis zu je einem der folgenden 4 Werthsysteme:

$$\begin{aligned} (v_1, v_2, v_3, v_4) &= (\tfrac{1}{2}, 0, 0, 0) & (x_1, x_2, x_3, x_4) &= (a_2, a_3, a_5, a_7) \\ &\ (0, \tfrac{1}{2}, 0, 0) & &\ (a_1, a_4, a_5, a_7) \\ &\ (0, 0, \tfrac{1}{2}, 0) & &\ (a_1, a_3, a_6, a_7) \\ &\ (0, 0, 0, \tfrac{1}{2}) & &\ (a_1, a_3, a_5, a_8) \end{aligned}$$

(welche wiederum die Beziehungen (XVI) befriedigen) — wenn

$$\text{(XXVI)} \qquad \int\limits_{a_{2\mathfrak{b}-1}}^{a_{2\mathfrak{b}}} \frac{1}{2} \cdot \frac{P(x)}{x - a_{2\mathfrak{a}-1}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$$

gesetzt wird, die vier Gleichungen

$$K_{\mathfrak{a},1} = \tfrac{1}{2}\mathsf{A}_{\mathfrak{a}} \quad K_{\mathfrak{a},2} = \tfrac{1}{2}\mathsf{B}_{\mathfrak{a}} \quad K_{\mathfrak{a},3} = \tfrac{1}{2}\Gamma_{\mathfrak{a}} \quad K_{\mathfrak{a},4} = \tfrac{1}{2}\Delta_{\mathfrak{a}}$$

und somit

$$\text{(XXVII)} \left\{ \begin{array}{l} du_1 = 2K_{11}\, dv_1 + 2K_{12}\, dv_2 + 2K_{13}\, dv_3 + 2K_{14}\, dv_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ du_4 = 2K_{41}\, dv_1 + 2K_{42}\, dv_2 + 2K_{43}\, dv_3 + 2K_{44}\, dv_4 \end{array} \right.$$

woraus wiederum

$$\text{(XXVIII)} \left\{ \begin{array}{l} dv_1 = G_{11}\, du_1 + G_{21}\, du_2 + G_{31}\, du_3 + G_{41}\, du_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ dv_4 = G_{14}\, du_1 + G_{24}\, du_2 + G_{34}\, du_3 + G_{44}\, du_4 \end{array} \right.$$

wenn $G_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ die Quotienten der Determinante

$$\left| \begin{array}{l} 2K_{11}\ 2K_{12}\ 2K_{13}\ 2K_{14} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 2K_{41} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 2K_{44} \end{array} \right| = D$$

in deren Unterdeterminanten bezeichnen.

Die Vergleichung der Coefficienten in Gl. (XXVII) mit den vorher gefundenen liefert Beziehungen von der Form

$$\text{(XXIX)} \quad 2K_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = -\sqrt[4]{\frac{-P'(a_{2\mathfrak{a}-1})}{Q(a_{2\mathfrak{a}-1})}} \cdot \frac{\left(\dfrac{\partial \vartheta_{2\mathfrak{a}-1}(v_1 \cdots v_4)}{\partial v_{\mathfrak{b}}}\right)_{v_1 \ldots v_4 = 0}}{\vartheta_9}$$

welche der aus der Theorie der elliptischen Functionen bekannten Relation

$$2K = 2\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \cdot \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_0}$$

entsprechen. Ferner ergiebt sich

$$D = \begin{vmatrix} 2K_{11} \cdots 2K_{14} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 2K_{41} \cdots 2K_{44} \end{vmatrix} = \sqrt[4]{\frac{P'(a_1)P'(a_3)P'(a_5)P'(a_7)}{Q(a_1)\,Q(a_3)\,Q(a_5)\,Q(a_7)}} \cdot \frac{\Delta(1,3,5,7)}{\vartheta_9^4}$$

$$= \sqrt[4]{\frac{P'(a_1)P'(a_3)P'(a_5)P'(a_7)}{Q(a_1)\,Q(a_3)\,Q(a_5)\,Q(a_7)}} \cdot \pi^4 \cdot \frac{\vartheta_0}{\vartheta_9} \cdot \frac{\vartheta_2}{\vartheta_9} \cdot \frac{\vartheta_4}{\vartheta_9} \cdot \frac{\vartheta_6}{\vartheta_9} \cdot \frac{\vartheta_8}{\vartheta_9} \cdot \vartheta_9^2$$

$$= \sqrt[4]{\frac{P'(a_1)\,P'(a_3)\,P'(a_5)\,P'(a_7)}{Q'(a_0)\,Q'(a_2)\,Q'(a_4)\,Q'(a_6)\,Q'(a_8)}} \cdot \pi^4 \cdot \vartheta_9^2$$

woraus

$$\text{(XXX)} \qquad \vartheta_9 = \frac{1}{\pi^2}\sqrt{M \cdot D} \quad \text{wo } M = \sqrt[4]{\frac{Q'(a_0)\cdots\cdot Q'(a_8)}{P'(a_1)\cdots\cdot P'(a_7)}}$$

und da sich in Folge der Beziehungen (XII) (XIII) (XIV) jede für die Nullwerthe der Argumente nicht verschwindende ϑ-Function in die Form setzen lässt

$\vartheta_\alpha = \sqrt[4]{\varphi(a_0, a_1, \cdots a_8)} \cdot \vartheta_9$ — (wo φ eine rationale Function von $a_0 \cdots a_8$) so erhält man auch für alle diese Theta's Ausdrücke, welche demjenigen in Nr. (XXX) analog sind — entsprechend den drei Beziehungen, welche in der Theorie der elliptischen Functionen folgendermassen lauten:

$$\vartheta_3 = \sqrt{\frac{2K}{\pi}} \quad \vartheta_0 = \sqrt{\frac{2\varkappa K}{\pi}} \quad \vartheta_2 = \sqrt{\frac{2\varkappa_1 K}{\pi}}.$$

Ferner kann man nun auch noch die ϑ-Moduln durch die Periodicitätsmoduln ausdrücken, indem man die Gleichungen (XXVIII) von dem Werthe-Systeme

$$(v_1, v_2, v_3, v_4) = (0, 0, 0, 0) \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) = (a_1, a_3, a_5, a_7)$$

bis zu je einem der folgenden vier — nach Nr. (XVI) wiederum einander entsprechenden — Werthesysteme:

$$(v_1, v_2, v_3, v_4)$$

$$\begin{aligned}
&= (-\tfrac{1}{2}\tau_{11}, \quad -\tfrac{1}{2}\tau_{21}, \quad -\tfrac{1}{2}\tau_{31}, \quad -\tfrac{1}{2}\tau_{41}) && (x_1,x_2,x_3,x_4) = (a_0,a_3,a_5,a_7) \\
&(\tfrac{1}{2}\tau_{11} - \tfrac{1}{2}\tau_{12}, \tfrac{1}{2}\tau_{21} - \tfrac{1}{2}\tau_{22}, \tfrac{1}{2}\tau_{31} - \tfrac{1}{2}\tau_{32}, \tfrac{1}{2}\tau_{41} - \tfrac{1}{2}\tau_{42}) && (a_1,a_2,a_5,a_7) \\
&(\tfrac{1}{2}\tau_{12} - \tfrac{1}{2}\tau_{13}, \tfrac{1}{2}\tau_{22} - \tfrac{1}{2}\tau_{23}, \tfrac{1}{2}\tau_{32} - \tfrac{1}{2}\tau_{33}, \tfrac{1}{2}\tau_{42} - \tfrac{1}{2}\tau_{43}) && (a_1,a_3,a_4,a_7) \\
&(\tfrac{1}{2}\tau_{13} - \tfrac{1}{2}\tau_{14}, \tfrac{1}{2}\tau_{23} - \tfrac{1}{2}\tau_{24}, \tfrac{1}{2}\tau_{33} - \tfrac{1}{2}\tau_{34}, \tfrac{1}{2}\tau_{43} - \tfrac{1}{2}\tau_{44}) && (a_1,a_3,a_5,a_6)
\end{aligned}$$

integrirt, wobei wiederum hinsichtlich der Integrationswege und Wurzelbestimmungen das oben Bemerkte gilt. Setzt man hierbei

$$\text{(XXXI)} \qquad \int_{a_{2\mathfrak{b}-2}}^{a_{2\mathfrak{b}-1}} \frac{1}{2} \cdot \frac{P(x)}{x - a_{2\mathfrak{a}-1}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = i\overline{K}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$$

so ergeben sich die Gleichungen:

$$\tfrac{1}{2}\tau_{1\mathfrak{a}} = iG_{1\mathfrak{a}}\overline{K}_{11} + iG_{2\mathfrak{a}}\overline{K}_{21} + iG_{3\mathfrak{a}}\overline{K}_{31} + iG_{4\mathfrak{a}}\overline{K}_{41}$$

$$-\tfrac{1}{2}\tau_{\mathfrak{a}1} + \tfrac{1}{2}\tau_{\mathfrak{a}2} = iG_{1\mathfrak{a}}\overline{K}_{12} + iG_{2\mathfrak{a}}\overline{K}_{22} + iG_{3\mathfrak{a}}\overline{K}_{32} + iG_{4\mathfrak{a}}\overline{K}_{42}$$

$$-\tfrac{1}{2}\tau_{\mathfrak{a}2} + \tfrac{1}{2}\tau_{\mathfrak{a}3} = iG_{1\mathfrak{a}}\overline{K}_{13} + iG_{2\mathfrak{a}}\overline{K}_{23} + iG_{3\mathfrak{a}}\overline{K}_{33} + iG_{4\mathfrak{a}}\overline{K}_{43}$$

$$-\tfrac{1}{2}\tau_{\mathfrak{a}3} + \tfrac{1}{2}\tau_{\mathfrak{a}4} = iG_{1\mathfrak{a}}\overline{K}_{14} + iG_{2\mathfrak{a}}\overline{K}_{24} + iG_{3\mathfrak{a}}\overline{K}_{34} + iG_{4\mathfrak{a}}\overline{K}_{44}$$

woraus, wenn noch

(XXXII) $$\sum_{1}^{\mathfrak{b}}{}_{\nu}\,\overline{K}_{\mathfrak{a},\nu} = K'_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$$

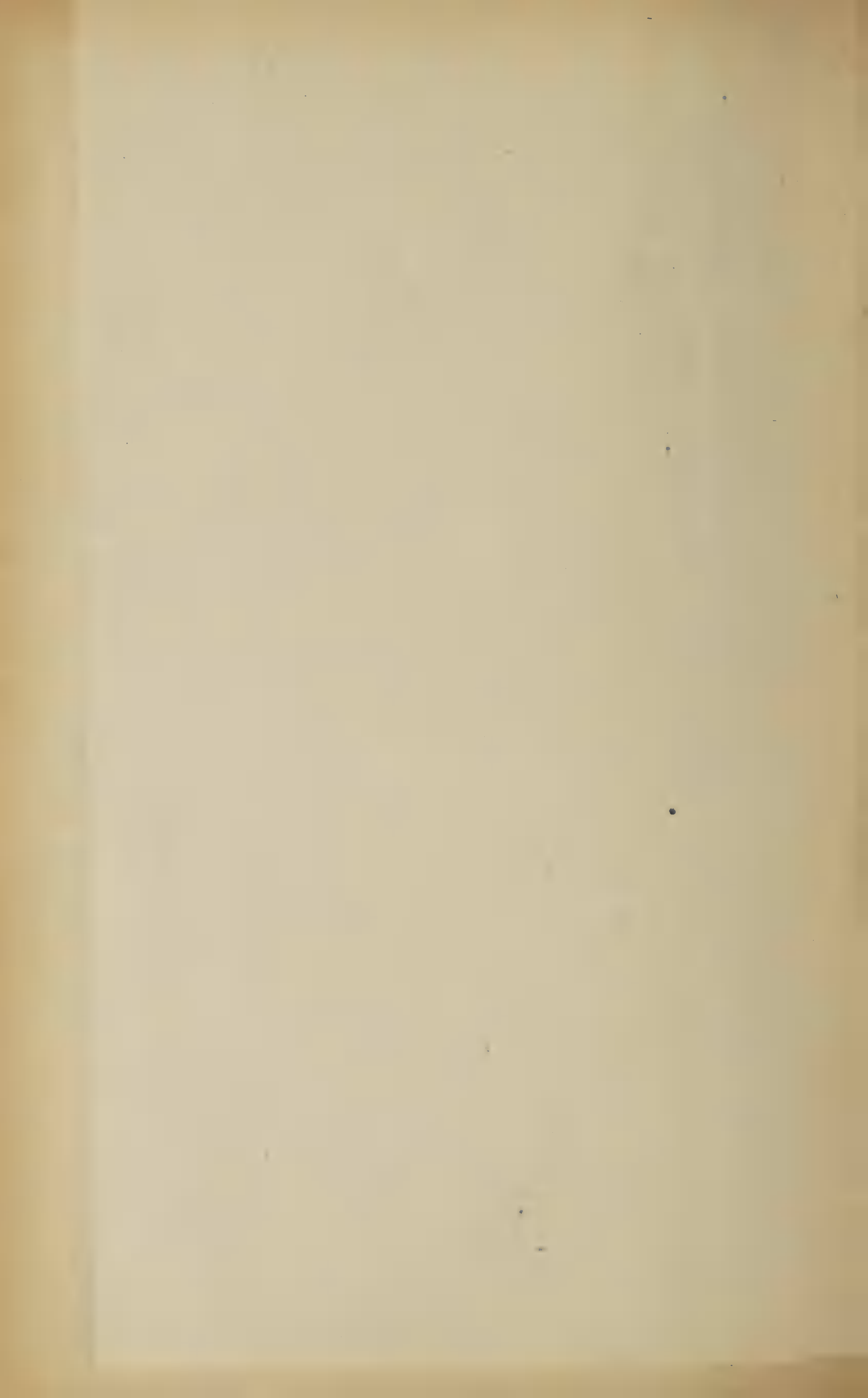
gesetzt wird, folgt:

(XXXIII) $$\tau_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = 2iG_{1\mathfrak{a}}K'_{1\mathfrak{b}} + 2iG_{2\mathfrak{a}}K'_{2\mathfrak{b}} + 2iG_{3\mathfrak{a}}K'_{3\mathfrak{b}} + 2iG_{4\mathfrak{a}}K'_{4\mathfrak{b}}$$

ein Ausdruck, welcher in Folge der Identität $\tau_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \tau_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}}$ die bekannten Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln liefert. —

Schliesslich kann man auch noch die oben gemachte Einschränkung, dass die ϑ-Moduln sämmtlich rein imaginär, also die Grössen $a_0, \ldots a_9$ reell sein sollen, fallen lassen — in derselben Weise wie dies durch Herrn Weierstrass in seiner zweiten Abhandlung über Abel'sche Functionen (Crelle's Journal, Bd. 52) geschehen ist. —

Berlin, im März 1877.



$$\frac{a_{78}}{a_{68}} = \frac{8^2\cdot 67^2}{9^2\cdot 678^2} \qquad \frac{a_{67}}{a_{68}} = \frac{6^2\cdot}{9^2\cdot}$$

$$\frac{a_{78}}{a_{28}} = \frac{8^2\cdot 27^2}{9^2\cdot 278^2} \qquad \frac{a_{27}}{a_{28}} = \frac{2^2}{9^2\cdot}$$

$$\frac{a_{58}}{a_{68}} = \frac{8^2\cdot 56^2}{9^2\cdot 568^2} \qquad \frac{a_{56}}{a_{68}} = \frac{6^2}{9^2\cdot}$$

$$\frac{a_{18}}{a_{68}} = \frac{8^2\cdot 16^2}{9^2\cdot 168^2} \qquad \frac{a_{16}}{a_{68}} = \frac{6^2}{9^2\cdot}$$

$$\frac{a_{58}}{a_{28}} = \frac{8^2\cdot 25^3}{9^2\cdot 258^2} \text{ (IX, 2)} \qquad \frac{a_{25}}{a_{28}} = \frac{2^2}{9^2\cdot}$$

$$\frac{a_{38}}{a_{78}} = \frac{8^2\cdot 34^2}{9^2 . 348^2} \text{ (IX, 4)} \qquad \frac{a_{34}}{a_{48}} = \frac{4^2}{9^2\cdot}$$

$$\frac{a_{38}}{a_{28}} = \frac{8^2\cdot 23^2}{9^2\cdot 238^2} \text{ (IX, 5)} \qquad \frac{a_{23}}{a_{28}} = \frac{2^2}{9^2\cdot}$$

$$\frac{a_{18}}{a_{28}} = \frac{8^2\cdot 12^2}{9^2\cdot 128^2} \text{ (IX, 8)} \qquad \frac{a_{12}}{a_{28}} = \frac{2^2}{9^2\cdot}$$

$$\frac{a_{67}}{a_{46}} = \frac{6^2\cdot 47^2}{9^2\cdot 467^2} \text{ (VII 1, 2, 17)} \qquad \frac{a_{47}}{a_{46}} = \frac{4^2}{9^2\cdot}$$

$$\frac{a_{67}}{a_{06}} = \frac{6^2\cdot 07^2}{9^2\cdot 067^2} \text{ (VII, 1, 4, 19)} \qquad \frac{a_{07}}{a_{06}} = \frac{0^2}{9^2}$$

$$\frac{a_{47}}{a_{04}} = \frac{4^2\cdot 07^2}{9^2\cdot 047^2} \text{ (VII, 2, 4, 21)} \qquad \frac{a_{07}}{a_{04}} = \frac{0^2}{0^2\cdot}$$

$$\frac{a_{56}}{a_{46}} = \frac{6^2\cdot 45^2}{9^2\cdot 456^2} \begin{pmatrix}\text{VII, 1, 2, 17}\\ \text{IX, 10}\end{pmatrix} \frac{a_{45}}{a_{46}} = \frac{4^2\cdot}{9^2\cdot}$$

$$\frac{a_{56}}{a_{06}} = \frac{6^2\cdot 05^2}{9^2\cdot 056^2} \begin{pmatrix}\text{VII, 1, 4, 19}\\ \text{IX, 12}\end{pmatrix} \frac{a_{05}}{a_{06}} = \frac{0^2\cdot}{9^2\cdot}$$

$$\frac{a_{16}}{a_{46}} = \frac{6^2\cdot 14^2}{9^2\cdot 146^2} \begin{pmatrix}\text{VII, 1, 2, 17}\\ \text{IX, 14}\end{pmatrix} \frac{a_{14}}{a_{46}} = \frac{4^2\cdot}{9^2\cdot}$$

$$\frac{a_{36}}{a_{06}} = \frac{6^2\cdot 03^2}{9^2\cdot 036^2} \begin{pmatrix}\text{VII, 1, 4, 19}\\ \text{IX, 16}\end{pmatrix} \frac{a_{03}}{a_{06}} = \frac{0^2\cdot}{9^2\cdot}$$

$$\frac{a_{16}}{a_{06}} = \frac{6^2\cdot 01^2}{9^2\cdot 016^2} \begin{pmatrix}\text{VII, 1, 4, 19}\\ \text{IX, 18}\end{pmatrix} \frac{a_{01}}{a_{06}} = \frac{0^2}{9^2\cdot}$$

$$\frac{a_{45}}{a_{04}} = \frac{4^2\cdot 05^2}{9^2\cdot 045^2} \begin{pmatrix}\text{VII, 2, 4, 21}\\ \text{IX, 20}\end{pmatrix} \frac{a_{05}}{a_{04}} = \frac{0^2}{9^2\cdot}$$

$$\text{(XI)} \quad \frac{a_{34}}{a_{24}} = \frac{4^2\cdot 23^2}{9^2\cdot 234^2} \begin{pmatrix}\text{VII, 2, 3, 20}\\ \text{IX, 21}\end{pmatrix} \frac{a_{23}}{a_{24}} = \frac{2^2\cdot}{9^2\cdot}$$

$$\frac{a_{14}}{a_{24}} = \frac{4^2\cdot 12^2}{9^2\cdot 124^2} \begin{pmatrix}\text{VII, 2, 3, 20}\\ \text{IX, 23}\end{pmatrix} \frac{a_{12}}{a_{24}} = \frac{2^2\cdot}{9^2\cdot}$$

$$\frac{a_{23}}{a_{02}} = \frac{2^2\cdot 03^2}{9^2\cdot 023^2} \begin{pmatrix}\text{VII, 3, 4, 22}\\ \text{IX, 26}\end{pmatrix} \frac{a_{03}}{a_{02}} = \frac{0^2\cdot}{9^2\cdot}$$

$$\frac{a_{78}}{a_{67}} = \frac{67^2\cdot 568^2}{6^2\cdot 5678^2} \qquad \frac{a_{58}}{a_{57}} = \frac{56^2\cdot}{6^2\cdot}$$

$$\frac{a_{78}}{a_{17}} = \frac{67^2\cdot 168^2}{6^2\cdot 1678^2} \qquad \frac{a_{18}}{a_{17}} = \frac{16^2\cdot}{6^2\cdot}$$

$$\frac{a_{58}}{a_{15}} = \frac{56^2\cdot 168^2}{6^2\cdot 1568^2} \text{ (VIII, 27)} \qquad \frac{a_{18}}{a_{15}} = \frac{16^2}{6^2\cdot}$$

$$a_{62} = 78^2\cdot 568^2 \qquad a_{56} = 58^2\cdot$$

(VIII) | (VIII a)

	$\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3\ \varepsilon_4\ \delta\ \varkappa$		(VIII)	(VIII a)
(1)	0 2 4 7 8 56	—	$56^2\cdot678^2 = 67^2\cdot568^2 + 6^2\cdot5678^2$	$9^2\cdot5678^2 = 56^2\cdot78^2 + 58^2\cdot67^2$ (1)
(2)	0 2 4 7 6 58	—	$58^2\cdot678^2 = -78^2\cdot568^2 + 8^2\cdot5678^2$	
(3)	0 2 4 7 8 36	—	$36^2\cdot678^2 = 67^2\cdot368^2 + 6^2\cdot3678^2$	$9^2\cdot3678^2 = 36^2\cdot78^2 + 38^2\cdot67^2$ (2)
(4)	0 2 4 7 6 38	—	$38^2\cdot678^2 = -78^2\cdot368^2 + 8^2\cdot3678^2$	
(5)	0 2 4 7 8 16	—	$16^2\cdot678^2 = 67^2\cdot168^2 + 6^2\cdot1678^2$	$9^2\cdot1678^2 = 16^2\cdot78^2 + 18^2\cdot67^2$ (3)
(6)	0 2 4 7 6 18	—	$18^2\cdot678^2 = -78^2\cdot168^2 + 8^2\cdot1678^2$	
(7)	0 2 6 7 8 45	—	$45^2\cdot478^2 = 47^2\cdot458^2 + 4^2\cdot4578^2$	$9^2\cdot4578^2 = 45^2\cdot78^2 - 58^2\cdot47^2$ (4)
(8)	0 2 6 7 4 58	—	$58^2\cdot478^2 = 78^2\cdot458^2 - 8^2\cdot4578^2$	
(9)	0 4 6 7 8 25	—	$25^2\cdot278^2 = 27^2\cdot258^2 + 2^2\cdot2578^2$	$9^2\cdot2578^2 = 25^2\cdot78^2 - 58^2\cdot27^2$ (5)
(10)	0 4 6 7 2 58	—	$58^2\cdot278^2 = 78^2\cdot258^2 - 8^2\cdot2578^2$	
(11)	2 4 6 7 8 05	—	$05^2\cdot078^2 = 07^2\cdot058^2 + 0^2\cdot0578^2$	$9^2\cdot0578^2 = 05^2\cdot78^2 - 58^2\cdot07^2$ (6)
(12)	2 4 6 7 0 58	—	$58^2\cdot078^2 = 78^2\cdot058^2 - 8^2\cdot0578^2$	
(13)	0 2 6 7 8 34	—	$34^2\cdot478^2 = 47^2\cdot348^2 + 4^2\cdot3478^2$	$9^2\cdot3478^2 = 34^2\cdot78^2 + 38^2\cdot47^2$ (7)
(14)	0 2 6 7 4 38	—	$38^2\cdot478^2 = -78^2\cdot348^2 + 8^2\cdot3478^2$	
(15)	0 2 6 7 8 14	—	$14^2\cdot478^2 = 47^2\cdot148^2 + 4^2\cdot1478^2$	$9^2\cdot1478^2 = 14^2\cdot78^2 + 18^2\cdot47^2$ (8)
(16)	0 2 6 7 4 18	—	$18^2\cdot478^2 = -78^2\cdot148^2 + 8^2\cdot1478^2$	
(17)	0 4 6 7 8 23	—	$23^2\cdot278^2 = 27^2\cdot238^2 + 2^2\cdot2378^2$	$9^2\cdot2378^2 = 23^2\cdot78^2 - 38^2\cdot27^2$ (9)
(18)	0 4 6 7 2 38	—	$38^2\cdot278^2 = 78^2\cdot238^2 - 8^2\cdot2378^2$	
(19)	2 4 6 7 8 03	—	$03^2\cdot078^2 = 07^2\cdot038^2 + 0^2\cdot0378^2$	$9^2\cdot0378^2 = 03^2\cdot78^2 - 38^2\cdot07^2$ (10)
(20)	2 4 6 7 0 38	—	$38^2\cdot078^2 = 78^2\cdot038^2 - 8^2\cdot0378^2$	
(21)	0 4 6 7 8 12	—	$12^2\cdot278^2 = 27^2\cdot128^2 + 2^2\cdot1278^2$	$9^2\cdot1278^2 = 12^2\cdot78^2 + 18^2\cdot27^2$ (11)
(22)	0 4 6 7 2 18	—	$18^2\cdot278^2 = -78^2\cdot128^2 + 8^2\cdot1278^2$	
(23)	2 4 6 7 8 01	—	$01^2\cdot078^2 = 07^2\cdot018^2 + 0^2\cdot0178^2$	$9^2\cdot0178^2 = 01^2\cdot78^2 - 18^2\cdot07^2$ (12)
(24)	2 4 6 7 0 18	—	$18^2\cdot078^2 = 78^2\cdot018^2 - 8^2\cdot0178^2$	
(25)	0 2 4 5 8 36	—	$36^2\cdot568^2 = 56^2\cdot368^2 + 6^2\cdot3568^2$	$9^2\cdot3568^2 = 38^2\cdot56^2 - 36^2\cdot58^2$ (13)
(26)	0 2 4 5 6 38	—	$38^2\cdot568^2 = 58^2\cdot368^2 + 8^2\cdot3568^2$	
(27)	0 2 4 5 8 16	—	$16^2\cdot568^2 = 56^2\cdot168^2 + 6^2\cdot1568^2$	$9^2\cdot1568^2 = 18^2\cdot56^2 - 16^2\cdot58^2$ (14)
(28)	0 2 4 5 6 18	—	$18^2\cdot568^2 = 58^2\cdot168^2 + 8^2\cdot1568^2$	
(29)	0 2 4 3 8 16	—	$16^2\cdot368^2 = 36^2\cdot168^2 + 6^2\cdot1368^2$	$9^2\cdot1368^2 = 18^2\cdot36^2 - 16^2\cdot38^2$ (15)
(30)	0 2 4 3 6 18	—	$18^2\cdot368^2 = 38^2\cdot168^2 + 8^2\cdot1368^2$	
(31)	0 2 6 5 8 34	—	$34^2\cdot458^2 = 45^2\cdot348^2 + 4^2\cdot3458^2$	$9^2\cdot3458^2 = 34^2\cdot58^2 + 38^2\cdot45^2$ (16)
(32)	0 2 6 5 4 38	—	$38^2\cdot458^2 = -58^2\cdot348^2 + 8^2\cdot3458^2$	
(33)	0 2 6 5 8 14	—	$14^2\cdot458^2 = 45^2\cdot148^2 + 4^2\cdot1458^2$	$9^2\cdot1458^2 = 14^2\cdot58^2 + 18^2\cdot45^2$ (17)
(34)	0 2 6 5 4 18	—	$18^2\cdot458^2 = -58^2\cdot148^2 + 8^2\cdot1458^2$	
(35)	0 4 6 5 8 23	—	$23^2\cdot258^2 = 25^2\cdot238^2 + 2^2\cdot2358^2$	$9^2\cdot2358^2 = 23^2\cdot58^2 - 38^2\cdot25^2$ (18)
(36)	0 4 6 5 2 38	—	$38^2\cdot258^2 = 58^2\cdot238^2 - 8^2\cdot2358^2$	
(37)	2 4 6 5 8 03	—	$03^2\cdot058^2 = 05^2\cdot038^2 + 0^2\cdot0358^2$	$9^2\cdot0358^2 = 03^2\cdot58^2 - 38^2\cdot05^2$ (19)
(38)	2 4 6 5 0 38	—	$38^2\cdot058^2 = 58^2\cdot038^2 - 8^2\cdot0358^2$	
(39)	0 4 6 5 8 12	—	$12^2\cdot258^2 = 25^2\cdot128^2 + 2^2\cdot1258^2$	$9^2\cdot1258^2 = 12^2\cdot58^2 + 18^2\cdot25^2$ (20)
(40)	0 4 6 5 2 18	—	$18^2\cdot258^2 = -58^2\cdot128^2 + 8^2\cdot1258^2$	
(41)	2 4 6 5 8 01	—	$01^2\cdot058^2 = 05^2\cdot018^2 + 0^2\cdot0158^2$	$9^2\cdot0158^2 = 01^2\cdot58^2 - 18^2\cdot05^2$ (21)
(42)	2 4 6 5 0 18	—	$18^2\cdot058^2 = 58^2\cdot018^2 - 8^2\cdot0158^2$	
(43)	0 2 6 3 8 14	—	$14^2\cdot348^2 = 34^2\cdot148^2 + 4^2\cdot1348^2$	$9^2\cdot1348^2 = 18^2\cdot34^2 - 38^2\cdot14^2$ (22)
(44)	0 2 6 3 4 18	—	$18^2\cdot348^2 = 38^2\cdot148^2 + 8^2\cdot1348^2$	
(45)	0 4 6 3 8 12	—	$12^2\cdot238^2 = 23^2\cdot128^2 + 2^2\cdot1238^2$	$9^2\cdot1238^2 = 12^2\cdot38^2 + 18^2\cdot23^2$ (23)
(46)	0 4 6 3 2 18	—	$18^2\cdot238^2 = -38^2\cdot128^2 + 8^2\cdot1238^2$	
(47)	2 4 6 3 8 01	—	$01^2\cdot038^2 = 03^2\cdot018^2 + 0^2\cdot0138^2$	$9^2\cdot0138^2 = 01^2\cdot38^2 - 03^2\cdot18^2$ (24)
(48)	2 4 6 3 0 18	—	$18^2\cdot038^2 = 38^2\cdot018^2 - 8^2\cdot0138^2$	

Pringsheim.

$$
\text{(XI)}\left\{\begin{array}{llll}
\frac{a_{78}}{a_{68}}=\frac{8^2\cdot 67^2}{9^2\cdot 678^2} & \frac{a_{67}}{a_{68}}=\frac{6^2\cdot 78^2}{9^2\cdot 678^2}\ (\text{VII, 1}) & \frac{a_{78}}{a_{48}}=\frac{8^2\cdot 47^2}{9^2\cdot 478^2} & \frac{a_{47}}{a_{48}}=\frac{4^2\cdot 78^2}{9^2\cdot 478^2}\ (\text{VII, 2}) \\
\frac{a_{78}}{a_{28}}=\frac{8^2\cdot 27^2}{9^2\cdot 278^2} & \frac{a_{27}}{a_{28}}=\frac{2^2\cdot 78^2}{9^2\cdot 278^2}\ (\text{VII, 3}) & \frac{a_{78}}{a_{08}}=\frac{8^2\cdot 07^2}{9^2\cdot 078^2} & \frac{a_{07}}{a_{08}}=\frac{0\cdot 78^2}{9^2\cdot 078^2}\ (\text{VII, 4}) \\
\frac{a_{58}}{a_{68}}=\frac{8^2\cdot 56^2}{9^2\cdot 568^2} & \frac{a_{56}}{a_{68}}=\frac{6^2\cdot 58^2}{9^2\cdot 568^2}\ (\text{VII, 5}) & \frac{a_{38}}{a_{68}}=\frac{8^2\cdot 36^2}{9^2\cdot 368^2} & \frac{a_{36}}{a_{68}}=\frac{6^2\cdot 38^2}{9^2\cdot 368^2}\ (\text{VII, 6}) \\
\frac{a_{18}}{a_{68}}=\frac{8^2\cdot 16^2}{9^2\cdot 168^2} & \frac{a_{16}}{a_{68}}=\frac{6^2\cdot 18^2}{9^2\cdot 168^2}\ (\text{VII, 7}) & \frac{a_{58}}{a_{48}}=\frac{8^2\cdot 45^2}{9^2\cdot 458^2}\ (\text{IX, 1}) & \frac{a_{45}}{a_{48}}=\frac{4^2\cdot 58^2}{9^2\cdot 458^2}\ (\text{VII, 8}) \\
\frac{a_{58}}{a_{28}}=\frac{8^2\cdot 25^3}{9^2\cdot 258^2}\ (\text{IX, 2}) & \frac{a_{25}}{a_{28}}=\frac{2^2\cdot 58^2}{9^2\cdot 258^2}\ (\text{VII, 9}) & \frac{a_{58}}{a_{08}}=\frac{8^2\cdot 05^2}{9^2\cdot 058^2}\ (\text{IX, 3}) & \frac{a_{05}}{a_{08}}=\frac{0^2\cdot 58^2}{9^2\cdot 058^2}\ (\text{VII, 10}) \\
\frac{a_{38}}{a_{78}}=\frac{8^2\cdot 34^2}{9^2.348^2}\ (\text{IX, 4}) & \frac{a_{34}}{a_{48}}=\frac{4^2\cdot 38^2}{9^2\cdot 348^2}\ (\text{VII, 11}) & \frac{a_{18}}{a_{48}}=\frac{8^2\cdot 14^2}{9^2\cdot 148^2}\ (\text{IX, 7}) & \frac{a_{14}}{a_{48}}=\frac{4^2\cdot 18^2}{9^2\cdot 148^2}\ (\text{VII, 12}) \\
\frac{a_{38}}{a_{28}}=\frac{8^2\cdot 23^2}{9^2\cdot 238^2}\ (\text{IX, 5}) & \frac{a_{23}}{a_{28}}=\frac{2^2\cdot 38^2}{9^2\cdot 238^2}\ (\text{VII, 13}) & \frac{a_{38}}{a_{08}}=\frac{8^2\cdot 03^2}{9^2\cdot 038^2}\ (\text{IX, 6}) & \frac{a_{03}}{a_{08}}=\frac{0^2\cdot 38^2}{9^2\cdot 038^2}\ (\text{VII, 14}) \\
\frac{a_{18}}{a_{28}}=\frac{8^2\cdot 12^2}{9^2\cdot 128^2}\ (\text{IX, 8}) & \frac{a_{12}}{a_{28}}=\frac{2^2\cdot 18^2}{9^2\cdot 128^2}\ (\text{VII, 15}) & \frac{a_{18}}{a_{08}}=\frac{8^2\cdot 01^2}{9^2\cdot 018^2}\ (\text{IX, 9}) & \frac{a_{01}}{a_{08}}=\frac{0^2\cdot 18^2}{9^2\cdot 018^2}\ (\text{VII, 16}) \\
\frac{a_{67}}{a_{46}}=\frac{6^2\cdot 47^2}{9^2\cdot 467^2}\ (\text{VII 1, 2, 17}) & \frac{a_{47}}{a_{46}}=\frac{4^2\cdot 67^2}{9^2\cdot 467^2}\ (\text{VII, 17}) & \frac{a_{67}}{a_{26}}=\frac{6^2\cdot 27^2}{9^2\cdot 267^2}\ (\text{VII, 1, 3, 18}) & \frac{a_{27}}{a_{26}}=\frac{2^2\cdot 67^2}{9^2\cdot 267^2}\ (\text{VII, 18}) \\
\frac{a_{67}}{a_{06}}=\frac{6^2\cdot 07^2}{9^2\cdot 067^2}\ (\text{VII, 1, 4, 19}) & \frac{a_{07}}{a_{06}}=\frac{0^2\cdot 67^2}{9^2\cdot 067^2}\ (\text{VII, 19}) & \frac{a_{47}}{a_{24}}=\frac{4^2\cdot 27^2}{9^2\cdot 247^2}\ (\text{VII, 2, 3, 20}) & \frac{a_{27}}{a_{24}}=\frac{2^2\cdot 47^2}{9^2\cdot 247^2}\ (\text{VII, 20}) \\
\frac{a_{47}}{a_{04}}=\frac{4^2\cdot 07^2}{9^2\cdot 047^2}\ (\text{VII, 2, 4, 21}) & \frac{a_{07}}{a_{04}}=\frac{0^2\cdot 47^2}{0^2\cdot 047^2}\ (\text{VII, 21}) & \frac{a_{27}}{a_{02}}=\frac{2^2\cdot 07^2}{9^2\cdot 027^2}\ (\text{VII, 3, 4, 22}) & \frac{a_{07}}{a_{02}}=\frac{0^2\cdot 27^2}{9^2\cdot 027^2}\ (\text{VII, 22}) \\
\frac{a_{56}}{a_{46}}=\frac{6^2\cdot 45^2}{9^2\cdot 456^2}\begin{pmatrix}\text{VII, 1, 2, 17}\\ \text{IX, 10}\end{pmatrix} & \frac{a_{45}}{a_{46}}=\frac{4^2\cdot 56^2}{9^2\cdot 456^2}\ (\text{VII, 23}) & \frac{a_{56}}{a_{26}}=\frac{6^2\cdot 25^2}{9^2\cdot 256^2}\begin{pmatrix}\text{VII, 1, 3, 18}\\ \text{IX, 11}\end{pmatrix} & \frac{a_{25}}{a_{26}}=\frac{2^2\cdot 56^2}{9^2\cdot 256^2}\ (\text{VII, 24}) \\
\frac{a_{56}}{a_{06}}=\frac{6^2\cdot 05^2}{9^2\cdot 056^2}\begin{pmatrix}\text{VII, 1, 4, 19}\\ \text{IX, 12}\end{pmatrix} & \frac{a_{05}}{a_{06}}=\frac{0^2\cdot 56^2}{9^2\cdot 056^2}\ (\text{VII, 25}) & \frac{a_{36}}{a_{46}}=\frac{6^2\cdot 34^2}{9^2\cdot 346^2}\begin{pmatrix}\text{VII, 1, 2, 17}\\ \text{IX, 13}\end{pmatrix} & \frac{a_{34}}{a_{46}}=\frac{4^2\cdot 36^2}{9^2\cdot 346^4}\ (\text{VII, 26}) \\
\frac{a_{16}}{a_{46}}=\frac{6^2\cdot 14^2}{9^2\cdot 146^2}\begin{pmatrix}\text{VII, 1, 2, 17}\\ \text{IX, 14}\end{pmatrix} & \frac{a_{14}}{a_{46}}=\frac{4^2\cdot 16^2}{9^2\cdot 146^2}\ (\text{VII, 27}) & \frac{a_{36}}{a_{26}}=\frac{6^2\cdot 23^2}{9^2\cdot 236^2}\begin{pmatrix}\text{VII, 1, 3, 18}\\ \text{IX. 15}\end{pmatrix} & \frac{a_{23}}{a_{26}}=\frac{2^2\cdot 36^2}{9^2\cdot 236^2}\ (\text{VII, 28}) \\
\frac{a_{36}}{a_{06}}=\frac{6^2\cdot 03^2}{9^2\cdot 036^2}\begin{pmatrix}\text{VII, 1, 4, 19}\\ \text{IX, 16}\end{pmatrix} & \frac{a_{03}}{a_{06}}=\frac{0^2\cdot 36^2}{9^2\cdot 036^2}\ (\text{VII, 29}) & \frac{a_{16}}{a_{26}}=\frac{6^2\cdot 12^2}{9^2\cdot 126^2}\begin{pmatrix}\text{VII, 1, 3, 18}\\ \text{IX, 17}\end{pmatrix} & \frac{a_{12}}{a_{26}}=\frac{2^2\cdot 16^2}{9^2\cdot 126^2}\ (\text{VII, 30}) \\
\frac{a_{16}}{a_{06}}=\frac{6^2\cdot 01^2}{9^2\cdot 016^2}\begin{pmatrix}\text{VII, 1, 4, 19}\\ \text{IX, 18}\end{pmatrix} & \frac{a_{01}}{a_{06}}=\frac{0^2\cdot 16^2}{9^2\cdot 016^2}\ (\text{VII, 31}) & \frac{a_{45}}{a_{24}}=\frac{4^2\cdot 25^2}{9^2\cdot 245^2}\begin{pmatrix}\text{VII, 2, 3, 20}\\ \text{IX, 19}\end{pmatrix} & \frac{a_{25}}{a_{24}}=\frac{2^2\cdot 45^3}{9^2\cdot 245^2}\ (\text{VII, 32}) \\
\frac{a_{45}}{a_{04}}=\frac{4^2\cdot 05^2}{9^2\cdot 045^2}\begin{pmatrix}\text{VII, 2, 4, 21}\\ \text{IX, 20}\end{pmatrix} & \frac{a_{05}}{a_{04}}=\frac{0^2\cdot 45^2}{9^2\cdot 045^2}\ (\text{VII, 33}) & \frac{a_{25}}{a_{02}}=\frac{2^2\cdot 05^2}{9^2\cdot 025^2}\begin{pmatrix}\text{VII, 3, 4, 22}\\ \text{IX, 25}\end{pmatrix} & \frac{a_{05}}{a_{02}}=\frac{0^2\cdot 25^2}{9^2\cdot 025^2}\ (\text{VII, 34}) \\
\frac{a_{34}}{a_{24}}=\frac{4^2\cdot 23^2}{9^2\cdot 234^2}\begin{pmatrix}\text{VII, 2, 3, 20}\\ \text{IX, 21}\end{pmatrix} & \frac{a_{23}}{a_{24}}=\frac{2^2\cdot 34^2}{9^2\cdot 234^2}\ (\text{VII, 35}) & \frac{a_{34}}{a_{04}}=\frac{4^2\cdot 03^2}{9^2\cdot 034^2}\begin{pmatrix}\text{VII, 2, 4, 21}\\ \text{IX, 22}\end{pmatrix} & \frac{a_{03}}{a_{04}}=\frac{0^2\cdot 34^2}{9^2\cdot 034^2}\ (\text{VII, 36}) \\
\frac{a_{14}}{a_{24}}=\frac{4^2\cdot 12^2}{9^2\cdot 124^2}\begin{pmatrix}\text{VII, 2, 3, 20}\\ \text{IX, 23}\end{pmatrix} & \frac{a_{12}}{a_{24}}=\frac{2^2\cdot 14^2}{9^2\cdot 124^2}\ (\text{VII, 37}) & \frac{a_{14}}{a_{04}}=\frac{4^2\cdot 01^2}{9^2\cdot 014^2}\begin{pmatrix}\text{VII, 2, 4, 21}\\ \text{IX, 24}\end{pmatrix} & \frac{a_{01}}{a_{04}}=\frac{0^2\cdot 14^2}{9^2\cdot 014^2}\ (\text{VII, 38}) \\
\frac{a_{23}}{a_{02}}=\frac{2^2\cdot 03^2}{9^2\cdot 023^2}\begin{pmatrix}\text{VII, 3, 4. 22}\\ \text{IX, 26}\end{pmatrix} & \frac{a_{03}}{a_{02}}=\frac{0^2\cdot 23^2}{9^2\cdot 023^2}\ (\text{VII, 39}) & \frac{a_{12}}{a_{02}}=\frac{2^2\cdot 01^2}{9^2\cdot 012^2}\begin{pmatrix}\text{VII, 3, 4, 22}\\ \text{IX, 27}\end{pmatrix} & \frac{a_{01}}{a_{02}}=\frac{0^2\cdot 12^2}{9^2\cdot 012^2}\ (\text{VII, 40}) \\
 & & & \\
\frac{a_{78}}{a_{67}}=\frac{67^2\cdot 568^2}{6^2\cdot 5678^2} & \frac{a_{58}}{a_{57}}=\frac{56^2\cdot 678^2}{6^2\cdot 5678^2}\ (\text{VIII, 1}) & \frac{a_{78}}{a_{37}}=\frac{67^2\cdot 368^2}{6^2\cdot 3678^2} & \frac{a_{38}}{a_{37}}=\frac{36^2\cdot 678^2}{6^2\cdot 3678^2}\ (\text{VIII, 3}) \\
\frac{a_{78}}{a_{17}}=\frac{67^2\cdot 168^2}{6^2\cdot 1678^2} & \frac{a_{18}}{a_{17}}=\frac{16^2\cdot 678^2}{6^2\cdot 1678^2}\ (\text{VIII, 5}) & \frac{a_{58}}{a_{35}}=\frac{56^2\cdot 368^2}{6^2\cdot 3678^2}\ (\text{VIII, 25}) & \frac{a_{38}}{a_{35}}=\frac{36^2\cdot 568^2}{6^2\cdot 3568^2}\ (\text{VIII, 25}) \\
\frac{a_{58}}{a_{15}}=\frac{56^2\cdot 168^2}{6^2\cdot 1568^2}\ (\text{VIII, 27}) & \frac{a_{18}}{a_{15}}=\frac{16^2\cdot 568^2}{6^2\cdot 1568^2}\ (\text{VIII, 27}) & \frac{a_{38}}{a_{13}}=\frac{36^2\cdot 168^2}{6^2\cdot 1368^2}\ (\text{VIII, 29}) & \frac{a_{18}}{a_{13}}=\frac{16^2\cdot 368^2}{6^2\cdot 1368^2}\ (\text{VIII, 29}) \\
\frac{a_{62}}{a_{57}}=\frac{78^2\cdot 568^2}{8^2\cdot 5678^2} & \frac{a_{56}}{a_{57}}=\frac{58^2\cdot 678^2}{8^2\cdot 5678^2}\ (\text{VIII, 2}) & \frac{a_{67}}{a_{37}}=\frac{78^2\cdot 368^2}{8^2\cdot 3678^2} & \frac{a_{36}}{a_{37}}=\frac{38^2\cdot 678^2}{8^2\cdot 3678^2}\ (\text{VIII, 4}) \\
\frac{a_{67}}{a_{17}}=\frac{78^2\cdot 168^2}{8^2\cdot 1678^2} & \frac{a_{16}}{a_{17}}=\frac{18^2\cdot 678^2}{8^2.\ 1678^2}\ (\text{VIII, 6}) & \frac{a_{47}}{a_{57}}=\frac{78^2\cdot 458^2}{8^2\cdot 4578^2}\ (\text{VIII, 7}) & \frac{a_{45}}{a_{57}}=\frac{58^2\cdot 478^2}{8^2\cdot 4578^2}\ (\text{VIII, 8}) \\
\frac{a_{27}}{a_{57}}=\frac{78^2\cdot 258^2}{8^2\cdot 2578^2}\ (\text{VIII, 9}) & \frac{a_{25}}{a_{57}}=\frac{58^2\cdot 278^2}{8^2\cdot 2578^2}\ (\text{VIII, 6}) & \frac{a_{67}}{a_{57}}=\frac{78^2\cdot 058^2}{8^2\cdot 0578^2}\ (\text{VIII, 11}) & \frac{a_{05}}{a_{57}}=\frac{58^2\cdot 078^5}{8^2\cdot 0578^2}\ (\text{VIII, 12}) \\
\frac{a_{47}}{a_{37}}=\frac{78^2\cdot 348^2}{8^2\cdot 3478^2}\ (\text{VIII, 13}) & \frac{a_{34}}{a_{37}}=\frac{38^2\cdot 478^2}{8^2\cdot 3478^2}\ (\text{VIII, 14}) & \frac{a_{47}}{a_{17}}=\frac{78^2\cdot 148^2}{8^2\cdot 1478^2}\ (\text{VIII, 15}) & \frac{a_{14}}{a_{17}}=\frac{18^2\cdot 478^2}{8^2\cdot 1478^2}\ (\text{VIII, 16}) \\
\frac{a_{27}}{a_{37}}=\frac{78^2\cdot 238^2}{8^2\cdot 2378^2}\ (\text{VIII, 17}) & \frac{a_{23}}{a_{37}}=\frac{38^2\cdot 278^2}{8^2\cdot 2378^2}\ (\text{VIII, 18}) & \frac{a_{07}}{a_{37}}=\frac{78^2\cdot 038^2}{8^2\cdot 0378^2}\ (\text{VIII, 19}) & \frac{a_{03}}{a_{37}}=\frac{38^2\cdot 078^2}{8^2\cdot 0378^2}\ (\text{VIII, 20}) \\
\frac{a_{27}}{a_{17}}=\frac{78^2\cdot 128^2}{8^2\cdot 1278^2}\ (\text{VIII, 21}) & \frac{a_{12}}{a_{17}}=\frac{18^2\cdot 278^2}{8^2\cdot 1278^2}\ (\text{VIII, 22}) & \frac{a_{07}}{a_{17}}=\frac{78^2\cdot 018^2}{8^2\cdot 0178^2}\ (\text{VIII, 23}) & \frac{a_{01}}{a_{17}}=\frac{18^2\cdot 078^2}{8^2\cdot 0178^2}\ (\text{VIII, 24}) \\
\frac{a_{56}}{a_{35}}=\frac{58^2\cdot 368^2}{8^2\cdot 3568^2}\ (\text{VIII, 25}) & \frac{a_{36}}{a_{35}}=\frac{38^2\cdot 568^2}{8^2\cdot 3568^2}\ (\text{VIII, 26}) & \frac{a_{56}}{a_{15}}=\frac{58^2\cdot 168^2}{8^2\cdot 1568^2}\ (\text{VIII, 27}) & \frac{a_{16}}{a_{15}}=\frac{18^2\cdot 568^2}{8^2\cdot 1568^2}\ (\text{VIII, 28}) \\
\frac{a_{36}}{a_{13}}=\frac{38^2\cdot 168^2}{8^2\cdot 1368^2}\ (\text{VIII, 29}) & \frac{a_{16}}{a_{13}}=\frac{18^2\cdot 368^2}{8^2\cdot 1368^2}\ (\text{VIII, 30}) & \frac{a_{45}}{a_{35}}=\frac{58^2\cdot 348^2}{8^2\cdot 3458^2}\ (\text{VIII, 31}) & \frac{a_{34}}{a_{35}}=\frac{38^2\cdot 458^2}{8^2\cdot 3458^2}\ (\text{VIII, 32}) \\
\frac{a_{45}}{a_{15}}=\frac{58^2\cdot 148^2}{8^2\cdot 1458^2}\ (\text{VIII, 33}) & \frac{a_{14}}{a_{15}}=\frac{18^2\cdot 458^2}{8^2\cdot 1458^2}\ (\text{VIII, 34}) & \frac{a_{25}}{a_{35}}=\frac{58^2\cdot 238^2}{8^2\cdot 2358^2}\ (\text{VIII, 35}) & \frac{a_{23}}{a_{35}}=\frac{38^2\cdot 258^2}{8^2\cdot 2358^2}\ (\text{VIII, 36}) \\
\frac{a_{25}}{a_{15}}=\frac{58^2\cdot 128^2}{8^2\cdot 1258^2}\ (\text{VIII, 37}) & \frac{a_{12}}{a_{15}}=\frac{18^2\cdot 258^2}{8^2\cdot 1258^2}\ (\text{VIII, 38}) & \frac{a_{05}}{a_{35}}=\frac{58^2\cdot 038^2}{8^2\cdot 0358^2}\ (\text{VIII, 39}) & \frac{a_{03}}{a_{35}}=\frac{38^2\cdot 058^2}{8^2\cdot 0358^2}\ (\text{VIII, 40}) \\
\frac{a_{05}}{a_{15}}=\frac{58^2\cdot 018^2}{8^2\cdot 0158^2}\ (\text{VIII, 41}) & \frac{a_{01}}{a_{15}}=\frac{18^2\cdot 058^2}{8^2\cdot 0158^2}\ (\text{VIII, 42}) & \frac{a_{34}}{a_{13}}=\frac{38^2\cdot 148^2}{8^2\cdot 1348^2}\ (\text{VIII, 43}) & \frac{a_{14}}{a_{13}}=\frac{18^2\cdot 348^2}{8^2\cdot 1348^2}\ (\text{VIII, 44}) \\
\frac{a_{23}}{a_{13}}=\frac{38^2\cdot 128^2}{8^2\cdot 1238^2}\ (\text{VIII, 45}) & \frac{a_{12}}{a_{13}}=\frac{18^2\cdot 238^2}{8^2\cdot 1238^2}\ (\text{VIII, 46}) & \frac{a_{03}}{a_{13}}=\frac{38^2\cdot 018^2}{8^2\cdot 0138^2}\ (\text{VIII, 47}) & \frac{a_{01}}{a_{13}}=\frac{18^2\cdot 038^2}{8^2\cdot 0138^2}\ (\text{VIII, 48})
\end{array}\right.
$$

$$\frac{78^2}{678^2}\ (\text{VII}, 1)\quad \frac{a_{78}}{a_{48}} = \frac{8^2\cdot 47^2}{9^2\cdot 478^2} \qquad \frac{a_{47}}{a_{48}} = \frac{4^2\cdot 78^2}{9^2\cdot 478^2}\ (\text{VII}, 2)$$

$$\frac{\cdot\, 78^2}{278^2}\ (\text{VII}, 3)\quad \frac{a_{78}}{a_{08}} = \frac{8^2\cdot 07^2}{9^2\cdot 078^2} \qquad \frac{a_{07}}{a_{08}} = \frac{0\cdot 78^2}{9^2\cdot 078^2}\ (\text{VII}, 4)$$

$$\frac{\cdot\, 58^2}{568^2}\ (\text{VII}, 5)\quad \frac{a_{38}}{a_{68}} = \frac{8^2\cdot 36^2}{9^2\cdot 368^2} \qquad \frac{a_{36}}{a_{68}} = \frac{6^2\cdot 38^2}{9^2\cdot 368^2}\ (\text{VII}, 6)$$

$$\frac{18^2}{168^2}\ (\text{VII}, 7)\quad \frac{a_{58}}{a_{48}} = \frac{8^2\cdot 45^2}{9^2\cdot 458^2}\ (\text{IX}, 1) \qquad \frac{a_{45}}{a_{48}} = \frac{4^2\cdot 58^2}{9^2\cdot 458^2}\ (\text{VII}, 8)$$

$$\frac{\cdot\, 58^2}{258^2}\ (\text{VII}, 9)\quad \frac{a_{58}}{a_{08}} = \frac{8^2\cdot 05^2}{9^2\cdot 058^2}\ (\text{IX}, 3) \qquad \frac{a_{05}}{a_{08}} = \frac{0^2\cdot 58^2}{9^2\cdot 058^2}\ (\text{VII}, 10)$$

$$\frac{.\, 38^2}{348^2}\ (\text{VII}, 11)\quad \frac{a_{18}}{a_{48}} = \frac{8^2\cdot 14^2}{9^2\cdot 148^2}\ (\text{IX}, 7) \qquad \frac{a_{14}}{a_{18}} = \frac{4^2\cdot 18^2}{9^2\cdot 148^2}\ (\text{VII}, 12)$$

$$\frac{\cdot\, 38^2}{238^2}\ (\text{VII}, 13)\quad \frac{a_{38}}{a_{08}} = \frac{8^2\cdot 03^2}{9^2\cdot 038^2}\ (\text{IX}, 6) \qquad \frac{a_{03}}{a_{08}} = \frac{0^2\cdot 38^2}{9^2\cdot 038^2}\ (\text{VII}, 14)$$

$$\frac{\cdot\, 18^2}{128^2}\ (\text{VII}, 15)\quad \frac{a_{18}}{a_{08}} = \frac{8^2\cdot 01^2}{9^2\cdot 018^2}\ (\text{IX}, 9) \qquad \frac{a_{01}}{a_{08}} = \frac{0^2\cdot 18^2}{9^2\cdot 018^2}\ (\text{VII}, 16)$$

$$\frac{.\, 67^2}{467^2}\ (\text{VII}, 17)\quad \frac{a_{67}}{a_{26}} = \frac{6^2\cdot 27^2}{9^2\cdot 267^2}\ (\text{VII}, 1, 3, 18) \qquad \frac{a_{27}}{a_{26}} = \frac{2^2\cdot 67^2}{9^2\cdot 267^2}\ (\text{VII}, 18)$$

$$\frac{\cdot\, 67^2}{067^2}\ (\text{VII}, 19)\quad \frac{a_{47}}{a_{24}} = \frac{4^2\cdot 27^2}{9^2\cdot 247^2}\ (\text{VII}, 2, 3, 20) \qquad \frac{a_{27}}{a_{24}} = \frac{2^2\cdot 47^2}{9^2\cdot 247^2}\ (\text{VII}, 20)$$

$$\frac{\cdot\, 47^2}{047^2}\ (\text{VII}, 21)\quad \frac{a_{27}}{a_{02}} = \frac{2^2\cdot 07^2}{9^2\cdot 027^2}\ (\text{VII}, 3, 4, 22) \qquad \frac{a_{07}}{a_{02}} = \frac{0^2\cdot 27^2}{9^2\cdot 027^2}\ (\text{VII}, 22)$$

$$\frac{56^2}{456^2}\ (\text{VII}, 23)\quad \frac{a_{56}}{a_{26}} = \frac{6^2\cdot 25^2}{9^2\cdot 256^2}\begin{pmatrix}\text{VII}, 1, 3, 18\\ \text{IX}, 11\end{pmatrix} \frac{a_{25}}{a_{26}} = \frac{2^2\cdot 56^2}{9^2\cdot 256^2}\ (\text{VII}, 24)$$

$$\frac{56^2}{056^2}\ (\text{VII}, 25)\quad \frac{a_{36}}{a_{46}} = \frac{6^2\cdot 34^2}{9^2\cdot 346^2}\begin{pmatrix}\text{VII}, 1, 2, 17\\ \text{IX}, 13\end{pmatrix} \frac{a_{34}}{a_{46}} = \frac{4^2\cdot 36^2}{9^2\cdot 346^2}\ (\text{VII}, 26)$$

$$\frac{16^2}{146^2}\ (\text{VII}, 27)\quad \frac{a_{36}}{a_{26}} = \frac{6^2\cdot 23^2}{9^2\cdot 236^2}\begin{pmatrix}\text{VII}, 1, 3, 18\\ \text{IX}, 15\end{pmatrix} \frac{a_{23}}{a_{26}} = \frac{2^2\cdot 36^2}{9^2\cdot 236^2}\ (\text{VII}, 28)$$

$$\frac{36^2}{036^2}\ (\text{VII}, 29)\quad \frac{a_{16}}{a_{26}} = \frac{6^2\cdot 12^2}{9^2\cdot 126^2}\begin{pmatrix}\text{VII}, 1, 3, 18\\ \text{IX}, 17\end{pmatrix} \frac{a_{12}}{a_{26}} = \frac{2^2\cdot 16^2}{9^2\cdot 126^2}\ (\text{VII}, 30)$$

$$\frac{16^2}{016^2}\ (\text{VII}, 31)\quad \frac{a_{45}}{a_{24}} = \frac{4^2\cdot 25^2}{9^2\cdot 245^2}\begin{pmatrix}\text{VII}, 2, 3, 20\\ \text{IX}, 19\end{pmatrix} \frac{a_{25}}{a_{24}} = \frac{2^2\cdot 45^2}{9^2\cdot 245^2}\ (\text{VII}, 32)$$

$$\frac{45^2}{045^2}\ (\text{VII}, 33)\quad \frac{a_{25}}{a_{02}} = \frac{2^2\cdot 05^2}{9^2\cdot 025^2}\begin{pmatrix}\text{VII}, 3, 4, 22\\ \text{IX}, 25\end{pmatrix} \frac{a_{05}}{a_{02}} = \frac{0^2\cdot 25^2}{9^2\cdot 025^2}\ (\text{VII}, 34)$$

$$\frac{34^2}{234^2}\ (\text{VII}, 35)\quad \frac{a_{34}}{a_{04}} = \frac{4^2\cdot 03^2}{9^2\cdot 034^2}\begin{pmatrix}\text{VII}, 2, 4, 21\\ \text{IX}, 22\end{pmatrix} \frac{a_{03}}{a_{04}} = \frac{0^2\cdot 34^2}{9^2\cdot 034^2}\ (\text{VII}, 36)$$

$$\frac{14^2}{124^2}\ (\text{VII}, 37)\quad \frac{a_{14}}{a_{04}} = \frac{4^2\cdot 01^2}{9^2\cdot 014^2}\begin{pmatrix}\text{VII}, 2, 4, 21\\ \text{IX}, 24\end{pmatrix} \frac{a_{01}}{a_{04}} = \frac{0^2\cdot 14^2}{9^2\cdot 014^2}\ (\text{VII}, 38)$$

$$\frac{23^2}{023^2}\ (\text{VII}, 39)\quad \frac{a_{12}}{a_{02}} = \frac{2^2\cdot 01^2}{9^2\cdot 012^2}\begin{pmatrix}\text{VII}, 3, 4, 22\\ \text{IX}, 27\end{pmatrix} \frac{a_{01}}{a_{02}} = \frac{0^2\cdot 12^2}{9^2\cdot 012^2}\ (\text{VII}, 40)$$

$$\frac{678^2}{5678^2}\ (\text{VIII}, 1)\quad \frac{a_{78}}{a_{37}} = \frac{67^2\cdot 368^2}{6^2\cdot 3678^2} \qquad \frac{a_{38}}{a_{37}} = \frac{36^2\cdot 678^2}{6^2\cdot 3678^2}\ (\text{VIII}, 3)$$

$$\frac{678^2}{1678^2}\ (\text{VIII}, 5)\quad \frac{a_{58}}{a_{35}} = \frac{56^2\cdot 368^2}{6^2\cdot 3678^2}\ (\text{VIII}, 25) \qquad \frac{a_{38}}{a_{35}} = \frac{36^2\cdot 568^2}{6^2\cdot 3568^2}\ (\text{VIII}, 25)$$

$$\frac{568^2}{568^2}\ (\text{VIII}, 27)\quad \frac{a_{38}}{a_{13}} = \frac{36^2\cdot 168^2}{6^2\cdot 1368^2}\ (\text{VIII}, 29) \qquad \frac{a_{18}}{a_{13}} = \frac{16^2\cdot 368^2}{6^2\cdot 1368^2}\ (\text{VIII}, 29)$$

$$\frac{678^2}{\ }\ (\text{VIII}, 2)\quad \frac{a_{67}}{\ } = \frac{78^2\cdot 368^2}{\ } \qquad \frac{a_{36}}{\ } = \frac{38^2\cdot 678^2}{\ }\ (\text{VIII}, 4)$$

2

Ueber den Cauchy'schen Integralsatz.

Von

Alfred Pringsheim.

Aus den Sitzungsberichten der mathematisch-physikalischen Classe der k. bayer. Akad. d. Wiss. 1895. Bd. XXV. Heft I.

München 1895.

Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub.



Ueber den Cauchy'schen Integralsatz.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 7. Januar.*)

Der Satz, dass ein über eine complexe Werthenreihe ausgedehntes Integral von der Form $\int_{z_0}^{z} f(z) \cdot dz$ unter gewissen Bedingungen von der Wahl der zwischen z_0 und z gelegenen Zwischenwerthe, dem „Integrationswege", unabhängig ist, oder, was im Wesentlichen dasselbe besagt, dass unter analogen Bedingungen das Integral $\int f(z) \cdot dz$, erstreckt über einen geschlossenen Integrationsweg, verschwindet, wird wohl ziemlich allgemein schlechthin als der Cauchy'sche Integralsatz bezeichnet und zwar wohl nicht lediglich darum, weil er von Cauchy zuerst ausgesprochen und bewiesen wurde[1]) (denn so verstanden gibt es eine ganze Anzahl Cauchy'scher Integralsätze), sondern weil er als die eigentliche Grundlage der modernen

[1]) Soviel mir bekannt ist, in dieser Form zum ersten Male in dem 1825 als besonderes Heft herausgegebenen „Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires", § 3. — In Laurent's Traité d'Analyse (T. III, p. 257) und Kronecker's Vorlesungen über Integrale (p. 52) wird das Jahr 1814 als Publicationsjahr angegeben. Obschon dieser Bemerkung eine nähere Quellenangabe nicht beigefügt ist, so lässt sich doch mit ziemlicher Sicherheit annehmen, dass dieselbe auf das im Jahre 1814 der Pariser Akademie vorgelegten „Mémoire sur les intégrales définies" (Oeuvres complètes, T. I, p. 399—506) zurückzuführen sein dürfte. Sollte dies aber wirklich der Fall sein, so muss jene Angabe als

Functionentheorie im Cauchy-Riemann'schen Sinne ohne jeden Vorbehalt eine der bewunderungswürdigsten und frucht-

---

unrichtig oder vielmehr als nur theilweise richtig bezeichnet werden. In der eben erwähnten Abhandlung finden sich nämlich in Bezug auf den fraglichen Gegenstand nur die folgenden Gleichungen (mit unerheblichen, zum Zwecke leichteren Verständnisses hier vorgenommenen Aenderungen der dort angewandten Bezeichnung):

$$\int_0^x S(\xi, y) \cdot d\xi - \int_0^x S(\xi, 0) \cdot d\xi = \int_0^y U(x, \eta) \cdot d\eta - \int_0^y U(0, \eta) \cdot d\eta$$

wo S, U Funktionen von ξ, η bezeichnen, welche der Differentialgleichung $\frac{\partial S}{\partial \eta} = \frac{\partial U}{\partial \xi}$ genügen (a. a. O. p. 334, Gl. 4), und ferner:

$$\int_0^x f(\xi + y i) \cdot d\xi - \int_0^x f(\xi) \cdot d\xi = i \int_0^y f(x + \eta i) \cdot d\eta - i \int_0^y f(\eta i) \cdot d\eta$$

(p. 340, Fussnote, Gl. B). Diese Gleichungen enthalten allerdings den betreffenden Satz, aber nur für den speciellen Fall eines Rechtecks als Integrationsweg. Die wesentliche Bedeutung des Cauchy'schen Satzes für die Functionentheorie liegt aber gerade in seiner Anwendbarkeit auf einen beliebigen Integrationsweg. Und wenn es auch keine besondere Schwierigkeit hat, aus der Gültigkeit des Satzes für ein Rechteck durch einen geeigneten Grenzübergang jene allgemeinere Form abzuleiten (wie dies z. B. auch in dem hier weiter unten abzuleitenden Beweise geschieht: cf. § 4), so kann doch von einer derartigen Verallgemeinerung überhaupt erst dann die Rede sein, wenn der Begriff eines Integrals von der Form $\int (S \cdot dx + U \cdot dy)$ oder $\int f(z) \cdot dz$, genommen über einen beliebigen Integrationsweg, wirklich definirt ist. Eine solche Definition findet sich aber wohl zum ersten Male in der genannten Abhandlung von 1825 (§ 2 und § 9), wenigstens ist in dem „Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal" vom Jahre 1823 hiervon noch keine Rede, und Cauchy bemerkt auch in der Einleitung zu jener Abhandlung ganz ausdrücklich, dass keine einzige aller bisher erschienenen Arbeiten „den Grad von Allgemeinheit genügend fixirt habe, dessen ein solches Integral fähig ist". Durch die Veröffentlichung des Briefwechsels zwischen Gauss und Bessel (1880) ist die merkwürdige Thatsache bekannt geworden, dass Gauss den fraglichen Satz in seiner allgemeinen Fassung schon im Jahre 1811 kannte. (Brief an Bessel vom 18. December 1811.) Er ist indessen niemals

barsten Entdeckungen des grossen Mathematikers genannt werden darf.

Cauchy bewies den fraglichen Satz mit Hülfe von Continuitätsbetrachtungen: er zeigte, dass bei einer unendlich kleinen Verschiebung der Integrationscurve mit Festhaltung der Endpunkte das obige Integral nur um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung geändert wird, oder anders ausgesprochen,[1]) dass die Variation des Integrals den Werth Null hat. Die Beweise, die sich in der Mehrzahl französischer Lehrbücher für jenen Satz finden, sind im Wesentlichen einfache Reproductionen oder Modificationen dieses Cauchy'schen Beweises. Meiner Ansicht nach haftet allen diesen Beweisen, nach dem Maassstabe moderner analytischer Anschauungen gemessen, ein mehr oder weniger erhebliches Manco von überzeugender Strenge an. Entweder sie wenden die Principien der Variationsrechnung, deren strenge Begründung zu den schwierigsten Problemen der Infinitesimalrechnung gehört, mit einer Unbedenklichkeit an, die durch das Maass der gemachten Voraussetzungen kaum gerechtfertigt ist.[2]) Oder sie suchen mit Umgehung der Variations-

---

wieder darauf zurückgekommen, und es scheint, dass sich auch in seinem Nachlasse keinerlei Aufzeichnungen hierüber vorgefunden haben. Man wird daher wohl Kronecker nur Recht geben können, wenn er hieran anknüpfend a. a. O. folgendes bemerkt: „Es ist doch ein grosser Unterschied, ob Jemand eine mathematische Wahrheit mit vollem Beweise und der Darlegung ihrer ganzen Tragweite veröffentlicht oder ob ein Anderer sie nur so nebenher einem Freunde unter Discretion mittheilt. Desshalb können wir den Satz mit Recht als das Cauchy'sche Theorem bezeichnen."

[1]) a. a. O. p. 6: „Ainsi la démonstration du principe ci-dessus énoncé repose sur cette seule observation, que la variation de l'intégrale est nulle."

[2]) Man sehe z. B. Briot et Bouquet, Fonctions doublement périodiques (1859) p. 20. — Bertrand, Calcul intégral (1870) p. 295. — Laurent, Fonctions elliptiques (1880) p. 6; desgl. Traité d'Analyse (1888) T. III, p. 210. — Picard, Traité d'Analyse (1891/93) T. I, p. 77; T. II, p. 4.

rechnung deren Princip durch eine directe Infinitesimalbetrachtung zu ersetzen, imputiren aber dabei der Function $f(z)$ eine für alle diese Beweise unentbehrliche Eigenschaft ziemlich complicirter Natur, welche entweder ganz direct in die Voraussetzung aufgenommen oder zuvor auf Eigenschaften einfacherer Art zurückgeführt werden müsste. Es ist dies die Annahme, dass der Differenzenquotient $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ für alle in Betracht kommenden Werthe von z gleichmässig nach $f'(z)$ convergirt, d. h. dass nach Vorgabe einer beliebig kleinen positiven Grösse ε sich eine positive Grösse ϱ angeben lässt, sodass:

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-f'(z)\right|<\varepsilon \quad \text{wenn nur:} \quad |h|<\varrho$$

für alle in Betracht kommenden Werthe von z.[1]) Nimmt man diese Eigenschaft ohne weiteres in die Voraussetzung des Satzes auf, so verliert derselbe vollständig seinen einfachen und elementaren Charakter. Man müsste also vor

---

[1]) Ohne diese Annahme fällt z. B. der überhaupt wenig streng gehaltene Beweis bei Camille Jordan, Cours d'Analyse, T. II (1888) p. 275; aber auch der sorgfältiger durchgeführte Beweis von Briot et Bouquet, Théorie des fonctions elliptiques (1875), p. 128—132, und ein mit dem eben genannten nahe verwandter von Mittag-Leffler: Göttinger Nachrichten 1875, p. 65—73. (Ein in dem letztgenannten Aufsatze angeführter, angeblich vollkommen strenger Beweis von Malmsten war mir leider bisher nicht zugänglich, da er nur in schwedischer Sprache erschienen ist (1865)).

Der gleiche Vorwurf trifft auch den anscheinend sehr einfachen Beweis, den Herr Goursat im 4. Bande der Acta mathematica (1884) veröffentlicht hat. Uebrigens wird die scheinbare Kürze dieses Beweises auch noch dadurch ziemlich illusorisch, dass die von vornherein als erwiesen angenommene Gültigkeit des Cauchy'schen Satzes für $\int dz$, $\int z\,dz$ in Wahrheit eine Grenzbetrachtung erfordert, die nicht wesentlich einfacher ausfällt, als die in § 2 dieses Aufsatzes allgemeiner durchgeführte.

Allem versuchen, dieselbe etwa aus der vorauszusetzenden Stetigkeit[1]) von $f'(z)$ abzuleiten, ein Unternehmen, das, wenn überhaupt durchführbar, zweifellos auf ziemlich schwierige und umständliche Betrachtungen führt, da es sich bei dem obigen Differenzenquotienten in Wahrheit um eine Function von 4 Veränderlichen (nämlich: $z = x + yi$, $h = \xi + \eta i$) handelt.

Eine völlig andere Methode schlug bekanntlich Riemann beim Beweise des in Rede stehenden Satzes ein, indem er denselben auf einen Specialfall des Green'schen Satzes gründete, nämlich auf die Reduction eines über ein gewisses Ebenenstück zu erstreckenden Doppelintegrals von der Form $\int\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \cdot dy$ auf ein einfaches Integral $\int(P \cdot dx + Q \cdot dy)$ erstreckt über die Begrenzung.[2]) Dieser Beweis ist ziemlich unverändert in fast alle einschlägigen deutschen Lehrbücher,[3]) aber auch in viele ausländische[4]) übergegangen und wird ganz allgemein ausdrücklich als der „Riemann'sche“ Beweis des Cauchy'schen Satzes bezeichnet: wie mir scheint, mit einigem Unrecht. Denn wenn auch

---

[1]) Bei der grossen Mehrzahl der angeführten Beweise wird sogar nur die Endlichkeit, nicht die Stetigkeit von $f'(z)$ vorausgesetzt, wodurch deren Grundlagen noch problematischer werden.

[2]) Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen etc. (Inauguraldissertation, 1851).

[3]) Man vgl. z. B. die Lehrbücher über Functionentheorie oder elliptische bezw. Abel'sche Functionen von Durège, Thomae, Königsberger, Neumann, sowie die Compendien der Analysis von Schlömilch, Lipschitz, Harnack.

[4]) Man sehe z. B. Houël, Théorie élémentaire des quantités complexes; desgl. Calcul infinitésimal, T. III. — Hermite, Cours d'Analyse (réd. par Andoyer). — Casorati, Teorica delle funzione. — Auch mehrere der schon oben genannten Compendien (Bertrand, Laurent), welche den Beweis neben dem Cauchy'schen ausdrücklich als den Riemann'schen anführen.

derselbe erst durch Riemann's Darstellung allgemeine Verbreitung gefunden hat, so lässt sich doch mit unbestreitbarer Sicherheit nachweisen, dass Cauchy bereits fünf Jahre vor dem Erscheinen der Riemann'schen Dissertation ihn nicht nur gekannt, sondern in der Hauptsache auch publicirt hat. Da ich nach dem Gesagten wohl annehmen darf, dass diese Thatsache bisher völlig unbemerkt geblieben ist, so möchte ich an dieser Stelle folgendes darüber mittheilen:

Im 23. Bande der Comptes Rendus findet sich auf S. 251 eine Note von Cauchy mit dem Titel: „Sur les intégrales qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée.“ In dieser Note wird zunächst das Integral $(S) = \int k \cdot d s$ erstreckt über die Begrenzung einer Fläche S bei beliebiger Anzahl von Variablen bezw. Dimensionen definirt, alsdann aber heisst es wörtlich folgendermassen (S. 254):

„Lorsque, la surface S étant plane, x, y se réduisent à deux coordonnées rectilignes, ou polaires, ou de toute autre nature, propre à déterminer la position d'un point dans le plan de la surface S, alors, en désignant par X, Y deux fonctions continues des variables x, y et supposant

$$k = X \cdot D_s x + Y \cdot D_s y$$

on a

$$(S) = \pm \iint (D_y X - D_x Y)\, dx\, dy$$

l'intégrale double s'étendant à tous les points de la surface S.“

Nun folgt eine Bemerkung über die Bestimmung des zweifelhaften Vorzeichens, worauf Cauchy folgendermassen fortfährt:

„Dans le cas particulier où la somme

$$X\, dx + Y\, dy$$

est une différentielle exacte, on a

$$D_y X = D_x Y$$

et la formule qui détermine la valeur de (S) se réduit à l'équation déjà trouvée

$$(S) = 0."$$

Das ist aber in der That ganz genau der fragliche „Riemann'sche" Beweis mit dem einzigen Unterschiede, dass die Rechnung, welche zur Reduction des doppelten Integrals auf das einfache dient, an dieser Stelle nicht mitgetheilt wird.[1]) Cauchy setzt eben diese Reductionsformel einfach als bekannt voraus, und das war sie ja auch damals schon seit längerer Zeit.[2]) Wirklich neu ist nur ihre äusserst sinnreiche Anwendung auf den vorliegenden Fall, deren Priorität man bisher fälschlich Riemann zugeschrieben hat. Riemann selbst hat wohl niemals jenen Beweis als sein specielles Eigenthum in Anspruch genommen, und es erscheint auch relativ bedeutungslos, darüber Vermuthungen anstellen zu wollen, ob er die citirte Note gekannt haben möge oder nicht. Hingegen halte ich es für nicht unwichtig, an dieser Stelle einmal die Frage aufzuwerfen, ob denn

[1]) Im Eingange der betreffenden Note theilt Cauchy der Akademie mit, dass er sich an dieser Stelle auf einen kurzen Auszug beschränke, da er die eigentliche Abhandlung demnächst in seinen Exercices d'Analyse et de Physique mathématique publiciren wolle. Dies ist indessen aus mir unbekannten Gründen unterblieben, und, soviel ich feststellen konnte, ist die angekündigte Abhandlung auch an keiner anderen Stelle gedruckt worden. Hierüber bezw. ob sich dieselbe vielleicht in Cauchy's Nachlasse vorgefunden hat, werden vielleicht die noch im Erscheinen begriffenen Oeuvres complètes Aufklärung bringen.

[2]) Die Abhandlung von Green: „An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism", auf welche man ja bekanntlich die fragliche Formel zurückzuführen pflegt, ist schon im Jahre 1828 erschienen.

zwischen den Arbeiten Cauchy's und Riemann's berühmter Dissertation überhaupt kein nachweisbarer Zusammenhang besteht? Es muss doch sicherlich sehr merkwürdig erscheinen, dass der Name Cauchy's in jener Schrift mit keiner Silbe erwähnt wird, wenn man bedenkt, dass zu jener Zeit nicht nur Cauchy nächst Gauss wohl unbestritten als der bedeutendste unter den lebenden Mathematikern galt, sondern dass auch gerade er von seinem ersten Auftreten an einen grossen Theil seiner gesammten literarischen Production ganz speciell der consequenten Einführung der complexen Grössen in die Analysis gewidmet und auf diesem Gebiete damals eine ganze Reihe von Resultaten bereits publicirt hatte, die für die Entwickelung der Functionentheorie in der von Riemann verfolgten Richtung als fundamental anzusehen sind; ich nenne ausser dem hier in Rede stehenden Satze nur die Einführung des Begriffes der monogenen d. h. mit einem von der Differentiationsrichtung unabhängigen Differentialquotienten versehenen Function,[1]) ihre Entwickelbarkeit in Potenzreihen,[2]) die Definition der Periodicitätsmoduln („indices de périodicité") eines Integrals und die hieraus resultirende Periodicität der Umkehrungsfunctionen.[3]) Obschon die Priorität Cauchy's in diesen und einer Reihe daran anknüpfender Fragen wohl niemals ernstlich bestritten worden ist, so erschien es mir

---

[1]) Nouv. Exerc. T. IV p. 346 (1847). Hier findet sich wohl zum ersten Male der Ausdruck „monogen" und dessen Definition durch die Bedingung:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}.$$

[2]) Zuerst in einem 1832 zu Turin herausgegebenen lithographirten Mémoire (wieder abgedruckt 1841 im 2. Bande der Nouv. Exerc. p. 50). In anderer Form: Nouv. Exerc. T. I p. 269 (1840).

[3]) C. R., T. 23 p. 689 (1846). Diese Abhandlung enthält thatsächlich die vollständige Grundlage für die moderne Theorie der elliptischen und Abel'schen Functionen.

dennoch angemessen, bei dieser Gelegenheit einmal ausdrücklich hierauf hinzuweisen, da sich neuerdings eine gewisse Tendenz bemerkbar gemacht hat, die mit Recht ausserordentlich hohe Schätzung der Verdienste Riemann's um die Entwickelung der Functionentheorie bis zur Ueberschätzung auf Kosten nicht minder verdienstvoller Mathematiker auszudehnen.

Lässt sich nun auch gegen die Stichhaltigkeit des zuletzt besprochenen Beweises keine Einwendung machen (falls man noch die Stetigkeit oder wenigstens Integrabilität von $\frac{\partial Y}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y}$ in die Voraussetzung aufnimmt), so scheint mir derselbe in Bezug auf Einfachheit und Natürlichkeit der Methode noch keineswegs denjenigen Anforderungen zu genügen, welche man an den Beweis eines so grundlegenden, gleichsam im Anfange einer ausgedehnten Disciplin stehenden Satzes stellen möchte. Die Herbeiziehung des Doppelintegrals wird, rein methodisch betrachtet, immer als ein nicht hinlänglich zu motivirender Umweg erscheinen und wirkt erfahrungsgemäss bei der Einführung in das Studium der Functionentheorie für den Anfänger äusserst erschwerend.[1])

Ich habe daher versucht, einen neuen und, wie ich glaube, sowohl hinlänglich einfachen, als strengen Beweis abzuleiten,[2]) dessen Mittheilung den Hauptzweck des vorliegenden Aufsatzes bildet. Ich benütze diese Gelegenheit,

---

[1]) Die Schwierigkeit, welche die Ableitung der Green'schen Reductionsformel dem Anfänger zu bereiten pflegt, hat Kronecker (cf. Berliner Sitzungsberichte von 1885 p. 785 und Vorlesungen über Integrale p. 37—41) dadurch zu vermindern gesucht, dass er die fragliche Formel zunächst für ein Dreieck oder ein Rechteck beweist und sodann das allgemeine Resultat mit Hülfe eines Grenzüberganges daraus zusammensetzt.

[2]) Derselbe berührt sich in mancher Beziehung mit den Betrachtungen, welche Herr Thomae über die Integration zweigliedriger Differentialien angestellt hat (s. Einleitung in die

um etwas genauer auf die Definition eines Integrals der Form $\int P \cdot dx + Q \cdot dy$, erstreckt über eine Curve, einzugehen und dabei gewisse Punkte zur Sprache zu bringen, die vielleicht vielfach bekannt, aber meines Wissens noch niemals scharf präcisirt worden sind.

Schliesslich will ich nur noch bemerken, dass die im Folgenden benützten Methoden auch eine Verallgemeinerung für die Betrachtung ein- und mehrfacher Integrale mit mehr als zwei Variablen gestatten, worauf ich vielleicht bei späterer Gelegenheit zurückzukommen gedenke.

§ 1. Definition und allgemeine Eigenschaften eines Curven-Integrals.

Es sei:

$$\eta = \varphi(\xi) \tag{1}$$

für das Intervall $x_0 \leqq \xi \leqq x$ eine eindeutige und stetige Function von ξ und zwar insbesondere:

$$\varphi(x_0) = y_0 \qquad \varphi(x) = y,$$

ferner $P(\xi, \eta)$ eine gleichfalls eindeutige und stetige Function von (ξ, η) für alle Werthe ξ des genannten Intervalles und die durch Gl. (1) zugeordneten Werthe von η. Alsdann hat das bestimmte Integral:

$$\int_{x_0, y_0}^{x, y} P(\xi, \eta) \cdot d\xi = \int_{x_0}^{x} P(\xi, \varphi(\xi)) \cdot d\xi$$

einen festen endlichen Werth und soll bezeichnet werden als das Integral von $P(\xi, \eta) \cdot d\xi$, genommen über den Integrationsweg C in der Richtung $x_0 \ldots x$, in Zeichen:

Theorie der bestimmten Integrale p. 36 ff.). Doch wird daselbst von einer Definition des unbestimmten Integrals von $(P \cdot dx + Q \cdot dy)$ ausgegangen, wodurch die ganze Beweisführung sehr wesentlich an Einfachheit und Durchsichtigkeit verliert.

$$\int_{(+C)} P(\xi, \eta) \cdot d\xi = \int_{x_0}^{x} P(\xi, \varphi(\xi)) \cdot d\xi$$

wenn C diejenige Punktreihe bedeutet, welche der Gleichung $\eta = \varphi(\xi)$ bezogen auf irgend ein Coordinatensystem — etwa, wie wir der Einfachheit halber annehmen wollen, ein gewöhnliches rechtwinkeliges — entspricht, während die Bezeichnung $(+C)$ andeuten soll, dass diese Punktreihe bei der Integration in der Richtung der wachsenden x durchlaufen werden soll. Wir pflegen diese Punktreihe schlechthin als Integrations-Curve und das betreffende Integral als ein Curven-Integral zu bezeichnen, obschon hierbei keineswegs stets an eine „eigentliche" Curve d. h. eine im allgemeinen mit einer bestimmten Tangente versehene stetige Linie zu denken ist: denn thatsächlich genügt für die Existenz des obigen Integrals die blosse Stetigkeit von $\varphi(\xi)$, ohne dass man genöthigt wäre, über das Vorhandensein eines im Allgemeinen bestimmten, endlichen Differentialquotienten irgendwelche Voraussetzung zu machen.[1])

Bezeichnet man mit $(-C)$ die nämliche Curve, falls die Integration in der entgegengesetzten Richtung vorge-

---

[1]) Gerade aus diesem Grunde gebe ich dem hier eingeschlagenen Wege den Vorzug vor dem fast allgemein üblichen, wobei das Integral zunächst als Grenzwerth einer Summe definirt und sodann dessen Existenz mit Hülfe einer Parameterdarstellung von der Form:

$$\xi = \varphi(t) \qquad \eta = \psi(t)$$

nachgewiesen wird. Bei diesem Verfahren ist die Voraussetzung eines integrablen Differentialquotienten $\varphi'(t)$ und ebenso für das sogleich noch einzuführende Integral $\int_{(c)} Q(\xi, \eta) \cdot d\eta$ die analoge Voraussetzung bezüglich $\psi'(t)$ unerlässlich, was mir aus dem Grunde wenig wünschenswerth erscheint, weil hierdurch die Vorstellung von dem Zustandekommen eines solchen Integrals nicht nur eine zu eng begrenzte, sondern in gewissem Sinne geradezu eine principiell unrichtige wird, wie später noch des näheren erörtert werden soll.

nommen wird, so folgt ohne Weiteres aus der obigen Definition, dass:

$$(3) \qquad \int_{(-C)} P(\xi, \eta) \cdot d = -\int_{(+C)} P(\xi, \eta)\, d\,\xi$$

und ferner, wenn man die Curve C in eine beliebige Anzahl, in dem gleichen Sinne wie C zu durchlaufender Theilcurven c_ν $(\nu = 1, 2, \cdots n)$ zerlegt denkt:

$$(4) \qquad \int_{(C)} P(\xi, \eta) \cdot d\,\xi = \sum_1^n{}_\nu \int_{(c_\nu)} P(\xi, \eta) \cdot d\,\xi.$$

Schliesslich erkennt man auch, dass das Integral (2) einer ganz analogen Mittelwerthrelation genügt, wie die gewöhnlichen bestimmten Integrale einer Veränderlichen, nämlich:

$$(5) \qquad \int_{(C)} P(\xi, \eta) \cdot d\,\xi = P(\xi', \eta') \cdot (x - x_0)$$

wo (ξ', η') ein passendes Werthepaar aus dem Gebiete:

$$x_0 \leqq \xi \leqq x \qquad \eta = \varphi(\xi),$$

also einen gewissen Punkt der Curve C bedeutet. Diese Beziehung lehrt insbesondere, dass der Integralwerth gleichzeitig mit $(x - x_0)$ gegen Null convergirt (d. h. zunächst immer unter der Voraussetzung, dass $\eta = \varphi(\xi)$ eine eindeutige Function).

Hat die Gleichung $\eta = \varphi(\xi)$ die specielle Form $\eta = y_0$, wo y_0 eine Constante bedeutet, d. h. reducirt sich die Curve C auf eine zur X-Axe parallele Gerade, so folgt ohne Weiteres aus der Definition, dass:

$$(6) \qquad \int_{(C)} P(\xi, \eta) \cdot d\,\xi = \int_{x_0}^{x} P(\xi, y_0) \cdot d\,\xi$$

wird. Dagegen ist der Fall, dass C sich auf eine Parallele zur Y-Axe reducirt, in der oben gegebenen Definition nicht enthalten. Denkt man sich jedoch als Integrationscurve C

zunächst eine beliebige andere Gerade $\overline{x_0\, x}$, so lehrt der Mittelwerthsatz (5), dass der betreffende Integralwerth beliebig klein wird, sobald die Neigung der Geraden gegen die Y-Axe der Null zustrebt, und man wird daher der bisher gegebenen Definition noch die Gleichung:

$$\int_{(C)} P(\xi, \eta) \cdot d\,\xi = 0 \tag{7}$$

als consequente Erweiterung hinzuzufügen haben, für den Fall, dass die Curve C in die fragliche Verticale übergeht.

Die Gl. (4) kann sodann dazu dienen, um den vorliegenden Integralbegriff auf solche Fälle auszudehnen, in denen $\eta = \varphi(\xi)$ eine mehrdeutige stetige Function von ξ darstellt, sofern dieselbe nur der Beschränkung unterworfen wird, dass sich das Intervall $(x_0\, x)$ in eine endliche Anzahl theilweise oder gänzlich sich überdeckender Intervalle $(x_0 x_1) \cdots (x_{\lambda-1}\, x_\lambda) \cdots (x_{n-1}\, x_n)$[1]) umformen lässt, für welche dann die Gl. $\eta = \varphi(\xi)$ ersetzt werden kann durch ein Gleichungssystem von der Form:

$$\text{(8 a)} \quad \left\{ \begin{array}{lll} \eta = \varphi_1(\xi) & \text{für:} & x_0 \leq \xi \leq x_1 \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \eta = \varphi_\lambda(\xi) & & x_{\lambda-1} \leq \xi \leq x_\lambda \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \eta = \varphi_n(\xi) & & x_{n-1} \leq \xi \leq x, \end{array} \right.$$

wo jetzt $\varphi_1(\xi)$ durchweg eindeutige Functionen bedeuten. Hierbei ist noch zulässig, dass für eine endliche Anzahl von Werthen x_μ die Variable η in der Weise unendlich vieldeutig wird, dass sie bei constantem $\xi = x_\mu$ eine continuirliche Werthenreihe $y_\mu \cdots y'_\mu$ durchläuft (geometrisch gesprochen, dass einzelne Stücke der Integrationscurve C aus

---

1) Dabei kann also insbesondere $x_{\lambda-1}$ beliebig oft mit x_0, desgl. x_λ mit x zusammenfallen.

aus verticalen Geraden bestehen), sodass also zu den Gleichungen (8a) noch eine endliche Anzahl von Beziehungen der Form:

$$(8b) \qquad y_\mu \leqq \eta \leqq y'_\mu \qquad \text{für: } \xi = x_\mu$$

hinzutreten würde.

Eine Function $\eta = \varphi(\xi)$, welche den ebengenannten Bedingungen genügt, soll in Zukunft nach bekannten Analogien als abtheilungsweise eindeutig bezeichnet werden.

Bedeutet dann wiederum C diejenige Curve, welche der Gleichung $\eta = \varphi(\xi)$ zugehört, c_ν diejenigen Theilcurven, welche den Beziehungen (8a) und (8b) entsprechen, so soll die Definitionsgleichung gelten:

$$(9) \qquad \int_{(C)} P(\xi, \eta) \cdot d\,\xi = \sum_1^n {}_\nu \int_{(c_\nu)} P(\xi, \eta) \cdot d\,\xi$$

sofern als Integrationsrichtung für die einzelnen Curven c_ν diejenige festgehalten wird, welche sich bei stetiger Durchlaufung der Gesammtcurve C in dem einmal vorgeschriebenen Sinne ergibt.

Die Gl. (9) kann ferner auch zur Definition des fraglichen Integrals dienen, falls die bisher auf (C) als durchweg stetig angenommene Function $P(\xi, \eta)$ in $x_1, x_2, \cdots x_n$ endliche Unstetigkeiten besitzt, und es hat keine Schwierigkeit diese Definition, nach genau denselben Principien, wie für Integrale der Form $\int_{x_0}^{x} f(\xi) \cdot d\xi$, auf den Fall auszudehnen, dass jene Stellen $x_1, x_2, \cdots$ gewisse unendliche (sog. unausgedehnte) Punktmengen bilden: hierauf soll indessen nicht näher eingegangen werden, da eine derartige Betrachtung mir keinerlei besonderes Interesse zu bieten scheint.[1])

[1]) Auch übergehe ich hier den Fall, dass $P(\xi, \eta)$ an einzelnen Stellen unendlich gross wird, und verweise in dieser Hinsicht auf die allgemein übliche Behandlungsweise.

Es bedeute nun ferner $\xi = \psi(\eta)$ eine für das Intervall $y_0 \leqq \eta \leqq y$ stetige und schlechthin oder abtheilungsweise eindeutige Function von η, $Q(\xi, \eta)$ eine für die eben genannten Werthe (ξ, η) eindeutige und schlechthin oder abtheilungsweise stetige Function von (ξ, η), so ist aus dem zuvor gesagten vollständig klar, was unter einem Integral von der Form:

$$\int_{(C')} Q(\xi, \eta) \cdot d\eta$$

zu verstehen ist, falls C' die der Gl. $\xi = \psi(\eta)$ zugehörige Curve bedeutet, und man erkennt ohne Weiteres, dass dieses Integral ganz analogen Gesetzen gehorcht, wie das unmittelbar zuvor betrachtete. Insbesondere wird:

$$(10) \qquad \int_{(C')} Q(\xi, \eta) \cdot d\eta = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, \eta) \cdot d\eta$$

$$\text{bezw.} \quad \int_{(C')} Q(\xi, \eta) \cdot d\eta = 0,$$

falls sich die Integrationscurve C' auf die zur Y-Axe parallele Gerade $\xi = x_0$, bezw. auf irgend eine Parallele zur X-Axe reducirt.

Man habe nun schliesslich gleichzeitig:

$$(11) \qquad \begin{cases} \eta = \varphi(\xi) & \text{für: } x_0 \leqq \xi \leqq x \\ \xi = \psi(\eta) & \text{für: } y_0 \leqq \eta \leqq y \end{cases}$$

(sodass also ψ die inverse Function von φ — vice versa), wo $\varphi(\xi)$, $\psi(\eta)$ in dem bezeichneten Umfange durchweg stetige und schlechthin oder abtheilungsweise eindeutige Functionen ihrer Argumente bedeuten. Ferner seien $P(\xi, \eta)$, $Q(\xi, \eta)$ zwei für sämmtliche durch die Bedingungen (11) definirten Werthepaare (ξ, η) eindeutige und schlechthin oder abtheilungsweise stetige Functionen von (ξ, η). Alsdann definiren wir:

$$\int_{(C)} (P(\xi, \eta) \cdot d\xi + Q(\xi, \eta) \cdot d\eta) = \int_{(C)} P(\xi, \eta) \cdot d\xi + \int_{(C)} Q(\xi, \eta) \cdot d\eta, \tag{12}$$

falls C die durch jede der beiden Gleichungen (11) dargestellte, jedesmal in demselben Richtungssinne zu nehmende Curve bedeutet. Dabei lässt sich die auf die Stetigkeit und Eindeutigkeit der beiden Functionen $\varphi(\xi)$ und $\psi(\eta)$ bezügliche Voraussetzung leicht so umformen, dass schliesslich nur von irgend einer dieser beiden Functionen darin die Rede ist. Damit nämlich die im Intervalle $x_{\nu-1} \leqq \xi < x_\nu$ eindeutige und stetige Function $\eta = \varphi_\nu(\xi)$ eine im Intervalle $y_{\nu-1} = \varphi(x_{\nu-1})$ bis $y_\nu = \varphi(x_\nu)$ eindeutige und stetige Umkehrung $\xi = \psi_\nu(\xi)$ besitze, ist offenbar nothwendig und hinreichend, dass $\eta = \varphi_\nu(\xi)$ mit wachsenden Werthen von ξ monoton zu- oder abnehme — vice versa. Hiernach lässt sich aber die oben ausgesprochene Bedingung einfacher folgendermassen formuliren: Es muss eine der beiden Functionen $\varphi(\xi)$, $\psi(\eta)$ stetig, endlich-vieldeutig und abtheilungsweise monoton sein — wobei nach dem früher Gesagten η oder ξ für eine endliche Anzahl endlicher Intervalle auch constant sein darf.

Wenn in Zukunft von einem „beliebigen" Integrationswege die Rede ist, so soll immer ein solcher darunter verstanden werden, welcher die eben näher bezeichneten Eigenschaften besitzt. Dabei sei aber auch hier wieder ganz ausdrücklich hervorgehoben, dass die obigen Bedingungen wiederum noch keinerlei Voraussetzung bezüglich der Existenz von $\varphi'(\xi)$ bezw. $\psi'(\eta)$ involviren. Denn es gibt thatsächlich stetige und beständig monoton zu- oder abnehmende Functionen (also auch ohne sog. Invariabilitätszüge), die nichtsdestoweniger für unendlich viele Stellen jedes Intervalles (z. B. alle rationalen) entweder unendlich grosse oder überhaupt keine bestimmten Differentialquotienten be-

sitzen.[1]) Mir scheint dies insofern von Interesse, als von der Existenz eines zum Mindesten integrablen Differentialquotienten $\varphi'(\xi)$, oder genauer gesagt von der Integrabilität des Ausdruckes $\sqrt{1+\varphi'^2(\xi)\cdot d\xi}$, die Existenz einer bestimmten Bogenlänge der Curve in dem gewöhnlich acceptirten Sinne[2]) abhängt, und sich hiernach die, wie ich glaube, ziemlich vielfach verbreitete, auf der üblichen Parameterdarstellung der Integrationscurve beruhende Annahme als irrig erweist, dass die Existenz eines bestimmten Werthes für ein Curvenintegral wesentlich mit derjenigen einer bestimmten Bogenlänge (Rectificirbarkeit) der Integrationscurve zusammenhänge. Wie die hier angestellte Betrachtung zeigt, ist die Existenz einer bestimmten Bogenlänge für das Integral völlig belanglos. Weiterhin wird sich aber auch noch ergeben, dass in Fällen, wo eine solche Bogenlänge existirt, ihr Werth auf denjenigen des Integrals $\int_{(C)} P\cdot d\xi + Q\cdot d\eta$ überhaupt keinen merklichen Einfluss ausübt, genauer gesagt, dass Curven mit angebbarer, endlicher Längedifferenz Integrale liefern können, deren Werthe einander beliebig nahe kommen (NB. ohne dass über $P(\xi,\eta)$, $Q(\xi,\eta)$ irgendwelche weitere Voraussetzung gemacht wird).

---

[1]) s. z. B. Cantor, Condensation der Singularitäten. Math. Ann. Bd. 19, p. 591. Ferner: Dini, Theorie der Functionen etc., übers. von Lüroth-Schepp, § 112*. Ein anderer Typus von derartigen Functionen: ebendaselbst § 132.

2) cf. Du Bois-Reymond, Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Var.-Rechnung. Math. Ann. Bd. 15, p. 285. Bekanntlich hat Scheeffer (Acta math. Bd. 5, p. 50) für den Fall der Nichtexistenz von $\int_{x_0}^{x}\sqrt{d\xi^2+d\eta^2}$ eine erweiterte Definition der Bogenlänge gegeben. Doch lassen sich dagegen Einwendungen erheben (cf. Du Bois-Reymond, Acta math. Bd. 6, p. 167), welche bisher nicht widerlegt worden sind.

§ 2. Angenäherte Darstellung eines beliebigen Curvenintegrals durch ein sogenanntes Treppenintegral.

Eine gebrochene, beliebig auf- und absteigende Linie, deren Stücke den Coordinatenaxen wechselsweise parallel laufen, soll im Folgenden schlechthin als eine Treppe und, falls der Endpunkt mit dem Anfangspunkte zusammenfällt, als eine geschlossene Treppe oder als ein Treppenpolygon bezeichnet werden. Ein Integral, dessen Integrationsweg eine solche Treppe ist, soll dann kurz ein Treppenintegral heissen.

Es sei nun S diejenige Treppe, welche durch die Eckpunkte:

$(x_0, y_0), (x_1, y_0), (x_1, y_1), \cdots (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_{n-1}), (x_n, y_n)$

bestimmt wird, so hat man mit Benützung der Gleichungen (6), (7), (10) offenbar:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{(S)} P(\xi, \eta) \cdot d\xi &= \sum_1^n {}_\nu \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} P(\xi, y_{\nu-1}) \cdot d\xi \\ \int_{(S)} Q(\xi, \eta) \cdot d\eta &= \sum_1^n {}_\nu \int_{y_{\nu-1}}^{y_\nu} Q(x_\nu, \eta) \cdot d\eta. \end{aligned} \right.$$

Es soll nun gezeigt werden, dass sich jedes Curvenintegral mit beliebig vorzuschreibender Annäherung durch ein solches Treppenintegral ersetzen lässt, sobald sich die Stetigkeit von $P(\xi, \eta)$, $Q(\xi, \eta)$ noch auf eine gewisse Nachbarschaft der Integrationscurve erstreckt.

Ich nehme als Integrationscurve C zunächst eine von x_0 bis x monoton verlaufende, etwa, um die Anschauung zu fixiren, beständig aufsteigende Curve. Ferner sei $P(\xi, \eta)$ eine eindeutige und stetige Function von (ξ, η) nicht nur auf der Curve C, sondern noch für ein gewisses benachbartes Gebiet zum Mindesten auf einer Seite der

Curve z. B. der rechten: dieses Gebiet mag bei x_0 bezw. x durch ein gerades Linienstück parallel zur X- bezw. Y-Axe, im Uebrigen seitlich durch eine beliebige Curve begrenzt sein, und zwar sollen diese Grenzen mit zum Stetigkeitsbereiche von $P(\xi, \eta)$ gehören. Alsdann ist nach einem bekannten Satze $P(\xi, \eta)$ für das definirte Gebiet gleichmässig stetig, d. h. nach Vorgabe einer beliebig kleinen positiven Grösse σ lässt sich eine positive Grösse δ so bestimmen, dass:

$$(14) \quad |P(\xi', \eta') - P(\xi, \eta)| < \sigma \quad \text{für:} \left\{ \begin{matrix} |\xi' - \xi| \\ |\eta' - \eta| \end{matrix} \right\} < \delta,$$

sofern (ξ, η), (ξ', η') dem fraglichen Gebiete einschliesslich seiner Grenzen angehören.

Man theile nun das Intervall $(x_0\, x)$ durch Einschaltung der Theilpunkte $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots x^{(m-1)}$ in irgendwelche Theilintervalle, deren Länge durchweg $< \delta$ sein soll. Es seien ferner $y^{(1)}, y^{(2)}, \cdots y^{(m-1)}$ die zugehörigen, auf der Y-Axe verzeichneten Curvenordinaten. Sind dann unter den Intervallen $(y^{(k-1)}\, y_k^{(k)})$ solche vorhanden, deren Länge $y^{(k)} - y^{(k-1)}$ $\leqq \delta$, so kann man durch weitere Theilung erzielen, dass schliesslich nur Intervalle $< \delta$ vorhanden sind. Die auf diese Weise zum Vorschein kommenden y-Werthe (d. h. die früheren $y^{(k)}$ und die etwa noch eingeschalteten) mögen, der Grösse nach geordnet, bezeichnet werden mit:

$$y_1, \; y_2, \cdots y_{n-1},$$

und die zugehörigen Curvenabscissen (unter denen also die ursprünglichen $x^{(k)}$ mit enthalten sind) seien:

$$x_1, \; x_2 \cdots x_{n-1}.$$

Alsdann denke man sich diejenige Treppe construirt, welche durch die Punkte:

$$(x_0, y_0), \; (x_1, y_0), \; (x_1, y_1), \cdots (x_{n-1}, y_{n-1}), \; (x, y_{n-1}), \; (x, y)$$

bestimmt wird, und bezeichne die Theilcurven, in welche C durch die Punkte (x_ν, y_ν) $(\nu = 1, 2, \cdots (n-1))$ zerlegt wird, alle in der Richtung der wachsenden ξ gerechnet, mit $c_1, c_2, \cdots c_n$.

Man hat nun:

$$\mathfrak{J}_C = \int_{(C)} P(\xi, \eta) \cdot d\xi = \sum_1^n {}_\nu \int_{(c_\nu)} P(\xi, \eta) \cdot d\xi$$
$$= \sum_1^n {}_\nu P(\xi_\nu, \eta_\nu) \cdot (x_\nu - x_{\nu-1})$$
$$(\text{NB. } x_n = x)$$

wo:

$$x_{\nu-1} \leqq \xi_\nu \leqq x_\nu \qquad y_{\nu-1} \leqq \eta_\nu \leqq y_\nu.$$

Andererseits ergibt sich:

$$\mathfrak{J}_S = \int_{(S)} P(\xi, \eta) \cdot d\xi = \sum_1^n {}_\nu \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} P(\xi, y_{\nu-1}) \cdot d\xi$$
$$= \sum_1^n {}_\nu P(\xi^{(\nu)}, y_{\nu-1}) \cdot (x_\nu - x_{\nu-1})$$
$$(\text{NB. } x_n = x)$$

wo:

$$x_{\nu-1} \leqq \xi^{(\nu)} \leqq x_\nu.$$

Hieraus folgt zunächst:

$$\mathfrak{J}_C - \mathfrak{J}_S = \sum_1^n {}_\nu \{P(\xi_\nu, \eta_\nu) - P(\xi^{(\nu)}, y_{\nu-1})\} \cdot (x_\nu - x_{\nu-1})$$

und da offenbar:

$$|\xi_\nu - \xi^{(\nu)}| \leqq x_\nu - x_{\nu-1} < \delta$$
$$|\eta_\nu - y_{\nu-1}| \leqq y_\nu - y_{\nu-1} < \delta$$

so findet man schliesslich mit Berücksichtigung von Ungl. (14):

$$(15) \qquad \left| \int_{(C)} P \cdot d\xi - \int_{(S)} P \cdot d\xi \right| < \sigma \cdot (x - x_0).$$

Ganz analog ergibt sich:

$$(16) \qquad \left| \int_{(C)} Q \cdot d\eta - \int_{(S)} Q \cdot d\eta \right| < \sigma (y - y_0)$$

und aus der Zusammenfassung beider Resultate:

$$(17) \qquad \left| \int_{(C)} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) - \int_{(S)} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) \right| \\ < \sigma [(x - x_0) + (y - y_0)].$$

Da aber jeder beliebige Integrationsweg in eine endliche Anzahl solcher Curven C zerlegt werden kann, so folgt schliesslich ganz allgemein die Richtigkeit des oben ausgesprochenen Satzes.[1])

Das vorstehende Resultat wurde zwar hier wesentlich desshalb abgeleitet, weil dasselbe gestattet, den eigentlichen Beweis des Cauchy'schen Satzes auf ein Rechteck zu beschränken. Dasselbe kann indessen auch dazu dienen, um die am Schlusse des vorigen Paragraphen gemachte Be-

---

[1]) Der analytische Begriff des „Treppenintegrals" und die eben bewiesene Beziehung zwischen beliebigen Curvenintegralen und solchen Treppenintegralen ist natürlich völlig unabhängig von der hier lediglich der grösseren Anschaulichkeit halber und namentlich mit Rücksicht auf die übliche Darstellung einer complexen Variablen gewählten Auffassung von ξ und η als rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes. Ein Treppenintegral ist lediglich eine Summe von Quadraturen der Form $\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} P(\xi, y)\, d\xi$, $\int_{y_{\nu-1}}^{y_\nu} Q(x, \eta)\, d\eta$, wobei im ersten Integral $y = y_{\nu-1}$ bezw. $= y_\nu$, im zweiten $x = x_\nu$ bezw. $= x_{\nu-1}$ zu setzen ist. Und der obige Satz, von jeder geometrischen Vorstellung losgelöst, besagt, dass ein Integral der Form $\int_{x_0, y_0}^{x, y} P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta$, wo zwischen ξ und η eine Beziehung von den näher definirten Eigenschaften besteht, stets mit beliebiger Annäherung durch eine endliche Anzahl solcher Quadraturen ersetzt werden kann.

merkung in sehr einfacher und anschaulicher Weise zu erläutern.

Nimmt man nämlich als Integrationscurve C eine die Punkte x_0 und x verbindende Gerade, deren Länge also den Werth $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ besitzt, so kann man nach dem eben Gesagten das betreffende Integral mit beliebiger Annäherung durch ein solches über eine Treppe ersetzen, welche offenbar die unveränderliche Länge $|x-x_0|+|y-y_0|$ besitzt, wie klein man auch die Abstände ihrer Eckpunkte wählen mag. Mit anderen Worten: Bei unbegrenzter Verkleinerung der Treppenstufen convergirt der Werth des Treppenintegrals genau gegen denjenigen des geradlinigen Integrals, obschon die beiden Integrationswege die unveränderliche Längendifferenz $|x-x_0|+|y-y_0|$ $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ besitzen.

§ 3. Aufstellung einer nothwendigen Bedingung für die Unabhängigkeit des Integrals $\int_{x_0,y_0}^{x,y}(P\cdot d\xi+Q\cdot d\eta$ vom Integrationswege.

Es seien $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ innerhalb eines gewissen (ein- oder mehrfach) zusammenhängenden Gebietes T eindeutige und im Allgemeinen stetige Functionen von (x,y). Alsdann gilt der Satz:

Soll das Integral $\int_{x_0,y_0}^{x,y}P\cdot d\xi+Q\cdot d\eta)$ erstreckt über eine beliebige innerhalb T verlaufende Curve einen lediglich von den Grenzen, aber nicht vom Integrationswege abhängigen, bestimmten Werth besitzen, so muss für jede Stelle (x',y') in deren Umgebung die oben genannten Functionen stetig sind, die Beziehung bestehen:

$$\frac{\partial P}{\partial y'} = \frac{\partial Q}{\partial x'}.$$

Beweis. Soll das fragliche Integral vom Integrationswege unabhängig sein, so muss offenbar jedes über eine einfach geschlossene, innerhalb T verlaufende Linie erstreckte Integral $\int (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$ verschwinden.

Sei nun (x', y') ein beliebiger Punkt innerhalb T von der Beschaffenheit, dass die vier genannten Functionen für eine gewisse Umgebung derselben stetig sind. Alsdann denke man sich parallel zu den Coordinatenaxen ein Rechteck R construirt, welches einschliesslich seiner Begrenzung (R) noch in die betreffende Umgebung des Punktes (x', y') hineinfällt und diesen selbst im Innern enthält. Bezeichnet man sodann irgend einen Eckpunkt (etwa den linken unteren) von R mit (x_0, y_0), dagegen mit (x, y) jeden beliebigen Punkt im Innern (einschliesslich des Punktes (x', y')) und mit r jedes durch die Punkte (x_0, y_0) (x, y) bestimmte, zu den Coordinatenaxen parallele Rechteck, so muss offenbar die Beziehung stattfinden:

$$\int_{(r)} \{P(\xi, \eta) \cdot d\xi + Q(\xi, \eta) \cdot d\eta\} = 0$$

d. h. man hat für alle Werthe (x, y) des genannten Gebietes:

$$\int_{x_0}^{x} P(\xi, y_0) \cdot d\xi + \int_{y_0}^{y} Q(x, \eta) \cdot d\eta + \int_{x}^{x_0} P(\xi, y) \cdot d\xi$$
$$+ \int_{y}^{y_0} Q(x_0, \eta) \cdot d\eta = 0$$

oder anders geschrieben:

$$W_1(x, y) = W_2(x, y) \tag{18}$$

wenn gesetzt wird:

$$W_1(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(\xi, y_0) \cdot d\xi + \int_{y_0}^{y} Q(x, \eta) \cdot d\eta \tag{19}$$

$$(20)\quad W_2(x, y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, \eta) \cdot d\eta + \int_{x_0}^{x} P(\xi, y) \, . \, d\xi.$$

Aus Gl. (19) folgt sodann durch Differentiation nach y:

$$(21)\qquad \frac{\partial W}{\partial y} = Q(x, y)$$

und aus Gl. (20) mit Berücksichtigung von Gl. (18) durch Differentiation nach x:

$$(22)\qquad \frac{\partial W_1}{\partial x} = \frac{\partial W_2}{\partial x} = P(x, y)$$

und hieraus durch weitere Differentiation:

$$(23)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial W_1}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial W_1}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$$

Da aber die Gleichungen (21)—(23) lehren, dass mit $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ auch $\frac{\partial W_1}{\partial x}$, $\frac{\partial W_1}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W_1}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W_1}{\partial y}\right)$ stetig sind, so gilt die Beziehung:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W_1}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W_1}{\partial y}\right)$$

und man findet somit nach Gl. (23):

$$(24)\qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

für alle Werthe (x, y) im Innern des Rechteckes R, insbesondere also für $x = x'$, $y = y'$ — womit der oben ausgesprochene Satz bewiesen ist.

§ 4. Der Cauchy'sche Satz.

Hauptsatz. Sind $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ innerhalb eines gewissen (ein- oder mehrfach) zusammenhängenden Gebietes T durchweg eindeutige, endliche und stetige Functionen von (x, y),[1]) welche der Bedingung genügen:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{24}$$

so verschwindet das Integral $\int (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$ erstreckt über die vollständige Begrenzung jedes innerhalb T liegenden zusammenhängenden Flächenstückes. Und es ist $\int_{x_0, y_0}^{x, y} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$ für alle innerhalb eines einfach zusammenhängenden Gebietstheiles von T verlaufenden Integrationswege eine eindeutige und stetige Function $W(x, y)$ mit den partiellen Differentialquotienten:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial W}{\partial y} = Q(x, y).$$

Beweis. Zunächst lässt sich zeigen, dass $\int (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$ erstreckt über die Begrenzung eines vollständig innerhalb T liegenden Rechtecks R den Werth Null hat.

Es seien (x_0, y_0), (x_1, y_0), (x_1, y_1), (x_0, y_1) die Eckpunkte von R, (x, y) irgend einer und jeder beliebige Punkt im Innern oder auf der Begrenzung von R. Alsdann definire ich für dieses Gebiet R zwei Functionen $W_1(x, y)$,

---

[1]) Es sind somit die genannten Functionen gleichmässig stetig im Innern und auf der Begrenzung jedes innerhalb T liegenden Gebietes T', wobei man die Begrenzung von T' derjenigen von T beliebig nahe bringen kann.

$W_2(x, y)$ als diejenigen besonderen Werthe des Integrals $\int\limits_{x_0, y_0}^{x, y} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$, welche sich ergeben, wenn man einmal auf den Schenkeln des rechten Winkels über (x, y_0), das andere Mal über (x_0, y) bis (x, y) integrirt, also:

$$(25) \quad \begin{cases} \text{(a)} & W_1(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(\xi, \eta_0) \cdot d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, \eta) \cdot d\eta \\ \text{(b)} & W_2(x, y) = \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, \eta) \cdot d\eta + \int\limits_{x_0}^{x} P(\xi, y) \cdot d\xi. \end{cases}$$

Es sind hiernach $W_1(x, y)$, $W_2(x, y)$ für das betreffende Gebiet eindeutig definirte, lediglich von (x, y) abhängende Functionen, und zwar hat man offenbar insbesondere:

$$(26) \qquad W_1(x_0, y_0) = W_2(x_0, y_0) = 0.$$

Man erkennt ferner leicht, dass $W_1(x,y)$, $W_2(x,y)$ stetige Functionen der beiden Variablen (x, y) sind. Bezeichnet man mit h, k zwei beliebige (positive oder negative) Incremente von x, y (wobei die Stelle $(x + h,\ x + k)$ auch eventuell ausserhalb von R fallen kann, in welchem Falle h, k von vornherein so klein anzunehmen sind, dass das durch die vier Eckpunkte: (x_0, y_0), $(x + h, y_0)$, $(x + h, y + k)$, $(x_0, y + k)$ definirte Rechteck noch innerhalb T liegt), so wird:

$$W_1(x + h,\ y + k) = \int\limits_{x_0}^{x+h} P(\xi, y_0) \cdot d\xi + \int\limits_{y_0}^{y+k} Q(x + h, \eta) \cdot d\eta$$

und daher:

$$W_1(x + h,\ y + k) - W_1(x, y) = \int\limits_{x}^{x+h} P(\xi, y_0) \cdot d\xi$$
$$+ \int\limits_{y}^{y+k} Q(x + h, \eta) \cdot d\eta + \int\limits_{y_0}^{y} \{Q(x + h, \eta) - Q(x, \eta)\} \cdot d\eta$$
$$= h \cdot P(x + \vartheta \cdot h, y_0) + k \cdot Q(x + h, y + \vartheta' \cdot k)$$
$$+ \Delta \cdot \{Q(x + h, y_0 + \vartheta'' \cdot \Delta) - Q(x, y_0 + \vartheta'' \cdot \Delta)\}$$

wo: $\Delta = y - y_0$ und $\vartheta, \vartheta', \vartheta''$ in den Grenzen $0 \cdots 1$ liegen. Da die Stellen:

$$(x + \vartheta \cdot h, y_0), \ (x + h, y + \vartheta' \cdot k), \ (x + h, y_0 + \vartheta'' \cdot \Delta), \\ (x, y_0 + \vartheta'' \cdot \Delta)$$

sämmtlich dem Gebiete T angehören, so können die beiden ersten Glieder der rechten Seite wegen der Endlichkeit von $P(\xi, \eta)$, $Q(\xi, \eta)$, das dritte wegen der Stetigkeit von $Q(\xi, \eta)$ durch Wahl einer oberen Grenze für h und k beliebig klein gemacht werden, womit die Stetigkeit von $W_1(x, y)$ in dem behaupteten Umfange erwiesen ist. Ganz analog erkennt man aber auch die Stetigkeit von $W_2(x, y)$.

Ferner ergibt sich durch Differentiation von Gl. (25a) nach y und Gl. (25b) nach x unmittelbar:

$$\frac{\partial W_1}{\partial y} = Q(x, y), \quad \frac{\partial W_2}{\partial x} = P(x, y) \tag{27}$$

und sodann aus (25a) durch Differentiation nach x zunächst:

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = P(x, y_0) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^{y} Q(x, \eta) \cdot d\eta.$$

In Folge der gleichmässigen Stetigkeit von $Q(x, \eta)$ als Function der beiden Veränderlichen (x, η) darf man im letzten Gliede die Reihenfolge der Differentiation und Integration vertauschen und erhält daher mit Berücksichtigung der nach Voraussetzung bestehenden Beziehung (24):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^{y} Q(x, \eta) \cdot d\eta &= \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q(x, \eta)}{\partial x} \cdot d\eta \\ &= \int_{y_0}^{y} \frac{\partial P(x, \eta)}{\partial \eta} \cdot d\eta \\ &= P(x, y) - P(x, y_0) \end{aligned}$$

und somit:

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = P(x, y). \tag{28a}$$

Analog ergibt sich:

$$\frac{\partial W_2}{\partial y} = Q(x, y). \tag{28b}$$

Die Gleichungen (27), (28) lehren also, dass für alle (x, y), welche dem Innern oder der Begrenzung von R angehören, die Beziehungen bestehen:

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = \frac{\partial W_2}{\partial x} \qquad \frac{\partial W_1}{\partial y} = \frac{\partial W_2}{\partial y} \tag{29}$$

und es können daher die für das nämliche Werthegebiet als stetig erkannten Functionen $W_1(x, y)$, $W_2(x, y)$ nach einem bekannten Satze höchstens um eine additive Constante verschieden sein, welche aber offenbar den Werth Null haben muss, da nach Gl. (26) $W_1(x_0, y_0) = W_2(x_0, y_0)$ ist. Man findet somit schliesslich insbesondere:

$$W_1(x_1, y_1) = W_2(x_1, y_1) \tag{30}$$

d. h. das Integral $\int\limits_{x_0, y_0}^{x_1, y_1} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$ erstreckt über je ein Paar anstossender Rechteckseiten hat den gleichen Werth, oder anders ausgesprochen: Das Integral, continuirlich erstreckt über die Begrenzung des Rechtecks, hat den Werth Null.

Angenommen nun, man habe ein innerhalb T liegendes, von einem oder mehreren Treppenpolygonen volltsändig begrenztes zusammenhängendes Flächenstück S, so lässt sich ein solches stets mit Hülfe einer endlichen Anzahl von Parallelen zu den Coordinatenaxen in eine endliche Anzahl von Rechtecken r_ν $(\nu = 1, 2, \cdots n)$ zerlegen, deren Begrenzung theils von den einzelnen Stücken der ursprünglichen

Treppenbegrenzung, theils von Stücken jener Hülfslinien gebildet wird, und zwar gehört jedes Stück der ursprünglichen Begrenzung nur einem einzigen (r_ν), dagegen jedes Stück einer Hülfslinie stets zwei benachbarten (r_ν) gleichzeitig an. Man hat nun zunächst:

$$\sum_{1}^{n}{}_{\nu} \int_{(r_\nu)} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) = 0 \tag{31}$$

da jedes einzelne dieser Rechtecksintegrale verschwindet. Führt man hierbei alle Integrationen in demselben Sinne aus, etwa dem sog. positiven, wo also die Fläche jedes einzelnen r_ν bei der Integration über den Umfang zur Linken bleibt, so wird offenbar über jedes Stück einer Hülfslinie genau zweimal und zwar in entgegengesetzter Richtung integrirt: es heben sich also die betreffenden Integralbestandtheile vollständig heraus, während nur die auf die Stücke der ursprünglichen Begrenzung (S) bezüglichen Integrale mit einer bestimmten, eindeutig vorgeschriebenen Integrationsrichtung zurückbleiben. Durch Addition dieser Theilintegrale geht dann Gl. (31) in die folgende über:

$$\int_{(S)} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) = 0 \tag{32}$$

wobei offenbar die Integration in dem Falle, dass (S) aus mehreren Treppenpolygonen besteht, über das äussere Polygon in der schlechthin als positiv geltenden (d. h. in der Richtung der wachsenden Winkel fortschreitenden), über jedes innere Polygon in der entgegengesetzten Richtung auszuführen ist.

Hat man schliesslich ein dem Gebiete T angehöriges, von einer oder mehreren Randcurven vollständig begrenztes, zusammenhängendes Flächenstück T', so kann man diesen Randcurven zunächst nach § 2 eine entsprechende Anzahl von Treppenpolygonen mit der Gesammtbegrenzung (S) zuordnen, dergestalt, dass die Differenz:

$$\int_{(T')} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) - \int_{(S)} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$$

beliebig klein wird. Und da das zweite Integral den Werth Null hat, das erste aber einen bestimmten Werth haben muss, so folgt, dass auch:

$$(33) \qquad \int_{(T')} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) = 0$$

sein muss.

Bedeutet sodann U irgend ein einfach zusammenhängendes in T liegendes Flächenstück, und sind (x_0, y_0), (x_1, y_1) zwei beliebige Punkte in U, so werden irgend zwei innerhalb U zwischen (x_0, y_0) und (x_1, y_1) verlaufende Curven C und C', die sich weder selbst noch gegenseitig schneiden, einen Flächentheil von U vollständig begrenzen, sodass also das betreffende Integral über diese Begrenzung verschwindet. Man erhält somit, wenn man als Integrationsrichtung auf C und C' die von (x_0, y_0) nach (x, y) festhält:

$$(34) \qquad \int_{(C)} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) = \int_{(C')} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta).$$

Dieses Resultat wird aber offenbar durch das Auftreten etwaiger Doppelpunkte bei C und C' in keiner Weise alterirt, da die Integrale über die auf diese Weise entstehenden Schleifen nach Gl. (33) jedesmal verschwinden.

Wenn endlich die Curven C und C' sich auch gegenseitig schneiden, sodass sie also mehrere nur in diesen Schnittpunkten zusammenstossende Flächentheile vollständig begrenzen, so werden zunächst die Integrale über die betreffenden Einzelbegrenzungen verschwinden müssen. Wählt man daher die einzelnen Integrationsrichtungen in der Weise, dass über die Theile der Curve C jedesmal in der Richtung $(x_0, y_0) \cdots (x, y)$, über diejenigen von C' in entgegengesetzter Richtung integrirt wird, so ergibt sich durch Addition der betreffenden Theilintegrale und schliessliche Umkehrung der

Integrationsrichtung für alle auf Stücke von C' zu erstreckenden Integrale wiederum die Richtigkeit der Beziehung (34).

Hieraus folgt aber, dass das Integral $\int\limits_{x_0, y_0}^{x,y} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$ innerhalb des Gebietes U einen vom Integrationswege unabhängigen, eindeutig bestimmten Werth besitzt, sodass also in diesem Gebiete:

$$(35) \qquad W(x, y) = \int\limits_{x_0, y_0}^{x,y} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$$

bei variablem (x, y) und constantem (x_0, y_0) eine eindeutige Function von (x, y) darstellt. Bildet man sodann unter der Voraussetzung, dass die Stelle $x + h,\ y + k)$ gleichfalls dem Gebiete U angehört:

$$W(x+h, y+k) = \int\limits_{x_0, y_0}^{x+h,\, y+k} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$$

so kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit den Integrationsweg dieses Integrals über (x, y) führen und erhält also durch Subtraction:

$$W(x+h, y+k) - W(x, y) = \int\limits_{x, y}^{x+h,\, y+k} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$$

und da man auch diesem Integrale ohne Beschränkung der Allgemeinheit einen speciellen Integrationsweg zutheilen kann, nämlich die Horizontale von (x, y) bis $(x+h, y)$, dann die Verticale von $(x+h, y)$ bis $(x+h, y+k)$ (wobei nur h, k von vornherein so klein anzunehmen sind, dass dieser Weg noch dem Gebiete U angehört), so folgt:

$$\begin{aligned} &W(x+h, y+k) - W(x, y) \\ (36) \qquad &= \int\limits_{x}^{x+h} P(\xi, y) \cdot dx + \int\limits_{y}^{y+k} Q(x+h, \eta) \cdot d\eta \\ &= h \cdot P(x + \vartheta h, y) + k \cdot Q(x+h, \eta + \vartheta' k) \end{aligned}$$

d. h. $W(x, y)$ ist eine stetige Function von (x, y).

Aus der letzten Gleichung ergibt sich dann speciell für $k=0$, bezw. $k=0$:

$$\frac{W(x+h, y)-W(x, y)}{h}=P(x+\vartheta h, y)$$

$$\frac{W(x, y+k)-W(x, y)}{k}=Q(x, y+\vartheta' k)$$

und hieraus durch Uebergang zur Grenze $h=0$, bezw. $k=0$:

$$(37) \qquad \frac{\partial W}{\partial x}=P(x, y) \qquad \frac{\partial W}{\partial y}=Q(x, y).$$

Hiemit ist aber der ausgesprochene Satz in allen Theilen bewiesen.

Zusätze. 1) Der Satz erleidet keine Aenderung, wenn die ursprünglich als ausnahmslos vorausgesetzte Stetigkeit von P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ gewisse Unterbrechungen erleidet oder die Relation $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ nicht durchgängig erfüllt ist. Man zeigt dies in der bekannten Weise, indem man die Ausnahmestellen, die für P, Q nur in einzelnen Punkten, für $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ (d. h. sowohl hinsichtlich der Stetigkeit dieser beiden Functionen, als auch in Bezug auf die Relation: $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$) auch in einzelnen Linien bestehen dürfen, zuächst durch beliebig nahe anzuschmiegende, zur Gesammtbegrenzung von T' hinzuzufügende Curven ausschliesst und sodann nachweist, dass die Integrale über jede dieser Curven beliebig klein gemacht werden können, also das Gesammtresultat nicht alteriren.[1])

[1]) Der auf der Reduction des Doppelintegrals

$$\int\int\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\, dy$$

beruhende Beweis gestattet freilich in Bezug auf $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ von vorn-

2) Erstreckt sich die gleichmässige Stetigkeit von P, Q mit eventuellem Ausschluss einzelner Punkte auch noch auf die Begrenzung von T, so verschwindet das Integral $\int (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta)$, auch wenn man es über die Begrenzung (T') erstreckt. Man erkennt dies, indem man zunächst ein Treppenpolygon (S) construirt denkt, dessen Ecken abwechselnd auf der Begrenzung und im Innern von T liegen, und sodann durch Verbindung der freien Eckpunkte ein gewöhnliches offenbar ganz innerhalb T liegendes Polygon (P) herstellt. Bei hinlänglicher Verkleinerung der Treppenstufen unterscheidet sich dann das Treppenintegral über (S) beliebig wenig von den beiden Integralen über (T) und (P), also kann auch die Differenz der beiden letzteren Integrale beliebig klein gemacht werden. Und da das Integral über (P) verschwindet, dasjenige über (T) jedenfalls einen bestimmten Werth haben muss, so folgt, dass dieser Werth gleichfalls Null sein muss.

---

herein eine etwas allgemeinere Fassung der betreffenden Bedingungen, insofern für die Gültigkeit des Satzes nicht die Stetigkeit, sondern nur die Integrabilität von $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$, genau gesagt die eindeutige Existenz von $\int\int \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy$, $\int\int \frac{\partial Q}{\partial x} dx\, dy$ in Frage kommt. Die genauere Feststellung der hiefür noch zulässigen Unstetigkeiten von $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial x}$ führt indessen auf Betrachtungen, mit deren Hülfe man ebensogut auch den hier gegebenen Beweis in analoger Weise verallgemeinern könnte. In der That braucht ja die Bedingung

$$\frac{\partial W_1}{\partial x} = \frac{\partial W_2}{\partial x} \qquad \frac{\partial W_1}{\partial y} = \frac{\partial W_2}{\partial y}$$

keineswegs für ein gewisses Gebiet R als ausnahmslos erfüllt vorausgesetzt werden, um daraus die Uebereinstimmung der beiden stetigen Functionen $W_1(x, y)$, $W_2(x, y)$ (bis auf eine additive Constante) zu erschliessen. Ich gehe indessen auf derartige Verallgemeinerungen hier nicht ein, da mir dieselben für die Theorie der Functionen complexer Variablen keine sonderliche Bedeutung zu besitzen scheinen.

3) Kennt man eine innerhalb irgend eines einfach zusammenhängenden Flächenstückes U von T eindeutige und stetige Function $F(x, y)$ mit den partiellen Differentialquotienten:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y) \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y),$$

so muss offenbar für jeden innerhalb U verlaufenden Integrationsweg die Beziehung bestehen:

$$F(x,y) = \int_{x_0, y_0}^{x,y} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) + C,$$

da das rechtsstehende Integral mit $F(x,y)$ innerhalb U die Stetigkeit und die partiellen Differentialquotienten $P(x, y)$, $Q(x,y)$ gemein hat. Da aber das Integral für $x = x_0$, $y = y_0$ verschwindet, so folgt:

$$F(x_0, y_0) = C$$

also schliesslich:

$$\int_{x_0, y_0}^{x,y} (P \cdot d\xi + Q \cdot d\eta) = F(x,y) - F(x_0, y_0).$$

3

Ueber die Entwickelung eindeutiger analytischer Functionen in Potenzreihen.

Von

Alfred Pringsheim.

Aus den Sitzungsberichten der mathematisch-physikalischen Classe der k. bayer. Akad. d. Wiss. 1895. Bd. XXV. Heft I.

München 1895.

Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub.



Ueber die Entwickelung eindeutiger analytischer Functionen in Potenzreihen.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 9. Februar.*)

Begründet man die Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen auf die Cauchy'sche Definition der monogenen Functionen und ihrer Integrale, so ergibt sich die Entwickelbarkeit einer für $0 \leq |x| < R$ bezw. für $R_0 < |x| < R$ eindeutigen und monogenen Functionen nach positiven ganzen Potenzen von x (der „Cauchy'sche" Satz), bezw. nach positiven und negativen ganzen Potenzen von x (der „Laurent'sche" Satz) sowie der wahre Convergenz- und Geltungsbereich der betreffenden Entwickelungen ganz unmittelbar aus den bekannten Cauchy-schen Integralsätzen. Wesentlich anders liegt die Sache, wenn man die Eigenschaften der im Sinne des Herrn Weierstrass analytischen und monogenen, d. h. durch ein „Functionenelement" von der Form $\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu \cdot (x - x_0)^\nu$ und dessen analytische Fortsetzungen definirten Functionen auf elementarem Wege, also insbesondere ohne Anwendung der complexen Integration ableiten will. Gestaltet sich hier schon die Feststellung des wahren Convergenzbezirkes für die Entwickelung $\sum_0^\infty{}_\nu\, a_\nu\, (x - x_0)^\nu$ einer innerhalb eines einfach

zusammenhängenden, die Stelle x_0 enthaltenden Gebietes eindeutigen und analytischen Function ziemlich umständlich,[1]) so bietet die Erkenntniss der blossen Möglichkeit, eine in einem Ringgebiete um die Stelle x_0 eindeutige und analytische Function nach positiven und negativen Potenzen von $(x - x_0)$ zu entwickeln, bei dem jetzigen Stande der Theorie ganz unverhältnissmässige Schwierigkeiten: man erschliesst dieselbe entweder nach dem Vorgange des Herrn Mittag-Leffler[2]) aus einem von Herrn Weierstrass abgeleiteten Hülfssatze von ziemlich verwickelter Beschaffenheit,[3]) oder etwas kürzer mit Hülfe einer von Scheeffer herrührenden, im Grunde genommen zwar auf denselben Principien beruhenden, aber directeren Beweismethode.[4]) Indessen selbst dieser auf den ersten Blick relativ einfach erscheinende Scheeffer'sche Beweis setzt doch eine Reihe von Vorkenntnissen, namentlich über die Eigenschaften mehrdeutiger Functionen voraus, welche es unmöglich machen, den betreffenden Satz an der für einen natürlichen und consequenten Aufbau der elementaren Functionentheorie erforderlichen Stelle erscheinen zu lassen.

Hiernach dürfte es nicht ohne Interesse erscheinen, wenn ich im Folgenden einen neuen Beweis für die fragliche Entwickelungsform einer analytischen Function mittheile. Die Grundlagen der hierbei von mir angewendeten Methode finden sich zwar schon im Wesentlichen in einer Cauchyschen Abhandlung: „Considérations nouvelles sur la théorie des suites et sur les lois de leur convergence“ [5]): allein abgesehen davon, dass die dort gegebene

---

[1]) Cf. Stolz, Vorlesungen über allg. Arithmetik, Bd. II, p. 180. Biermann, Theorie der analyt. Functionen, p. 165.

[2]) Acta mathematica, Bd. IV. p. 80.

[3]) Abhandl. aus der Functionenlehre, p. 28.

[4]) Acta mathematica, Bd. IV. p. 375.

[5]) Exercices d'Analyse et de Physique mathématique, T. I, p. 269.

Darstellung sich nur auf die Entwickelung einer Function nach positiven Potenzen bezieht, so enthält dieselbe auch verschiedene Lücken principieller Natur, und hierin mag wohl der Grund davon zu suchen sein, dass man, soviel ich weiss, auf jene Methode nicht wieder zurückgekommen ist,[1]) deren Kern in der Anwendung gewisser Mittelwerthe an Stelle der sonst bei der Coefficientendarstellung üblichen Integrale liegt. Derartige Mittelwerthe — nämlich Grenzwerthe von der Form $\lim_{n=\infty} \left\{ \frac{1}{n} \cdot \sum_0^{n-1} {}_\nu f(x_{n,\nu}) \right\}$, wo die $x_{n,\nu}$ für jedes n und ν arithmetisch wohl definirte Zahlen von der Beschaffenheit bedeuten, dass $|x_{n,\nu+1} - x_{n,\nu}|$ mit wachsendem n beliebig klein wird — kann man natürlich stets auch als specielle Fälle von bestimmten Integralen auffassen. Immerhin haben dieselben mit dem Infinitesimalbegriff in Wahrheit absolut nichts zu thun, da es sich bei ihrer Bildung keineswegs um eine Summe schliesslich „unendlich

---

[1]) Ich bin nachträglich durch Herrn Dyck darauf aufmerksam gemacht worden, dass sich in: Serret, Cours de calcul différentiel et intégral, T. I, p. 570 (in der deutschen Ausgabe von Harnack, T. I, p. 527) gleichfalls die Ableitung der Mac Laurin'schen Reihe mit Hülfe von Mittelwerthen findet. Die dort gegebene Darstellung ist im Wesentlichen eine Reproduction der im Texte citirten Cauchy'schen, bei welcher die erwähnten Lücken vermieden sind; allein der fragliche Beweis hat hierbei vollständig seinen elementaren Charakter verloren. Die dabei benützten „Mittelwerthe" sind in Wahrheit nur umständlicher geschriebene bestimmte Integrale mit veränderlichen Grenzen, die ausserdem noch von einem veränderlichen Parameter abhängen. Nach beiden Grössen wird differenzirt, wobei der Satz von der Differentiation eines bestimmten Integrals nach der oberen Grenze, sodann auch derjenige von der Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge in Anwendung kommt; kurzum dieser Beweis gehört vollständig der Infinitesimalrechnung an und erscheint in der That weit einfacher und durchsichtiger, wenn man statt der benützten Mittelwerthe die üblichen Integralbezeichnungen anwendet.

klein" werdender, sondern lediglich um eine Summe wohl definirter, stets endlich bleibender Grössen, dividirt durch deren Anzahl, handelt. Hiernach ist aber ein solcher Mittelwerth genau in demselben Sinne „elementar" wie jeder gewöhnliche, von einer positiv wachsenden ganzen Zahl abhängige Grenzwerth, z. B. wie die sogenannte Summe einer unendlichen Reihe (die man ja schliesslich auch stets als speciellen Fall eines bestimmten Integrales auffassen kann), sodass gegen die Einführung derartiger Mittelwerthe in die elementare Functionentheorie irgendwelche principielle Bedenken schwerlich erhoben werden können, zumal die fraglichen Sätze auf diesem Wege eine Einfachheit und Abrundung erhalten, welche die mit Hülfe der complexen Integration erzielte noch merklich übertrifft. So lässt sich insbesondere der für diese ganze Betrachtung grundlegende Satz, dass der Mittelwerth einer eindeutigen analytischen Function $f(x)$ für die Stellen $|x| = r$ einen von r unabhängigen bestimmten Werth besitzt, weit leichter völlig streng begründen, als der entsprechende Cauchy'sche Integral-Satz für monogene Functionen (im Cauchy'schen Sinne); und es gestaltet sich die Darstellung der Entwicklungscoefficienten einer Potenzreihe durch solche Mittelwerthe wesentlich einfacher und natürlicher als die betreffende Integral-Darstellung, welche die Einführung des völlig fremdartigen, d. h. zu der Potenzentwickelung einer beliebigen analytischen Function in gar keiner nothwendigen Beziehung stehenden Factors $\frac{1}{2\pi i}$ nach sich zieht.

Im Uebrigen habe ich, um der folgenden Betrachtung einen möglichst elementaren Charakter zu wahren, absichtlich davon Abstand genommen, die Lehre von den Einheitswurzeln oder gar deren Darstellung durch trigonometrische Functionen, ja selbst auch nur den Satz von der Wurzelexistenz einer algebraischen Gleichung zu benützen. Vielmehr stütze

ich mich lediglich auf den elementaren Satz, dass eine quadratische Gleichung von der Form $x^2 = \beta + \gamma i$ stets zwei und nur zwei verschiedene, vermittelst reeller Quadratwurzelausziehungen zu berechnende Wurzeln besitzt.

§ 1.

Ist $\gamma > 0$, β beliebig, so hat man bekanntlich:

$$(1) \qquad \sqrt{\beta + \gamma i} = \pm \left\{ \sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{\beta^2 + \gamma^2} + \tfrac{1}{2}\beta} + i \sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{\beta^2 + \gamma^2} - \tfrac{1}{2}\beta} \right\},$$

wo sämmtliche Quadratwurzeln auf der rechten Seite positiv zu nehmen sind. Dabei soll derjenige Wurzelwerth, welcher resultirt, wenn man auf der rechten Seite als Gesammtvorzeichen das positive wählt, der Kürze halber schlechthin als der positive Werth von $\sqrt{\beta + \gamma i}$ bezeichnet werden.

Sei nun ferner $N = 2^n$, so lassen sich offenbar die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung

$$(2) \qquad x^N = 1$$

mit Hülfe von n successiven Quadratwurzelausziehungen berechnen, dergestalt, dass allgemein:

$$(3) \qquad x = \pm \sqrt[\scriptstyle 1]{\pm \sqrt[\scriptstyle 2]{\pm \cdots \pm \sqrt[\scriptstyle n-1]{\pm \sqrt[\scriptstyle n]{1}}}}$$

(wobei die Indices an den einzelnen Wurzelzeichen lediglich zur Charakterisirung ihrer Anzahl dienen). Daraus folgt zunächst, dass die Anzahl der verschiedenen Wurzelwerthe nur $\leqq 2^n$, also $\leqq N$ sein kann.

Unter den auf diese Weise sich ergebenden Wurzeln ist eine besonders ausgezeichnet, welche aus $\sqrt[4]{1} = + i$ ent-

steht, wenn man bei jeder weiteren Wurzelausziehung die im obigen Sinne definirte positive Wurzel beibehält. Bezeichnet man dieselbe durch:

$$\alpha_n = \beta_n + \gamma_n i \tag{4}$$

so ergibt sich mit Hülfe der Formel (1):

$$\begin{cases} \beta_n = \sqrt[1]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}\sqrt[n-3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt[n-2]{\frac{1}{2}}}}} \\ \gamma_n = \sqrt[1]{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt[2]{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}\sqrt[n-3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt[n-2]{\frac{1}{2}}}}} \end{cases} \tag{5}$$

Man erkennt alsdann leicht:

1) dass keine Wurzel der Gl. (2) mit positiv reellem und positiv imaginärem Theile existirt, welche näher an der positiven Einheit liegt als α_n;

2) dass die Potenzen $\alpha_n^0, \alpha_n^1, \cdots \alpha_n^{N-1}$ durchweg von einander verschieden sind und der Gl. (2) genügen, also die sämmtlichen Wurzeln dieser Gleichung darstellen;

3) dass diesen N-Werthen ebensoviele, in der gleichen Anordnung auf einander folgende, aequidistante Punkte auf dem Einheitskreise entsprechen, deren constanter Abstand $|1 - \alpha_n|$ der Bedingung genügt:

$$|1 - \alpha_n| < \left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)^{n-3}. \tag{6}$$

Nun bedeute $f(x)$ eine für alle x mit dem absoluten Betrage $|x| = r$ eindeutig definirte und im Allgemeinen stetige Function, so soll gesetzt werden:

$$\mathfrak{M}_n(f(r)) = \frac{1}{N}\sum_0^{N-1}{}_\nu\, f(\alpha_n^\nu \cdot r), \tag{7}$$

sodass also $\mathfrak{M}_n(f(r))$ das arithmetische Mittel aus den Werthen bedeutet, welche $f(x)$ an den N-Stellen $x = \alpha_n^\nu \cdot r$ ($\nu = 0, 1, \cdots N-1$) annimmt. Aus der vorausgesetzten Stetigkeit von $f(x)$ längs des Kreises $|x| = r$ und der Beziehung (6) ergibt sich sodann, dass $\mathfrak{M}_n(f(r))$ mit unbegrenzt wachsenden Werthen von n einer festen Grenze zustrebt, sodass die Bezeichnung:

$$\mathfrak{M}(f(r)) = \lim_{n=\infty} \mathfrak{M}_n(f(r)) \tag{8}$$

einen bestimmten Sinn besitzt. Zugleich erkennt man unmittelbar aus der Definition von $\mathfrak{M}(f(r))$, dass:

$$\mathfrak{M}(K \cdot f(r)) = K \cdot \mathfrak{M}(f(r)), \tag{9}$$

wenn K einen beliebigen für alle x mit dem absoluten Betrage r constanten Factor bedeutet; und ferner:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{M}(f_1(r) + \cdots + f_k(r)) \\ &= \mathfrak{M}(f_1(r)) + \cdots + \mathfrak{M}(f_k(r)), \end{aligned} \tag{10}$$

wenn man mit $f_1(x) \ldots f_k(x)$ Functionen von analoger Beschaffenheit wie $f(x)$ bezeichnet.

Ist jetzt $\varphi(x)$ eindeutig und analytisch für alle x des Gebietes $R_0 \leqq |x| \leqq R$ (wobei eventuell auch $R_0 = 0$ sein kann), so besteht der Satz, dass $\mathfrak{M}(\varphi(r))$ für $R_0 \leqq r \leqq R$ einen bestimmten von r unabhängigen Werth besitzt, sodass also:

$$\mathfrak{M}(\varphi(r)) = \mathfrak{M}(\varphi(r')),$$

wenn $R_0 \leqq r < r' \leqq R$.

Der Beweis dieses Satzes beruht auf einem Hülfssatze[1]) des Inhalts, dass der Differenzenquotient $\dfrac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$

[1]) Beweis dieses Hülfssatzes s. am Ende von § 1.

für alle x des betreffenden Gebietes und hinlänglich kleine Werthe von h eine gleichmässig stetige Function von h ist, d. h. man kann jeder beliebig kleinen positiven Grösse ε eine positive Grösse δ so zuordnen, dass für alle x des Gebietes: $R_0 \leqq |x| \leqq R$ die Beziehung besteht:

$$(10) \qquad \left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \frac{\varphi(x+k) - \varphi(x)}{k} \right| < \varepsilon, \quad \text{falls} \begin{Bmatrix} |h| \\ |k| \end{Bmatrix} \leqq \delta.$$

Angenommen nun, man habe $r > 0$ beliebig klein fixirt, so bestimme man zunächst eine positive ganze Zahl m so, dass die positive Grösse:

$$\frac{r' - r}{m} = \delta$$

klein genug wird, um die Gültigkeit der Ungleichung (10) für $|h| \leqq \delta$, $|k| \leqq \delta$ zu sichern. Wählt man hierauf die positive ganze Zahl n bezw. $N = 2^n$ gross genug, dass:

$$r' \cdot |1 - \alpha_n| \leqq \delta \quad (\text{also a fortiori } r \cdot |1 - \alpha_n| < \delta),$$

so hat man:

$$\left| \frac{\varphi(\alpha_n^\nu \cdot (r+\delta)) - \varphi(\alpha_n^\nu \cdot r)}{\alpha_n^\nu \cdot \delta} - \frac{\varphi(\alpha_n^{\nu+1} \cdot r) - \varphi(\alpha_n^\nu \cdot r)}{\alpha_n^\nu (\alpha - 1) \cdot r} \right| < \varepsilon$$

oder nach Multiplication mit δ und Berücksichtigung von $|\alpha_n^\nu| = 1$:

$$\left| \varphi(\alpha_n^\nu \cdot (r+\delta)) - \varphi(\alpha_n^\nu \cdot r) - \delta \cdot \frac{\varphi(\alpha_n^{\nu+1} \cdot r) - \varphi(\alpha_n^\nu \cdot r)}{(\alpha - 1) \cdot r} \right| < \delta \cdot \varepsilon$$

Setzt man der Reihe nach $\nu = 0, 1, \ldots (N-1)$ und addirt die resultirenden Ungleichungen, so heben sich offenbar alle von dem dritten Gliede der linken Seite herrührenden Be-

standtheile vollständig heraus (NB. es ist ja insbesondere $a_n^N \cdot r = a_n^0 \cdot r$), und es ergibt sich:

$$\left| \sum_0^{N-1} {}_\nu \varphi(a_n^\nu \cdot (r+\delta)) - \sum_0^{N-1} {}_\nu \varphi(a_n^\nu \cdot r) \right| < N \cdot \delta \cdot \varepsilon$$

oder nach Division mit N:

$$| \mathfrak{M}_n(\varphi(r+\delta)) - \mathfrak{M}_n(\varphi(r)) | < \delta \cdot \varepsilon$$

und daher, wenn man r ins Unendliche wachsen lässt:

$$| \mathfrak{M}(\varphi(r+\delta)) - \mathfrak{M}(\varphi(r)) | \leqq \delta \cdot \varepsilon.$$

Schreibt man in dieser Ungleichung $r + (\mu - 1)\delta$ statt r (wo: $r + (\mu - 1) \cdot \delta < r'$ für $\mu = 1, 2, \ldots m$ — also auch: $(r + (\mu - 1)\delta) \cdot |1 - a_n| < \delta$), so wird:

$$| \mathfrak{M}(\varphi(r + \mu\delta)) - \mathfrak{M}(\varphi(r + \overline{\mu - 1} \cdot \delta)) | \leqq \delta \cdot \varepsilon,$$

und wenn man die für $\mu = 1, 2, \ldots m$ hieraus resultirenden Ungleichungen addirt und beachtet, dass: $m \cdot \delta = r' - r$, schliesslich:

$$| \mathfrak{M}(\varphi(r')) - \mathfrak{M}(\varphi(r)) | \leqq (r' - r) \cdot \varepsilon.$$

Da aber ε von vornherein beliebig klein angenommen werden kann, und andererseits $\mathfrak{M}(\varphi(r'))$, $\mathfrak{M}(\varphi(r'))$ eindeutig bestimmte Werthe besitzen, so muss geradezu:

$$(11) \qquad | \mathfrak{M}(\varphi(r')) - \mathfrak{M}(\varphi(r)) | = 0$$

sein, womit die ausgesprochene Behauptung bewiesen ist.

Beweis des Hülfssatzes. Für jede Stelle x des Bereiches $R_0 \leqq |x| \leqq R$ gilt eine Entwickelung von der Form:

$$\varphi(x+h) = \sum_0^\infty {}_\nu \frac{\varphi^{(\nu)}(x)}{\nu!} \cdot h^\nu$$

deren wahrer Convergenzradius bekanntlich eine mit x stetig veränderliche, positive Grösse ist und demnach ein bestimmtes von Null verschiedenes Minimum ϱ besitzen muss. Fixirt man nun eine positive Grösse:

$$\delta < \varrho$$

so ist für alle x und h des Bereiches: $R_0 \leqq |x| \leqq R$ und $|h| \leqq \delta$ die Reihenentwickelung (12) gültig und absolut convergent, und daher auch in dem gleichen Umfange:

$$\varphi''(x+h) = \sum_0^{\infty}{}_{\nu} \frac{\varphi^{(\nu+2)}(x)}{\nu!} \cdot h^{\nu}.$$

Da aber für den angegebenen Werthebereich $\varphi''(x+h)$ eine stetig veränderliche Function ihres Argumentes ist, so besitzt daselbst $|\varphi''(x+h)|$ ein bestimmtes endliches Maximum g, und es ist daher nach einem bekannten Satze:

$$(13) \qquad \left| \frac{\varphi^{(\nu+2)}(x)}{\nu!} \cdot h^{\nu} \right| \leqq g \qquad \text{für:} \begin{cases} R_0 \leqq |x| \leqq R \\ |h| \leqq \delta. \end{cases}$$

Setzt man nun Gl. (12) in die Form:

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \varphi'(x) = h \cdot \sum_0^{\infty}{}_{\nu} \frac{\varphi^{(\nu+2)}(x)}{(\nu+2)!} \cdot h^{\nu},$$

so hat man für $h \leqq \delta$ mit Benützung von Ungl. (13):

$$\left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \varphi'(x) \right| \leqq g \cdot |h| \sum_0^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}$$
$$\text{d. h.} \leqq g \cdot |h|$$

und daher, wenn auch $|k| \leqq \delta$ angenommen wird:

$$(14) \qquad \left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \frac{\varphi(x+k) - \varphi(x)}{k} \right|$$
$$\leqq g \, \{|h| + |k|\} \leqq 2\, g \cdot \delta,$$

sodass also die fragliche Differenz unter ε herabsinkt, wenn von vornherein $\delta < \frac{\varepsilon}{2g}$ angenommen wird.

§ 2.

Lehrsatz. Ist $f(x)$ eine eindeutige und analytische Function für alle Stellen x des Gebietes $R_0 \leqq |x| \leqq R$, so gilt für dieses Gebiet die Entwickelung:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_\mu \, a_\mu \cdot x^\mu$$

wo:

$$a_\mu = \mathfrak{M}\,(r^{-\mu} \cdot f(r))$$

und r einen beliebigen Werth des Intervalles $R_0 \leqq r \leqq R$ bedeutet. Ist insbesondere $R_0 = 0$, so reducirt sich die obige Entwickelung auf die folgende:

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_\mu \, a_\mu \cdot x^\mu.$$

Beweis. Bezeichnet man mit x_0 irgend eine willkürlich gewählte Stelle im Innern des fraglichen Bereiches, sodass also $R_0 < |x_0| < R$ und setzt man:

$$\varphi(x) = x \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

so ist $\varphi(x)$ für alle x des Bereiches $R_0 \leqq x \leqq R$ gleichfalls eindeutig und analytisch. Man erkennt dies ohne Weiteres für jede von x_0 verschiedene Stelle x; in der Umgebung der Stelle x_0 hat man aber:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{1}^{\infty}{}_\mu \frac{f^{(\mu)}(x_0)}{\mu!} (x - x_0)^\mu$$

also:

$$\varphi(x) = x \cdot \sum_{1}^{\infty} {}_{\mu} \frac{f^{(\mu)}(x_0)}{\mu!} (x - x_0)^{\mu-1}$$

d. h. $\varphi(x)$ ist dort gleichfalls analytisch. In Folge dessen ist nach dem Satze des vorigen Paragraphen:

$$\mathfrak{M}\left(R_0 \cdot \frac{f(R_0) - f(x_0)}{R_0 - x_0}\right) = \mathfrak{M}\left(R \cdot \frac{f(R) - f(x_0)}{R - x_0}\right)$$

oder mit Berücksichtigung von Gl. (9) und (10) des § 1:

$$(15) \quad \begin{aligned} & f(x_0) \cdot \mathfrak{M}\left(\frac{R}{R - x_0}\right) - f(x_0)\, \mathfrak{M}\left(\frac{R_0}{R_0 - x_0}\right) \\ & = \mathfrak{M}\left(\frac{R \cdot f(R)}{R - x_0}\right) - \mathfrak{M}\left(\frac{R_0 f(R_0)}{R_0 - x_0}\right) \end{aligned}$$

Nun ist:

$$(16) \quad \frac{R}{R - x_0} = \sum_{0}^{m-1} {}_{\mu} \left(\frac{x_0}{R}\right)^{\mu} + \left(\frac{x_0}{R}\right)^{m} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x_0}{R}}$$

$$(17) \quad \frac{R_0}{R_0 - x_0} = -\sum_{1}^{m-1} {}_{\mu} \left(\frac{R_0}{x_0}\right)^{\mu} - \left(\frac{R_0}{x_0}\right)^{m} \cdot \frac{1}{1 - \frac{R_0}{x_0}}$$

und daher:

$$(17) \quad \begin{aligned} & \mathfrak{M}\left(\frac{R \cdot f(R)}{R - x_0}\right) \\ & = \sum_{0}^{m-1} {}_{\mu}\, \mathfrak{M}\left(R^{-\mu} \cdot f(R)\right) \cdot x_0^{\mu} + x_0^{m} \cdot \mathfrak{M}\left(\frac{f(R)}{R^{m}\left(1 - \frac{x_0}{R}\right)}\right). \end{aligned}$$

Da nun:

$$(18) \quad \left| x_0^{m} \cdot \mathfrak{M}\left(\frac{f(R)}{R^{m}\left(1 - \frac{x_0}{R}\right)}\right) \right| < \left|\frac{x_0}{R}\right|^{m} \cdot \frac{F(R)}{\left|1 - \frac{x_0}{R}\right|}$$

wenn $F(R)$ das Maximum der absoluten Beträge von $f(x)$ für $|x| = R$ bezeichnet, so folgt, dass dieser letztere Aus-

druck mit unbegrenzt wachsenden Werthen von m gegen Null convergirt, und zwar, wenn $r < R$ angenommen wird, offenbar gleichmässig für alle x_0, welche der Bedingung genügen: $|x_0| \leqq r$. Lässt man also in Gl. (17) m ins Unendliche wachsen, so wird:

$$(19) \quad \mathfrak{M}\left(\frac{R \cdot f(R)}{R - x_0}\right) = \sum_0^\infty{}_\mu \, \mathfrak{M}\,(R^{-\mu} \cdot f(R) \cdot x_0^\mu$$

wobei diese Reihe zunächst unbedingt und gleichmässig convergirt für $|x_0| \leqq r < R$. Es lässt sich indessen leicht zeigen, dass dies auch noch für $|x_0| = R$ der Fall sein muss. Da nämlich $f(x)$ nach Voraussetzung noch für $|x| = R$ analytisch sein sollte, so gehört zu jeder Stelle x' des Kreises mit dem Radius R eine angebbare Umgebung, für welche $f(x)$ nach Potenzen von $(x - x')$ entwickelbar ist. Diese Umgebung muss dann ein gewisses, von Null verschiedenes Minimum ϱ besitzen. Nimmt man alsdann eine positive Grösse $\delta < \varrho$ an, so folgt, dass $f(x)$ auch noch für $|x| \leqq R + \delta$ analytisch ist. Alsdann besteht aber eine Beziehung von der Form (19), sofern man daselbst R durch $R + \delta$ ersetzt, und diese muss nach dem Gesagten unbedingt und gleichmässig convergiren für $|x_0| \leqq r < R + \delta$, also insbesondere für $|x_0| = R$. Da aber nach dem Satze des vorigen Paragraphen:

$$\mathfrak{M}\,((R + \delta)^{-\mu} f(R + \delta)) = \mathfrak{M}\,(R^{-\mu} \cdot f(R)),$$

so ist die zuletzt genannte Entwickelung von der in Gl. (19) nicht verschieden, sodass also diese letztere in der That noch für $|x_0| = R$ unbedingt und gleichmässig convergirt.

Analog ergibt sich aus Gl. (17):

$$(20) \quad \mathfrak{M}\left(\frac{R_0 f(R_0)}{R_0 - x_0}\right)$$
$$= - \sum_1^{m-1}{}_\mu \, \mathfrak{M}\,(R_0^\mu \cdot f(R)) \cdot x_0^{-\mu} - x_0^{-m} \, \mathfrak{M}\left(\frac{R_0^m f(R_0)}{1 - \frac{R_0}{x_0}}\right)$$

Da aber:

$$(21)\qquad \left| x_0^{-m}\,\mathfrak{M}\left(\frac{R_0^m\cdot f(R_0)}{1-\frac{R_0}{x_0}}\right)\right| < \left|\frac{R_0}{x_0}\right|^m\cdot\frac{F(R_0)}{1-\left|\frac{R_0}{x_0}\right|},$$

(wenn wiederum $F(R_0)$ das Maximum von $|f(x)|$ für $|x|=R_0$ bezeichnet), und da dieser Ausdruck wegen $|x_0|>R_0$ mit unendlich wachsendem m gegen Null convergirt, so hat man:

$$(22)\qquad \mathfrak{M}\left(\frac{R_0\cdot f(R)}{R_0-x_0}\right) = -\sum_1^\infty{}_\mu\,\mathfrak{M}\left(R_0^\mu f(R)\right)\cdot x^{-\mu}.$$

Diese Reihe convergirt dann zunächst wieder unbedingt und gleichmässig für $|x_0|>R_0$: es folgt aber genau wie oben, dass dies auch noch für $|x_0|=R_0$ der Fall sein muss, sofern man vorläufig $R_0>0$ annimmt. (Der Fall $R_0=0$ wird weiter unten besprochen werden).

Da die in den Entwickelungen (19) und (22) als Coefficienten auftretenden Mittelwerthe nach dem Satze des vorigen Paragraphen (in dem durch die analytische Beschaffenheit von $f(x)$ bezw. $x^{\pm\mu}\cdot f(x)$ gegebenen Umfange) von R bezw. R_0 unabhängig sind, so kann man die Gleichungen (19) und (22) auch durch die folgenden ersetzen:

$$(23)\qquad \begin{cases} \mathfrak{M}\left(\dfrac{R\cdot f(R)}{R-x_0}\right) = \sum\limits_1^\infty{}_\mu\,\mathfrak{M}\left(r^{-\mu}\cdot f(r)\right)\cdot x_0^\mu \\[2ex] \mathfrak{M}\left(\dfrac{R_0\cdot f(R_0)}{R_0-x_0}\right) = -\sum\limits_1^\infty{}_\mu\,\mathfrak{M}\left(r^\mu\cdot f(r)\right)\cdot x_0^{-\mu} \end{cases}$$

wo r einen ganz beliebigen Werth des Intervalles $R_0\leqq r\leqq R$ bedeutet. Ersetzt man jetzt in (23) $f(x)$ durch die Einheit, so folgt insbesondere:

$$(24)\qquad \begin{cases} \mathfrak{M}\left(\dfrac{R_0}{R-x_0}\right) = \sum\limits_0^\infty{}_\mu\,\mathfrak{M}\left(r^{-\mu}\right)\cdot x_0^\mu \qquad (\text{wo: } |x_0|\leqq R) \\[2ex] \mathfrak{M}\left(\dfrac{R_0}{R_0-x_0}\right) = -\sum\limits_1^\infty{}_\mu\,\mathfrak{M}\left(r^\mu\right)\cdot x_0^{-\mu} \quad (\text{wo: } |x_0|\geqq R_0) \end{cases}$$

Nun ist aber für $\mu \geqq 1$ — falls n von vornherein so gewählt wird, dass $N = 2^n > \mu$:

$$\mathfrak{M}_n(r^{\pm\mu}) = \frac{1}{N}\sum_{0}^{N-1}{}_{\nu}\, \alpha_n^{\pm\mu\cdot\nu} \cdot r^{\pm\mu} = \frac{1}{N}\cdot r^{\pm\mu}\cdot \frac{1-\alpha_n^{\pm\mu\cdot N}}{1-\alpha_n^{\pm\mu}} = 0,$$

also auch:

$$\mathfrak{M}(r^{\pm\mu}) = 0.$$

Dagegen für $\mu = 0$, offenbar:

$$\mathfrak{M}_n(r^0) = 1, \text{ also auch: } \mathfrak{M}(r^0) = 1,$$

sodass die Gleichungen (24) sich auf die folgenden reduciren:

$$(25)\qquad \begin{cases} \mathfrak{M}\left(\dfrac{R}{R-x_0}\right) = 1 \\ \mathfrak{M}\left(\dfrac{R_0}{R_0-x_0}\right) = 0. \end{cases}$$

Mit Benützung der in Gl. (23) und (25) enthaltenen Resultate geht dann Gl. (15) — wenn man statt x_0 jetzt x schreibt — in die folgende über:

$$(26)\qquad \begin{aligned} f(x) &= \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\, \mathfrak{M}(r^{-\mu}\cdot f(r))\cdot x^{\mu} + \sum_{1}^{\infty}{}_{\mu}\, \mathfrak{M}(r^{\mu}\cdot f(r))\cdot x^{-\mu} \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{M}(r^{-\mu}\cdot f(r))\cdot x^{\mu} \end{aligned}$$

wobei also diese Entwickelung unbedingt und gleichmässig convergirt für $R_0 \leqq |x| \leqq R$, und die in den Coefficienten auftretende Grösse r einen beliebig zu wählenden Werth des Intervalles $R_0 \leqq r \leqq R$ bedeutet.

Ist jetzt speciell $R_0 = 0$, so kann man zunächst in den Coefficienten von der Form $\mathfrak{M}(r^{\mu}\cdot f(r))$ für $\mu \geqq 1$ $r = 0$ setzen. Alsdann wird aber:

$$\mathfrak{M}_n (r^\mu \cdot f(r))_{r=0} = 0 \quad \text{also auch:} \quad \mathfrak{M}(r^\mu \cdot f(r)) = 0$$

sodass Gl. (26) sich auf die folgende reducirt:

$$(27) \qquad f(x) = \sum_0^\infty {}_\mu \, \mathfrak{M}(r^{-\mu} \cdot f(r)) \cdot x^\mu$$

Dabei würde nach dem oben Gesagten diese Entwickelung zunächst gültig sein für $0 < |x| \leqq R$. Man erkennt aber unmittelbar, dass sie auch noch für $x = 0$ besteht. Im Falle $x = 0$ geht nämlich die rechte Seite über in:

$$\mathfrak{M}(f(r))$$

und da man hier wiederum $r = 0$ setzen darf, so folgt:

$$\mathfrak{M}(f(r)) = \lim_{n=\infty} \mathfrak{M}_n (f(r))_{r=0} = f(0)$$

d. h. Gl. (27) gilt in der That auch für $x = 0$.

Damit ist aber der oben ausgesprochene Satz bewiesen.

Zusatz I. Ist $f(x)$ nur für das Gebiet $R_0 < |x| < R$ eindeutig und analytisch, so gilt die Entwickelung (26) zunächst für jedes Gebiet $R_0' \leqq |x| \leqq R'$, sofern nur R_0', R' der Bedingung genügen: $R_0 < R_0' < R' < R$: sie gilt somit schliesslich für alle x des Gebietes $R_0 < |x| < R$. Sind also $|x| = R$ bezw. $|x| = R_0$ die wahren Convergenzgrenzen der betreffenden Entwickelung, so muss $f(x)$ für $|x| = R$ bezw. $|x| = R_0$ mindestens eine singuläre Stelle besitzen.

Bleibt $f(x)$ beim Uebergange von Werthen mit dem absoluten Betrage $|x| < R$ bezw. $|x| > R_0$ zu solchen mit dem absoluten Betrage $|x| = R$ bezw. $|x| = R_0$ noch im allgemeinen gleichmässig stetig, und ist $f(x)$ für $|x| = R$ bezw. $|x| = R_0$ durchweg endlich, so kann man offenbar die in den Coefficienten auftretende Grösse r eventuell

auch durch R bezw. R_0 ersetzen, da in diesem Falle die Differenzen:

$$\mathfrak{M}(R^{\mu}\cdot f(R)) - \mathfrak{M}(R'^{\mu}\cdot f(R'))$$

$$\text{bezw. } \mathfrak{M}(R_0^{\mu}\cdot f(R_0)) - \mathfrak{M}(R_0'^{\mu}\cdot f(R_0'))$$

beliebig klein gemacht werden können.

Zusatz II. Man erkennt leicht, dass der bewiesene Satz auch umkehrbar ist, d. h. wenn die Reihe:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\nu}\, a_{\mu} x^{\mu} = f(x)$$

zum Mindesten für alle x mit dem absoluten Betrage $|x| = r$ gleichmässig convergirt, so hat man:

$$a_{\mu} = \mathfrak{M}(r^{-\mu}\cdot f(r)).$$

Hieraus ergibt sich dann die Eindeutigkeit einer derartigen Entwickelung zunächst in dem Umfange, dass aus dem Bestehen der Gleichung:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\mu}\, a_{\mu}\cdot x^{\mu} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\mu}\, b_{\mu}\cdot x^{\mu},$$

zum Mindesten für alle x mit einem gewissen absoluten Betrage $|x| = r$, für welche jene Reihen gleichmässig convergiren, deren Identität folgt. Auch hat es keine besondere Schwierigkeit, diesen Identitätsbeweis auf den Fall auszudehnen, dass die Gleichheit der beiden Reihensummen nur für irgend eine unendliche Punktmenge feststeht.

Fehlen in der betrachteten Reihe die negativen Potenzen, sodass also:

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\, a_{\mu}\cdot x^{\mu}$$

so hat man offenbar:

$$\mathfrak{M}\left(r^{-\mu}\cdot f(r)\right) = \frac{1}{\mu!} f^{(\mu)}(0).$$

Jene Mittelwerthe stellen also in gewissem Sinne eine Verallgemeinerung der Ableitungen von $f(x)$ für $x=0$ dar.

4

Zum Cauchy'schen Integralsatze.

Von

Alfred Pringsheim.

Aus den Sitzungsberichten der mathematisch-physikalischen Classe der k. bayer. Akad. d. Wiss. 1895. Bd. XXV. Heft II.

München 1895.

Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub.



Zum Cauchy'schen Integralsatze.

(Nachtrag zu dem Aufsatze auf S. 39—72 dieses Bandes.)

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 15. Juli.*)

In der Einleitung meiner Mittheilung über den Cauchy'schen Integralsatz habe ich darauf aufmerksam gemacht, dass gewisse auf Continuitäts-Betrachtungen gegründete Beweise jenes Satzes insofern lückenhaft erscheinen, als sie auf der stillschweigend gemachten Annahme beruhen, dass der Differenzen-Quotient $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ für alle in Betracht kommenden Werthe von z stets gleichmässig gegen den Werth $f'(z)$ convergirt, d. h. dass nach Vorgabe einer beliebig kleinen positiven Grösse ε sich stets eine positive Grösse ϱ so fixiren lasse, dass für alle in Betracht kommenden Werthe von z stets:

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f(z)\right| < \varepsilon, \quad \text{falls: } |h| < \varrho.$$

Ich fügte hinzu, man müsse also, um jene Beweise haltbar zu machen, entweder die fragliche Bedingung als eine specielle, der Function $f(z)$ a priori zukommende Eigenschaft ausdrücklich in die Voraussetzung aufnehmen,[1]) oder

[1]) In dem seither erschienenen ersten Bande von Weierstrass' Werken findet man einen Beweis des Laurent'schen Satzes, bei welchem in der That die fragliche Bedingung bezw. eine ihr im wesentlichen aequivalente als specielle Voraussetzung erscheint.

versuchen, dieselbe als unmittelbare Folge einfacherer Eigenschaften, etwa der Stetigkeit von $f'(z)$ darzustellen;[1]) in wieweit dies möglich wäre, liess ich dahingestellt und sprach nur die Vermuthung aus, dass der Beweis, wenn überhaupt durchführbar, auf ziemlich schwierige und umständliche Betrachtungen führen dürfte. Nachdem ich indessen neuerdings erkannt, dass der fragliche Beweis nicht nur möglich ist, sondern auch mit verhältnissmässig einfachen Mitteln geführt werden kann, möchte ich denselben — zumal der Satz an sich mir nicht ganz unwichtig erscheint — an dieser Stelle mittheilen.[2])

Es sei $f(z)$ im Innern und auf der Begrenzung eines gewissen Bereiches T eine endliche, eindeutige und stetige Function der complexen Variablen z. Liefert sodann die Substitution $z = x + yi$ die Beziehung:

$$f(z) = \varphi(x,y) + i \cdot \psi(x,y), \tag{1}$$

wo $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ reelle Functionen der reellen Veränderlichen x, y bedeuten, so folgt bekanntlich aus der vorausgesetzten Stetigkeit von $f(z)$, dass auch $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ endliche und stetige Functionen von x,y und zwar für den Bereich T gleichmässig stetig sind.

Es sei ferner $f'(z)$ gleichfalls in T (d. h. immer im Innern und auf der Grenze von T) endlich, eindeutig und stetig, so hat man speciell:

---

[1]) In meinem Aufsatze: „Ueber die Entwicklung eindeutiger analytischer Functionen in Potenzreihen" (S. 39 ff. dieses Bandes) habe ich u. a. gezeigt, dass für „analytische", d. h. durch Potenzreihen definirte Functionen die betreffende Bedingung stets erfüllt ist (a. a. O. S. 83, 84).

[2]) Uebrigens setzt Herr Goursat, wie ich erst nachträglich bemerkt habe, bei seinem Beweise des Cauchy'schen Satzes (Act. math. T. IV, p. 196) den fraglichen Hilfssatz ausdrücklich als bekannt voraus, sodass also hier die von mir erhobene Einwendung hinfällig erscheint.

$$f'(z) = \frac{\partial f(x+yi)}{\partial x} = \frac{\partial f(x+yi)}{\partial (iy)},$$

wobei es im Innern von T freisteht, diese partiellen Differential-Quotienten als vor- oder rückwärts genommen zu verstehen; oder wenn:

$$\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} = \varphi_1(x,y) \qquad \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} = \varphi_2(x,y)$$
$$\frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x} = \psi_1(x,y) \qquad \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial y} = \psi_2(x,y)$$

gesetzt wird:

$$(2) \qquad f'(z) = \begin{cases} \varphi_1(x,y) + i \cdot \psi_1(x,y) \\ \psi_2(x,y) - i \cdot \varphi_2(x,y). \end{cases}$$

Hieraus folgt zunächst, dass die partiellen Differential-Quotienten $\varphi_1(x,y)$, $\varphi_2(x,y)$, $\psi_1(x,y)$, $\psi_2(x,y)$ in T gleichfalls endliche, eindeutig bestimmte Werthe besitzen, welche den Bedingungen genügen:

$$(3) \qquad \begin{cases} \varphi_1(x,y) = \psi_2(x,y) \\ \varphi_2(x,y) = -\psi_1(x,y), \end{cases}$$

und dass sie — in Folge der Stetigkeit von $f'(z)$ — in T gleichmässig stetige Functionen von x, y sind, d. h. jeder beliebig klein vorgeschriebenen positiven Grösse δ lässt sich eine positive Grösse ϱ so zuordnen, dass für alle x,y des Bereiches T:

$$(4) \qquad |\chi(x+h, y+k) - \chi(x,y)| < \delta \quad \text{für: } h^2+k^2 < \varrho^2,$$

(wo χ jede beliebige der Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ bedeutet).

Dies vorausgeschickt gilt nun der Satz:

Sind $f(z)$, $f'(z)$ eindeutig, endlich und stetig im Innern und auf der Grenze des Bereiches T, so convergirt der Ausdruck:

$$\left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-f'(z)\right|$$

mit Δz in T gleichmässig gegen Null, d. h. jeder beliebig klein vorgelegten positiven Grösse ε lässt sich eine positive Grösse ϱ so zuordnen, dass:

$$\left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-f'(z)\right|<\varepsilon, \quad \text{falls: } |\Delta z|<\varrho.^{1})$$

Beweis. Setzt man $\Delta z = h + ki$, so wird zunächst:

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$=\frac{\varphi(x+h,y+k)-\varphi(x,y)}{h+ki}+i\cdot\frac{\psi(x+h,y+k)-\psi(x,y)}{h+ki}$$

$$=\left\{\frac{\varphi(x+h,y+k)-\varphi(x,y+k)}{h}\right.$$
$$\left.+i\cdot\frac{\psi(x+h,y+k)-\psi(x,y+k)}{h}\right\}\cdot\frac{h}{h+ki}$$

$$+\left\{\frac{\varphi(x,y+k)-\varphi(x,y)}{k}+i\cdot\frac{\psi(x,y+k)-\psi(x,y)}{k}\right\}\cdot\frac{k}{h+ki}.$$

In Folge der nach dem oben Gesagten aus der Voraussetzung folgenden Stetigkeitseigenschaften der Functionen $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ und ihrer partiellen Differential-Quotienten ist es gestattet auf die sämmtlichen hier auftretenden Differenzen-Quotienten den Rolle'schen Mittelwerth-Satz anzuwenden.

Bezeichnet man also mit $\vartheta, \vartheta', \eta, \eta'$ reelle Grössen, welche dem Intervalle von 0 bis 1 (mit Einschluss der Grenzen) angehören, so kann man setzen:

---

[1]) Dabei kommen natürlich, falls z auf der Grenze von T oder in deren Nähe liegt, nur solche Δz in Betracht, für welche $z+\Delta z$ noch dem Bereiche T angehört.

Der analoge Satz für Functionen einer reellen Veränderlichen findet sich bei Tannery, Introduction à la théorie des fonctions, p 234; desgl. bei Stolz, Grundzüge der Differential- u. Integralrechnung, p. 55.

$$(5)\qquad \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$
$$= \{\varphi_1(x+\vartheta h, y+k)+i\cdot\psi_1(x+\vartheta' h, y+k)\}\cdot\frac{h}{h+ki}$$
$$+\{\varphi_2(x, y+\eta k)+i\cdot\psi_2(x, y+\eta' k)\}\cdot\frac{k}{h+ki}.$$

Es ist aber andererseits nach Gl. (2):

$$\begin{aligned} f'(z) &= \varphi_1(x,y)+i\cdot\psi_1(x,y) \\ &= \{\varphi_1(x,y)+i\cdot\psi_1(x,y)\}\cdot\frac{h}{h+ki} \\ &+ \{i\cdot\varphi_1(x,y)-\psi_1(x,y)\}\cdot\frac{k}{h+ki} \end{aligned}$$

oder mit Benützung der Beziehungen (3):

$$(6)\qquad \begin{aligned} f'(z) &= \{\varphi_1(x,y)+i\cdot\psi_1(x,y)\}\cdot\frac{h}{h+ki} \\ &+ \{\varphi_2(x,y)+i\cdot\psi_2(x,y)\}\cdot\frac{k}{h+ki}. \end{aligned}$$

Subtrahirt man jetzt diese Gleichung von Gl. (5), so ergiebt sich:

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-f'(z)$$
$$\begin{aligned} &= \{\varphi_1(x+\vartheta h, y+k)-\varphi_1(x,y)\}\cdot\frac{h}{h+ki} \\ &+ \{\psi_1(x+\vartheta' h, y+k)-\psi_1(x,y)\}\cdot\frac{hi}{h+ki} \\ &+ \{\varphi_2(x, y+\eta k)-\varphi_2(x,y)\}\cdot\frac{k}{h+ki} \\ &+ \{\psi_2(x, y+\eta' k)-\psi_2(x,y)\}\cdot\frac{ki}{h+ki} \end{aligned}$$

Nun kann man nach dem oben Gesagten (s. Ungl. (4)) ϱ so fixiren, dass für $h^2+k^2<\varrho^2$, also $|h+ki|<\varrho$, der

absolute Betrag jeder Klammergrösse unter eine beliebig kleine positive Grösse, die mit $\frac{\varepsilon}{4}$ bezeichnet werden möge, herabsinkt. Da ausserdem bei beliebigen, nicht gleichzeitig verschwindenden reellen Werthen von h und k stets:

$$\left|\frac{h}{h+ki}\right| \leqq 1 \qquad \left|\frac{k}{h+ki}\right| \leqq 1,$$

so folgt schliesslich:

$$(7) \qquad \left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-f'(z)\right|<\varepsilon \qquad \text{für: } |\Delta z|<\varrho.$$

Hiermit ist der oben ausgesprochene Satz, d. h. derjenige Satz, welcher für den exacten Beweis des Cauchy'schen Integral-Theorems erforderlich war, bewiesen.

An dieses Resultat lässt sich nun noch die folgende für die schärfere Begründung der gesammten Cauchy'schen Functionen-Theorie nicht unwichtige Betrachtung knüpfen. Schreibt man in Ungl. (7) z' statt z, so wird:

$$(8) \qquad \left|\frac{f(z'+\Delta z)-f(z')}{\Delta z}-f'(z')\right|<\varepsilon \qquad \text{für: } |\Delta z|<\varrho$$

unter der Voraussetzung, dass auch z' und $z'+\Delta z$ dem Bereiche T angehören. Setzt man dann in (7): $\Delta z=\zeta$, in (8): $\Delta z=\zeta'$, wo die ζ, ζ' zwei beliebige complexe Grössen bedeuten, deren absoluter Betrag unterhalb ϱ liegt, so folgt durch Subtraction der Ungleichungen (7) und (8):

$$(9) \qquad \left|\frac{f(z'+\zeta')-f(z')}{\zeta'}-\frac{f(z+\zeta)-f(z)}{\zeta}-\{f'(z')-f'(z)\}\right|<2\varepsilon.$$

In Folge der Stetigkeit von $f'(z)$ kann man jetzt z' nahe genug an z wählen, dass $|f'(z')-f'(z)|$ beliebig klein wird; insbesondere wird, wenn man $|z'-z|<\varrho$ nimmt,

Klein p. 29

„Wenn man die reelle und die imaginären Bestandtheile der Funct. (wie sie etwa für die Stelle d. Conv ⊙es durch analyt. Fortsetz. ergeben), überhaupt durch d. ei. Fourier Reihe darstellen kann, ob selbe diese mit d. oben geschriebenen Grenzfalle der Potenzentwicklg f. $|x| = 1$ übereinst; in demselben Maasse also, wie unsere Fourier Reihe convergirt, convergirt auch unsere Potenzentwickelung auf dem Convergenzkreise

Pringsheim p. 347

Es giebt offenbar Potenzreihen, welche auf ihrem Convergenzkreise divergiren, obschon die zugehörige Randfunction in eine convergente Fourier'sche Reihe entwickelt werden kann.

358

$$f_2(x) = e^{\frac{1}{1-x}} \qquad B_\nu > e\left(1+\frac{\nu-1}{2}\right)$$

$$f(e^{\vartheta i}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{\lambda i})\,d\lambda + \frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\left\{\int f(e^{\lambda i}) \cos\nu\lambda\,d\lambda \cdot \cos\nu\vartheta + \right.$$

$$f(e^{\vartheta i}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{\lambda i})\,d\lambda$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\left\{\int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{\lambda i})\cos\nu\lambda\,.\,d\lambda\,.\,\cos\nu\vartheta\right.$$

$$\left.+\int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{\lambda i})\sin\nu\lambda\,.\,d\lambda\right\}\sin\nu\vartheta.$$





$|f'(z') - f'(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$,[1] sodass Ungl. (9) die folgenden nach sich zieht:

$$\left|\frac{f(z'+\zeta')-f(z')}{\zeta'} - \frac{f(z+\zeta)-f(z)}{\zeta}\right| < \delta \tag{10}$$
$$\text{für: } \begin{cases} |\zeta'| < \varrho, \ |\zeta| < \varrho \\ |z'-z| < \varrho \end{cases}$$

(wenn man zur Abkürzung δ statt $\frac{5}{2}\varepsilon$ schreibt). Man kann somit an Stelle des oben bewiesenen Satzes jetzt auch den folgenden setzen:

Sind $f(z)$, $f'(z)$ eindeutig, endlich und stetig im Innern und auf der Grenze eines gewissen Bereiches T, so ist der Differenzen-Quotient:

$$\frac{f(z+\zeta)-f(z)}{\zeta}$$

eine gleichmässig stetige Function der beiden Variablen z und ζ für alle z des Bereiches T und alle ζ, deren absoluter Betrag unter einer gewissen Grenze ϱ liegt, d. h. jeder beliebig klein vorgelegten positiven Grösse δ lässt sich eine positive Grösse ϱ so zuordnen, dass die Ungleichungen (10) stattfinden.

---

[1]) Setzt man nämlich:

$$z' - z = h + ki,$$

so wird:

$$f(z') - f(z) = \varphi_1(x+h,\ y+k) - \varphi_1(x,y) + i\{\psi_1(x+h,\ y+k) - \psi_1(x,y)\},$$

also:

$$|f(z') - f(z)| \leqq |\varphi_1(x+h,\ y+k) - \varphi_1(x,y)| + |\psi_1(x+h,\ y+k) - \psi_1(x,y)|$$

d. h. auf Grund der oben getroffenen Bestimmung:

$$|f(z') - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für: } |h+ki| < \varrho.$$

Der Satz in dieser Form besitzt nun die wichtige Eigenschaft, auch umkehrbar zu sein, d. h. man kann aus dem Bestehen der Ungleichungen (10) — welche offenbar die Endlichkeit und Eindeutigkeit von $f(z)$ als selbstverständliche Voraussetzung enthalten — die Stetigkeit von $f(z)$, sowie die Endlichkeit, Eindeutigkeit und Stetigkeit von $f'(z)$ folgern:

Setzt man nämlich in (10) $z' = z$, so wird:

$$(11) \quad \left| \frac{f(z+\zeta') - f(z)}{\zeta'} - \frac{f(z+\zeta) - f(z)}{\zeta} \right| < \delta \text{ für: } \begin{Bmatrix} |\zeta'| \\ |\zeta| \end{Bmatrix} < \varrho,$$

und hieraus folgt zunächst, dass der Differenzen-Quotient $\frac{f(z+\zeta) - f(z)}{\zeta}$ für $\lim \zeta = 0$ einen eindeutig bestimmten, endlichen Grenzwerth besitzt, sodass man setzen kann:

$$(12) \qquad \lim_{\zeta=0} \frac{f(z+\zeta) - f(z)}{\zeta} = f'(z),$$

d. h. $f(z)$ besitzt in T durchweg einen endlichen, eindeutig bestimmten Differential-Quotienten, ist also *eo ipso* auch eine stetige Function von z. Um auch noch die Stetigkeit von $f'(z)$ zu erkennen, bemerke man, dass aus (11) und (12) folgt:

$$(13) \qquad \left| f'(z) - \frac{f(z+\zeta) - f(z)}{\zeta} \right| \leqq \delta \quad \text{für: } |\zeta| < \varrho$$

und analog für jeden anderen dem Bereiche T angehörigen Werth z':

$$(14) \qquad \left| f'(z') - \frac{f(z'+\zeta) - f(z')}{\zeta} \right| \leqq \delta.$$

Hieraus folgt durch Subtraction:

$$(15) \quad |f'(z') - f'(z)| \leqq 2\delta + \left| \frac{f(z'+\zeta) - f(z')}{\zeta} - \frac{f(z+\zeta) - f(z)}{\zeta} \right|,$$

und wenn man jetzt z' der Bedingung unterwirft: $|z' - z| < \varrho$, so findet man schliesslich mit Benützung von Ungl. (10):

$$(16) \qquad |f'(z') - f'(z)| < 3\delta,$$

womit die fragliche Umkehrung des obigen Satzes[1]) in allen Theilen bewiesen ist. Nunmehr kann man aber jenen Satz mit der eben bewiesenen Umkehrung in die folgende prägnantere Form zusammenfassen:

Die *nothwendige und hinreichende* Bedingung dafür, dass die im Bereiche T endliche und eindeutige Function $f(z)$ daselbst stetig ist und einen endlichen, eindeutigen und stetigen Differential-Quotienten $f'(z)$ besitzt, besteht darin, dass der Differenzen-Quotient $\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ für alle Werthe z des Bereiches T und alle Δz, deren absoluter Betrag unter einer gewissen Grenze liegt, eine gleichmässig stetige Function der beiden Variablen z und Δz sein muss.

Die gleichmässige Stetigkeit des Differenzen-Quotienten in dem näher definirten Sinne bildet also die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die endliche und eindeutige Function $f(z)$ im Sinne Cauchy's synektisch ist.

Ich möchte schliesslich diese Gelegenheit benützen, um den in meinem früheren Aufsatze mitgetheilten historischen Notizen einige Ergänzungen hinzuzufügen.

Ich habe dort u. a. hervorgehoben, dass der auf die Integralformel:

$$\int P\,dx + Q\,dy = \pm \int\int \left\{ \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right\} dx \cdot dy$$

gegründete Beweis des Cauchy'schen Satzes bereits von Cauchy selbst gekannt und auch in der Hauptsache publicirt worden sei, und glaubte aus dem Umstande, dass jener Beweis — im Gegensatze zu dem ursprünglich von Cauchy gegebenen und dessen Modificationen — ganz allgemein

[1]) Das Analogon für Functionen einer reellen Variablen findet man bei Harnack, Elemente der Diff.- und Integr.-Rechnung, p. 37.

als der Riemann'sche bezeichnet wird, den Schluss ziehen zu dürfen, dass jene Thatsache bisher „völlig unbemerkt" geblieben sei.[1]) Ich hätte statt dessen etwa sagen sollen: „nahezu unbemerkt". Denn ich habe inzwischen die Wahrnehmung gemacht, dass Casorati in der historischen Einleitung seiner „Teorica delle funzioni di variabili complesse" jener Cauchy'schen Note ausdrücklich Erwähnung thut. Das Gleiche ist auch in dem jüngst erschienenen Referate der Herren Brill und Nöther über „Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen" geschehen.[3]) Immerhin kann wohl kaum bestritten werden, dass das mathematische Publikum mit Ausnahme einer sicherlich sehr kleinen Minderheit den fraglichen Beweis bisher ganz ausschliesslich auf Riemann's Conto gesetzt hat.

Ferner habe ich inzwischen bemerkt, dass auch Herr Falk im Jahre 1883 einen Beweis des Cauchy'schen Integralsatzes veröffentlicht hat.[4]) Das Original der betreffenden Arbeit ist mir leider bisher nicht zugänglich gewesen. Indessen lässt sich aus einem Auszuge, den der Verfasser selbst in einem Briefe an Herrn Hermite mitgetheilt hat,[5]) immerhin so viel ersehen, dass jener Beweis in seiner ganzen Anlage sehr einfach, wenn auch vielleicht etwas weniger natürlich erscheint, als der von mir gegebene, und dass er insbesondere wieder auf gewissen Voraussetzungen über die Beschaffenheit der Integrations-Curven beruht, deren principielle Ueberflüssigkeit ich gerade nachzuweisen versucht habe.

---

[1]) a. a. O. p. 44.

[2]) a. a. O. p. 79. Späterhin (p. 370) wird freilich der fragliche Beweis wiederum lediglich auf die Riemann'sche Dissertation zurückgeführt.

[3]) Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. III, p. 173.

[4]) Démonstration du théorème de Cauchy sur l'intégrale d'une fonction complexe (Nova Acta Regiae Soc. Upsaliensis, Ser. III, T. XII).

[5]) Darboux, Bulletin, 2. série, T. VII, p. 137.

Ueber Potenzreihen auf dem Convergenzkreise und Fourier'sche Reihen.

Von

Alfred Pringsheim.

Aus den Sitzungsberichten der mathematisch-physikalischen Classe der k. bayer. Akad. d. Wiss. 1895. Bd. XXV. Heft III.

München 1895.

Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub.



Ueber Potenzreihen auf dem Convergenzkreise und Fourier'sche Reihen.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 2. November.*)

§ 1.

Es sei $\sum A_\nu x^\nu$ eine Potenzreihe mit dem Convergenzradius $|x| = 1$. Setzt man alsdann zunächst für $|x| < 1$:

$$(1) \qquad \sum_0^\infty {}^\nu A_\nu x^\nu = f(x),$$

so mag $f(x)$ für die Stellen $x = e^{\vartheta i}$ des Convergenzkreises im allgemeinen durch unmittelbare analytische Fortsetzung und für etwaige singuläre Stellen $e^{\vartheta' i}$ als $\lim_{\vartheta = \vartheta'} f(e^{\vartheta i})$ definirt sein, bezw. da, wo dieser Grenzwerth nicht existirt, als undefinirt gelten.

Convergirt nun die Reihe $\sum A_\nu x^\nu$ für $x = e^{\vartheta i}$ noch durchweg oder wenigstens im allgemeinen (das soll hier und im folgenden stets bedeuten: mit eventuellem Ausschluss einer endlichen Anzahl von Stellen), so ist für alle Convergenzstellen nach einem bekannten Abel'schen Satze:

$$(2) \qquad f(e^{\vartheta i}) = \sum_0^\infty {}^\nu A_\nu e^{\nu \vartheta i}$$

$$= \sum_0^\infty {}^\nu A_\nu (\cos \nu \vartheta + i \cdot \sin \nu \vartheta).$$

Andererseits ist $f(e^{\vartheta i})$ in Folge der gemachten Voraussetzungen mit Ausschluss einer endlichen Anzahl von Stellen ϑ' eine nicht nur stetige, sondern unbeschränkt differenzirbare Function der reellen Veränderlichen ϑ. Unter Hinzufügung der weiteren Annahme, dass jene singulären Stellen ϑ' die Integrabilität von $f(e^{\vartheta i})$ nicht alteriren sollen, muss sich daher $f(e^{\vartheta i})$ in eine Fourier'sche Reihe entwickeln lassen:

$$(3) \qquad f(e^{\vartheta i}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{\lambda i})\, d\lambda$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}{}^{\nu}\left\{\int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{\lambda i}) \cos\nu\lambda\cdot d\lambda\cdot\cos\nu\vartheta + \int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{\lambda i}) \sin\nu\lambda\cdot d\lambda\cdot\sin\nu\vartheta\right\}$$

Alsdann folgt aber aus einem bekannten Satze, dass die Coefficienten dieser Entwickelung keine anderen sein können, als die oben mit A_ν bezeichneten. Mit anderen Worten: Allemal wenn die *Potenzreihe* $\sum A_\nu x^\nu = f(x)$ für $x = e^{\vartheta i}$ im allgemeinen *convergirt* und $f(e^{\vartheta i})$ als *integrable* Function von ϑ definirt, so ist sie *identisch* mit der *Fourier*'schen Reihe für $f(e^{\vartheta i})$.

Von den drei Voraussetzungen, unter welchen dieses Resultat hier ausgesprochen wurde, nämlich:

1) der endlichen Anzahl der singulären Stellen von $f(e^{\vartheta i})$,

2) der durchgängigen Integrabilität von $f(e^{\vartheta i})$,

3) der Convergenz von $\sum a_\nu e^{\nu\vartheta i}$, —

lässt sich die erste ohne weiteres beseitigen, wie die Untersuchungen von Du Bois Reymond über die Darstellbarkeit einer beliebigen trigonometrischen Reihe als Fourier'sche Reihe lehren,[1]) sofern nur die Voraussetzungen 2) und 3)

---

[1]) „Beweis, dass die Coefficienten der trigonometrischen Reihe etc." Abh. der Bayer. Akademie, Bd. XII (1875). Vgl. insbesondere p. 43.

bestehen bleiben. Da indessen die besonderen Eigenthümlichkeiten, von welchen hier gesprochen werden soll, schon bei Functionen mit einer endlichen Anzahl von Singularitäten zum Vorschein kommen, so soll im folgenden immer nur von solchen die Rede sein.

Auch die zweite Voraussetzung kann man bis zu einem gewissen Grade fallen lassen. Wie nämlich Riemann gezeigt hat,[1]) schliesst das Auftreten gewisser Unendlichkeitsstellen, welche die Integrabilität von $f(e^{\vartheta i})$ aufheben, dennoch die Darstellbarkeit durch eine trigonometrische Reihe nicht aus. Es sind das solche Stellen ϑ', für welche $f(e^{\vartheta i})$ ohne Maxima und Minima von niederer Ordnung als der ersten unendlich wird (NB. wenn auch nicht von hinlänglich niedrigerer Ordnung, um die Integrabilität von $f(e^{\vartheta i})$ zu sichern) und für welche $f(e^{(\vartheta'+\vartheta)i}) + f(e^{(\vartheta'-\vartheta)i})$ integrabel ist. Freilich werden in diesem Falle die Integrale, welche die Coefficienten in der Fourier'schen Form darzustellen hätten, in dem gemeinhin üblichen Sinne divergent. Sie behalten jedoch ihre richtige Bedeutung, wenn man ihre Hauptwerthe im Cauchy'schen Sinne nimmt, d. h. wenn man setzt:

$$\int_a^b \varphi(\vartheta) \cdot d\vartheta = \lim_{\varepsilon=0} \left\{ \int_a^{\vartheta'-\varepsilon} \varphi(\vartheta) \cdot d\vartheta + \int_{\vartheta'+\varepsilon}^b \varphi(\vartheta) \cdot d\vartheta \right\}.$$

Und mit Hinzufügung dieser Modification bleibt, wie Du Bois Reymond gezeigt hat,[2]) die Eindeutigkeit der Coefficienten-Bestimmung, also die Identität zwischen trigonometrischer beziehungsweise Potenz-Reihe einerseits und Fourier'scher Reihe andererseits bestehen. Ich möchte derartige Reihen als uneigentliche Fourier'sche Reihen

---

[1]) „Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe", Art. 12. (Ges. Werke, p. 244, 245.)

[2]) a. a. O. Art. 24, p. 37 ff.

bezeichnen und benütze diese Gelegenheit, um ein einfaches Beispiel einer solchen Reihe mitzutheilen (s. § 5 dieses Aufsatzes), bei welcher die Convergenz durch ganz elementare Rechnung direct erwiesen werden kann, während die Divergenz der Coefficienten in der Fourier'schen Integralform ohne weiteres aus der Form der zu entwickelnden Function hervorgeht.

Im übrigen bleibt hier noch die Frage offen, ob die durch die convergente Reihe $\sum A_\nu e^{\nu\vartheta i}$ dargestellte Function $f(e^{\vartheta i})$ nicht auch solche Singularitäten besitzen könnte, welche, ohne zu der eben betrachteten Kategorie zu gehören, die Integrabilität von $f(e^{\vartheta i})$ aufheben und damit die Darstellbarkeit der Reihen-Coefficienten in der Fourier'schen Form unmöglich machen würden? Ob dieser Fall in Wirklichkeit eintreten kann, muss vorläufig dahingestellt bleiben: das Gegentheil ist wenigstens, so viel ich weiss, bisher nicht bewiesen worden. —

Was nun endlich jene dritte — die Convergenz von $\sum A_\nu e^{\nu\vartheta i}$ verlangende — Voraussetzung betrifft, so dürfte man vielfach der Ansicht begegnen, dass man dieselbe ohne weiteres fallen lassen könne, sobald nur die Entwickelbarkeit von $f(e^{\vartheta i})$ in eine convergente Fourier'sche Reihe feststeht, und dass man geradezu aus der Existenz dieser letzteren auf die Convergenz von $\sum A_\nu e^{\nu\vartheta i}$ (und damit eo ipso auf die Identität der betreffenden beiden Reihen) schliessen dürfe. So sagt z. B. Herr Darboux in seinem „Mémoire sur l'approximation des fonctions de très-grands nombres etc.“ ganz ausdrücklich[1]): „Nous voyons que, si $f(z)$, considérée comme fonction de l'argument ω de z sur le cercle de convergence, est dé-

---

[1]) Journal de Mathém. 3ième Série, T. IV, p. 13.

veloppable en série trigonométrique,[1]) la série qui développe $f(z)$ suivant les puissances de z demeurera encore convergente sur le cercle limite." Dieser Ausspruch stammt zwar schon aus dem Jahre 1878, d. h. indessen immerhin aus einer Zeit, in welcher die in den Arbeiten der Herren Christoffel[2]), Prym[3]) und Schwarz[4]) (1871/72) zu Tage tretende schärfere Prüfung der Grundlagen des sog. Dirichlet'schen Principes bereits gegründete Bedenken gegen die Stichhaltigkeit der obigen Behauptung hervorrufen konnte. Im übrigen glaube ich, dass auch heute noch viele Mathematiker jene Darboux'sche Ansicht theilen und die Frage nach der Convergenz einer Potenzreihe auf dem Convergenzkreise schlechthin mit derjenigen nach der Entwickelbarkeit der betreffenden Randfunction in eine Fourier'sche Reihe identificiren. Eine strengere Behandlung dieser Frage ist mir nur in den Arbeiten des Herrn Thomé über lineare Differentialgleichungen[5]) und einer daran anknüpfenden Abhandlung „Ueber Convergenz und Divergenz einer Potenzreihe auf dem Convergenzkreise" [6]) begegnet. Hier wird vor allem bewiesen, dass unter den über die Natur der singulären Stellen

---

[1]) Hierunter ist immer, wie aus dem ganzen Zusammenhange unzweideutig hervorgeht, eine Fourier'sche Reihe zu verstehen.

[2]) Ueber die Integration von zwei partiellen Differentialgleichungen. Gött. Nachr. 1871, p. 435.

[3]) Zur Integration der Differential-Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. — Journ. f. Math. Bd. 73, p. 360.

[4]) Zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. — Journ. f. Math. Bd. 74, p. 218.

[5]) Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen — Journ. f. Math. Bd. 91, p. 222 ff. s. besonders Art. 4, 9, 10. —. Desgl. Bd. 95, p. 44 ff. s. Art. 8.

[6]) Journ. f. Math. Bd. 100, p. 167.

gemachten Voraussetzungen die Coefficienten der Potenzreihe wirklich identisch sind mit den Fourier'schen Entwickelungs-Coefficienten der Randfunction, und sodann erst aus der Convergenz dieser Fourier'schen Reihe auf diejenige der (auf dem Convergenzkreise mit ihr identischen) Potenzreihe geschlossen. Obschon nun aus dieser Art der Beweisführung die Meinung des Verfassers deutlich hervorgeht, dass es Fälle geben könnte, in denen die fragliche Schlussweise nicht zutrifft, so ist es doch weder hier, noch auch, so viel ich weiss, in anderen Arbeiten, deren Gegenstand dies nahe gelegt hätte,[1]) direct ausgesprochen worden, dass es derartige Fälle — und zwar solche von verhältnissmässig einfacher Natur — wirklich auch giebt. Ich will nun in diesem Aufsatze zeigen:

Es giebt thatsächlich Potenzreihen, welche auf ihrem Convergenzkreise *divergiren*, obschon die zugehörige Randfunction in eine convergente *Fourier*'sche Reihe entwickelt werden kann.

In den folgenden beiden Paragraphen theile ich zunächst die allgemeinen Ueberlegungen mit, welche mich zur Construction derartiger Functionen geführt haben und die sodann in § 4 zur Bildung bestimmter Beispiele benützt werden sollen.

§ 2.

Es seien die beiden Reihen:

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi(\vartheta) = \sum_{0}^{\infty} {}^{\nu} (a_\nu \cos \nu\vartheta + b_\nu \sin \nu\vartheta) \\ \psi(\vartheta) = \sum_{0}^{\infty} {}^{\nu} (-b_\nu \cos \nu\vartheta + a_\nu \sin \nu\vartheta) \end{cases}$$

---

[1]) z. B. Harnack, Anwendung der Fourier'schen Reihe auf die Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen. — Math. Ann. Bd. 21, p. 305.

für $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$ durchweg oder wenigstens im allgemeinen convergent; dabei sollen die Coefficienten a_ν, b reelle Grössen von der Beschaffenheit sein, dass für $\nu = \infty$ der Grenzwerth bezw. die obere Unbestimmtheitsgrenze von mindestens einer der beiden Grössen $|a_\nu|^{\frac{1}{\nu}}$, $|b_\nu|^{\frac{1}{\nu}}$ den Werth 1 hat, während der entsprechende Werth für die andere dieser Grössen auch < 1 sein darf. Setzt man sodann:

$$(2) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu (a_\nu + b_\nu i) \cdot x^{-\nu} = f_1(x),$$

so convergirt diese Reihe für $|x| > 1$, sie divergirt für $|x| < 1$, während sie für $|x| = 1$ übergeht in:

$$(3) \qquad f_1(e^{\vartheta i}) = \sum_0^\infty{}^\nu (a_\nu + b_\nu i)(\cos \nu\vartheta - i \cdot \sin \nu\vartheta)$$
$$= \varphi(\vartheta) - i \cdot \psi(\vartheta)$$

also in Folge der gemachten Voraussetzung auf dem Convergenzkreise noch durchweg oder im allgemeinen convergirt.

Angenommen nun, $f_1(x)$ lasse sich über das gesammte Innere des Einheits-Kreises als eindeutige analytische Function ohne singuläre Stellen fortsetzen, so muss eine für $|x| < 1$ convergirende Potenzreihe existiren, deren Summe $f_1(x)$ ist, also:

$$(4) \qquad f_1(x) = \sum_0^\infty{}^\nu A_\nu x^\nu \qquad (|x| < 1).$$

Es ist nun leicht zu ersehen, dass diese Potenzreihe auf dem Einheitskreise nicht convergiren kann. Denn wäre dies der Fall, so hätte man:

$$(5) \qquad f_1(e^{\vartheta i}) = \sum_0^\infty{}^\nu A_\nu (\cos \nu\vartheta + i \cdot \sin \nu\vartheta)$$

und die Vergleichung mit (3) würde ergeben, dass gleichzeitig:

$$A_\nu = a_\nu + b_\nu i \quad \text{und} \quad A_\nu = -(a_\nu + b_\nu i)$$

sein müsste, was unmöglich ist.

Man hätte also auf diese Weise in der That eine Potenzreihe $f(x) = \sum A_\nu x^\nu$ gewonnen, welche die oben verlangte Eigenschaft hat, auf dem Einheitskreise zu divergiren, obschon daselbst eine convergente trigonometrische Reihe für $f_1(e^{\vartheta i})$ vorhanden ist.

Diese letztere besitzt hier in gewisser Beziehung noch einen ganz speciellen Charakter: sie bildet nämlich die Grenze der Entwickelung von $f_1(x)$ nach negativen Potenzen von x. Man erkennt indessen, dass diese Eigenschaft durchaus unwesentlich und in Wahrheit auch leicht zu beseitigen ist. Bezeichnet man nämlich mit $f_2 x = \sum B_\nu x^\nu$ eine Potenzreihe, deren Convergenzradius $\varrho \geqq 1$ ist, und die im Falle $\varrho = 1$ auf dem Einheitskreise noch durchweg oder im allgemeinen convergirt, so wird offenbar die Reihe:

$$(6) \qquad f(x) = f_1(x) \pm f_2(x) = \sum_0^\infty{}^\nu (A_\nu \pm B_\nu) \cdot x^\nu$$

für $x = e^{\vartheta i}$ gerade so divergiren, wie die Reihe $f_1(x)$, während

$$(7) \qquad f(e^{\vartheta i}) = \sum_0^\infty{}^\nu \left\{ (a_\nu + b_\nu i) \cdot e^{-\nu\vartheta i} \pm B_\nu \cdot e^{\nu\vartheta i} \right\}$$

wird, und diese convergirende trigonometrische Reihe jetzt nicht mehr die Grenze der Entwickelung von $f(x)$ nach negativen, und im Falle $\varrho = 1$ auch nicht diejenige der Entwickelung von $f(x)$ nach positiven und negativen Potenzen von x bildet. Man erzielt dies z. B. am einfachsten, wenn man speciell setzt:

$$(8) \qquad f_2(x) = \sum_0^\infty{}^\nu (a_\nu - b_\nu i) \cdot x^\nu$$

also:

$$(9) \qquad f_2(e^{\vartheta i}) = \sum_0^\infty{}^\nu (a_\nu - b_\nu i)(\cos \nu\vartheta + i \cdot \sin \nu\vartheta)$$
$$= \varphi(\vartheta) + i \cdot \psi(\vartheta),$$

in welchem Falle dann $f(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$ auf dem Einheitskreise durch die trigonometrische Reihe $2\varphi(\vartheta)$ bezw. $2i \cdot \psi(\vartheta)$ dargestellt wird.

Durch die vorstehende Betrachtung ist die Möglichkeit, Reihen der gedachten Art zu construiren, erwiesen, sobald es gelingt, Reihen nach negativen Potenzen von x, wie die oben mit $f_1(x)$ bezeichnete, herzustellen, welche auf dem Einheitskreise convergiren und in das Innere als eindeutige, durchweg reguläre Functionen von x fortgesetzt werden können. Um dies zu erreichen, wird man natürlich zunächst nicht wie oben von irgend einer bestimmten Annahme bezüglich der Coefficienten a_ν, b_ν ausgehen können, sondern vielmehr von einer Feststellung der Singularitäten, welche für $f_1(x)$ auf dem Einheitskreise erforderlich und zulässig erscheinen. Man erkennt aber ohne weiteres, dass hierbei ausserwesentlich singuläre Stellen, sowie algebraische und logarithmische Verzweigungspunkte jedenfalls von vornherein auszuschliessen sind, da die ersteren die Divergenz von $\sum (a_\nu + b_\nu i) \cdot e^{-\nu\vartheta i}$ nach sich ziehen, die letzteren die eindeutige Fortsetzbarkeit von $f_1(x)$ verhindern würden. Als möglicherweise zulässig bleiben daher nur wesentlich singuläre Stellen, welche noch die besondere Eigenschaft besitzen müssen, dass $f_1(x)$, falls die Variable x von aussen her oder längs der Peripherie des Einheitskreises sich einer solchen Stelle nähert, unter einer endlichen Grenze oder zum mindesten integrabel bleibt.

Der Einfluss, den eine derartige, auf dem Convergenzkreise einer Potenzreihe angenommene singuläre Stelle auf deren Convergenz und Divergenz ausübt, soll nun zunächst genauer untersucht werden.

§ 3.

Es sei $f(x)$ eindeutig und regulär für $|x| < R$, wo $R > 1$, mit Ausnahme einer einzigen Stelle auf dem Einheitskreise $x = a = e^{\alpha i}$. Bezüglich der Beschaffenheit dieser singulären Stelle $x = a$ unterscheiden wir die folgenden zwei Fälle:

I. Es sei $f(x)$ für $x = a$ noch absolut integrabel, sobald der Integrationsweg dem Innern oder der Peripherie des Einheitskreises angehört, d. h. das Integral $\int_{x_0}^{a} |f(x)| \cdot dx$ werde in diesem Falle mit $|x_0 - a|$ beliebig klein — eine Bedingung, welche z. B. stets erfüllt ist, wenn $|f(x)|$ im Innern und auf der Peripherie des Einheitskreises in jeder beliebigen Nähe der Stelle a stets unter einer festen Grenze bleibt.

Alsdann lässt sich zeigen, dass die zunächst für $|x| < 1$ geltende Potenzreihe für $f(x) = \sum_{0}^{\infty} {}^{\nu} A_{\nu} x^{\nu}$ noch für $|x| = 1$ mit eventuellem Ausschlusse der Stelle $x = a$ convergirt und mit der Fourier'schen Reihe für $f(e^{\vartheta i})$ identisch ist.

Um dies nachzuweisen, denke man sich den Einheitskreis (E) construirt und die Stelle a mit einem Kreise (K) von beliebig klein anzunehmendem Radius ϱ umgeben. Bezeichnet man sodann mit (C) diejenige Curve, welche aus dem Einheitskreise (E) entsteht, wenn man das kleine durch den Kreis (K) ausgeschnittene Bogenstück (e) durch das entsprechende, innerhalb (E) verlaufende Bogenstück (k) von (K) ersetzt, so hat man für alle Stellen x im Innern von (C), also sicher für $|x| < 1 - \varrho$:

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(+E)} \frac{f(t)}{t - x} \cdot dt$$

(wobei das Pluszeichen vor C die positive Integrationsrich-

tung andeuten soll. Da aber in Folge der gemachten Voraussetzung der von dem Bogenstücke (k) herrührende Bestandtheil dieses Integrals, gerade so wie ein über (e) zu erstreckendes mit (k) und (e) — also schliesslich mit ϱ — beliebig klein wird, und da andererseits $f(x)$ einen eindeutig bestimmten, von ϱ unabhängigen Werth hat, so kann man ohne weiteres das Integral über (k) durch das entsprechende über (e) ersetzen und erhält somit an Stelle der Beziehung (1) jetzt für $|x| < 1$ die folgende:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(+E)} \frac{f(t)}{t-x} \cdot dt, \tag{2}$$

und hieraus in der üblichen Weise:

$$f(x) = \sum_0^\infty{}^\nu A_\nu x^\nu \tag{3}$$

wo:

$$\left.\begin{array}{l} A_0 = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{(+E)} \frac{f(t)}{t} \cdot dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot d\eta \\ A_\nu = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{(+E)} \frac{f(t)}{t^{\nu+1}} \cdot dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot e^{-\nu\eta i} \cdot d\eta \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \end{array}\right\} \tag{4}$$

Dabei lassen sich diese Coefficienten A_ν noch in folgender Weise umformen. Bezeichnet man wieder mit (C) den oben definirten Integrationsweg, so hat man offenbar:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(+C)} f(t) \cdot t^{\nu-1} \cdot dt = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

oder, da man hier wieder genau wie oben den Integrationsweg (C) durch den Weg (E) ersetzen kann:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(+E)} f(t) \cdot t^{\nu-1} \cdot dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot e^{\nu\eta i} \cdot d\eta = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{5}$$

Durch Addition und Subtraction dieser letzten Gleichung lässt sich daher A_ν in die doppelte Form setzen:

$$(6)\quad A_\nu = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot \cos\nu\eta \cdot d\eta \\ \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot \sin\nu\eta \cdot d\eta \end{cases} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

und man erhält daher, wenn man $x = r \cdot e^{\vartheta i}$ setzt und $r < 1$ annimmt, aus Gl. (3) die Entwickelung:

$$(7)\ f(r \cdot e^{\vartheta i}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot d\eta + \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty{}_\nu\, r^\nu \cdot \int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot \cos\nu(\eta - \vartheta) \cdot d\eta$$

Andererseits muss sich $f(e^{\vartheta i})$ in Folge der gemachten Voraussetzungen in eine mit eventuellem Ausschluss der einzigen Stelle $\vartheta = \alpha$ convergirende Fourier'sche Reihe entwickeln lassen, nämlich:

$$(8)\ f(e^{\vartheta i}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot d\eta + \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty{}_\nu \int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot \cos\nu(\eta - \vartheta) \cdot d\eta$$

und da die Reihe (7) für $r = 1$ in diese letztere übergeht, so folgt, dass in dem hier betrachteten Falle die Potenzreihe $f(x) = \sum A_\nu x^\nu$ noch für $x = e^{\vartheta i}$ (mit eventuellem Ausschluss der Stelle $x = a$, $\vartheta = \alpha$) convergirt und mit der Fourier'schen Reihe für $f(e^{\vartheta i})$ identisch ist. —

II. Es sei jetzt $f(x)$ für $x = a$ noch absolut integrabel, wenn der Integrationsweg dem Aeusseren oder der Peripherie des Einheitskreises angehört.

Für das Gebiet $1 < |x| < R$ existirt alsdann nach dem Laurent'schen Satze eine Entwickelung von der Form:

$$(9) \qquad f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu} A_\nu x^\nu = \sum_0^\infty{}^{\nu} A_\nu x^\nu + \sum_1^\infty A_{-\nu} x^{-\nu},$$

wobei die Reihe der positiven Potenzen (welche sich auf die Constante A_0 reducirt, wenn $f(x)$ überhaupt keine weitere singuläre Stelle ausser $x = a$ besitzt) für $|x| < R$, also insbesondere noch für $|x| = 1$ absolut convergirt. Setzt man also Gl. (9) in die Form:

$$(10) \qquad \sum_1^\infty{}^{\nu} A_{-\nu} x^{-\nu} = f(x) - \sum_0^\infty{}^{\nu} A_\nu x^\nu$$

so folgt mit Hülfe der Substitution $x = \frac{1}{y}$ aus dem Ergebnisse des Falles I ohne weiteres, dass $\sum A_{-\nu} x^{-\nu}$ noch auf dem Einheitskreise — mit eventuellem Ausschluss der Stelle $x = a$ — convergiren muss. Das Gleiche gilt somit von der Gesammtreihe (9), woraus dann auch wiederum die Identität von $\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu} A_\nu e^{\nu\vartheta i}$ mit der Fourier'schen Reihe für $f(e^{\vartheta i})$ sich ergiebt.

Daraus kann man aber mit Hilfe der in § 2 angestellten Betrachtung weiter schliessen, dass die im Innern des Einheitskreises geltende Entwickelung von $f(x)$ nach positiven Potenzen von x auf dem Einheitskreise divergiren muss.

Um die Beschaffenheit dieser letzteren Reihe und ihre Beziehung zu der Fourier'schen Entwickelung von $f(e^{\vartheta i})$ genauer festzustellen, hat man auch hier wiederum für $|x| < 1 - \varrho$ zunächst:

$$(11) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(+C)} \frac{f(t)}{t - x} \cdot dt$$

(wo ϱ und (C) die in I angegebene Bedeutung haben). Bezeichnet man sodann mit (k') das ausserhalb des Einheitskreises verlaufende Bogenstück des kleinen Kreises um a, so

kann hier offenbar das über den aus (e) und (k') zusammengesetzten, geschlossenen Weg erstreckte Integral: $\int \frac{f(t)}{t-x} \cdot dt$ durch Verkleinerung von ϱ beliebig klein gemacht werden, muss also, da es einen von ϱ unabhängigen, bestimmten Werth besitzt, gleich Null sein. Addirt man dieses Integral zu dem in Gl. (11), so ergiebt sich:

$$(12) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(+E)} \frac{f(t)}{t-x} \cdot dt - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(+K)} \frac{f(t)}{t-x} \cdot dt$$

für $|x| < 1 - \varrho$, bezw. für $|x| < 1$, wenn man schliesslich ϱ unendlich klein werden lässt.

Um zunächst das zweite Integral auszuwerthen, hat man:

$$\frac{1}{t-x} = -\frac{1}{x-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{t-a}{x-a}} = -\sum_1^\infty{}^\nu \frac{(t-a)^{\nu-1}}{(x-a)^\nu}$$

und daher:

$$(13) \begin{cases} -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(+K)} \frac{f(t)}{t-x} \cdot dt = \frac{1}{2\pi i} \sum_1^\infty{}^\nu (x-a)^{-\nu} \cdot \int\limits_{(+K)} f(t) \cdot (t-a)^{\nu-1} \cdot dt \\ \qquad = \sum_1^\infty{}^\nu C_{-\nu} \cdot (x-a)^{-\nu}. \end{cases}$$

Die rechte Seite lässt sich in eine für $|x| < |a|$ d. h. für $|x| < 1$ convergirende Reihe nach positiven Potenzen von x entwickeln, so dass sich ergiebt:

$$(14) \qquad -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(+K)} \frac{f(t)}{t-x} \cdot dt = \sum_0^\infty{}^\nu B_\nu x^\nu,$$

wo:

$$(15) \qquad B_\nu = \sum_1^\infty{}^\varkappa (-1)^\varkappa \cdot (\varkappa + \nu - 1)_\nu \cdot C_{-\varkappa} a^{-(\varkappa+\nu)}.$$

Ferner hat man für $|x| < 1$:

$$(16) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(+E)} \frac{f(t)}{t-x} \cdot dt = \sum_0^\infty{}^\nu B'_\nu x^\nu$$

wo:

$$(17)\begin{cases} B'_0 = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{(+E)} \dfrac{f(t)}{t}\cdot dt = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i})\cdot d\eta \\ B'_\nu = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{+E} \dfrac{f(t)}{t^{\nu+1}}\cdot dt = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i})\cdot e^{-\nu\eta i}\cdot d\eta \quad (\nu=1,2,3,\ldots) \end{cases}$$

Hiernach liefert Gl. (12) für $|x| < 1$ die folgende Entwickelung:

$$(18) \qquad f(x) = \sum_0^\infty {}^\nu B'_\nu x^\nu + \sum_1^\infty {}^\nu C_{-\nu} (x-a)^{-\nu}$$
$$= \sum_0^\infty {}^\nu (B'_\nu + B_\nu)\cdot x^\nu,$$

deren zweiter Theil, wie die Form der Coefficienten $C_{-\nu}$ (s. Gl. (13)) lehrt, die Gesammtheit derjenigen Bestandtheile enthält, welche die Stelle a zu einer (wesentlich) singulären machen: es sind nämlich die Coefficienten $C_{-\nu}$ genau diejenigen, welche man als Coefficienten der negativen Potenzen von $x-a$ erhalten würde, wenn man $f(x)$ in der Umgebung der Stelle $x=a$ nach dem Laurent'schen Satze entwickelt. Hieraus folgt aber, dass die Reihe:

$$\sum_0^\infty {}^\nu B'_\nu x^\nu = f(x) - \sum_1^\infty {}^\nu C_{-\nu} (x-a)^{-\nu}$$

noch für $x=a$, also schliesslich auf dem ganzen Einheitskreise sich regulär verhält. Sie besitzt somit einen Convergenzradius, der grösser als 1 sein muss (nämlich den Convergenzradius R[1]), so dass sie insbesondere für $|x| = 1$

---

[1]) Dabei ist $R=\infty$, wenn $f(x)$ keine weiteren singulären Stellen im Endlichen besitzt; und falls auch die Stelle $x=\infty$ keine singuläre ist, so reducirt sich jene Reihe auf das constante Anfangsglied:

$$B'_0 = f(o) - \sum_1^\infty {}^\nu C_{-\nu}\cdot(-a)^{-\nu}$$
$$= f(o) - B_0.$$

noch absolut convergirt. Da aber die Gesammt-Entwickelung von $f(x)$ nach positiven Potenzen von x, wie oben bemerkt, für $|x| = 1$ divergirt, so erkennt man, dass diese Divergenz ausschliesslich von jenem zweiten Bestandtheile $\sum_0^\infty{}^\nu B_\nu x^\nu$ herrührt.

Es lässt sich aber auch genau angeben, welche convergente Entwickelung für $x = e^{\vartheta i}$ an die Stelle jenes divergenten Bestandtheils tritt, dergestalt dass für $f(e^{\vartheta i})$ schliesslich eine convergente trigonometrische — nämlich die Fourier'sche — Reihe zu Stande kommt.

Hierzu bemerke man, dass die Coefficienten B'_ν zwar in (17) zunächst genau in derselben Integralform erscheinen, wie die A_ν im Falle I (s. Gl. (4)): aber es ist a priori klar, dass sie nicht, wie jene, mit den Fourier'schen Entwickelungs-Coefficienten von $f(e^{\vartheta i})$ identisch sein können. Um den Zusammenhang mit diesen letzteren aufzuklären, hat man die Beziehung:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(+C)} f(t)\cdot t^{\nu-1}\cdot dt = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

wofür man wiederum, analog wie oben, schreiben kann:

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{(+E)} f(t)\cdot t^{\nu-1}\cdot dt - \frac{1}{2\pi i}\int_{(+K)} f(t)\cdot t^{\nu-1}\cdot dt$$

$$(19) \qquad = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i})\cdot e^{\nu\eta i}\cdot d\eta - D_\nu,$$

wo:

$$D_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_{(+K)} f(t)\cdot t^{\nu-1}\cdot dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{(+K)} (a+(t-a))^{\nu-1}\cdot f(t)\cdot dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_1^\nu{}^\varkappa \int_{(K)} (\nu-1)_{\varkappa-1}\cdot a^{\nu-\varkappa}\cdot(t-a)^{\varkappa-1}\cdot f(t)\cdot dt$$

$$(20) \qquad D_\nu = \sum_1^\nu{}^{\varkappa} (\nu - 1)_{\varkappa - 1} C_{-\varkappa} \cdot a^{\nu - \varkappa}.$$

Durch Addition bezw. Subtraction von Gl. (17) und (19) folgt alsdann:

$$(21) \qquad B'_\nu = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot \cos \nu\eta \cdot d\eta - D_\nu \\ \dfrac{1}{\pi i} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot \sin \nu\eta \cdot d\eta + D_\nu, \end{cases}$$

so dass die Entwickelung (18) für $x = r \cdot e^{\vartheta i}$ und $r < 1$ sich folgendermaassen schreiben lässt:

$$(22) \; f(r e^{\vartheta i}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot d\eta + \frac{1}{\pi} \sum_1^\infty{}^\nu r^\nu \cdot \int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot \cos \nu(\eta - \vartheta) \cdot d\eta$$
$$- \sum_1^\infty{}^\nu D_\nu r^\nu e^{-\nu\vartheta i} + \sum_0^\infty{}^\nu B_\nu r^\nu \cdot e^{\nu \vartheta i}.$$

Da andererseits:

$$(23) \; f(e^{\vartheta i}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot d\eta + \frac{1}{\pi} \sum_1^\infty{}^\nu \int_0^{2\pi} f(e^{\eta i}) \cdot \cos \nu(\eta - \vartheta) \cdot d\eta$$

und in Gl. (22) für $r = 1$ alles mit Ausnahme des letzten Bestandtheils convergent bleibt, so folgt:

$$(24) \qquad \lim_{r=1} \left\{ \sum_0^\infty{}^\nu B_\nu r^\nu e^{\nu\vartheta i} \right\} = \sum_1^\infty{}^\nu D_\nu e^{-\nu\vartheta i},$$

womit die gesuchte Grenz-Entwickelung von $\sum B_\nu x^\nu$ für $x = e^{\vartheta i}$ gefunden ist.

§ 4.

I. Setzt man jetzt:

$$(1) \qquad f_1(x) = e^{\frac{x}{x-1}} = e \cdot e^{\frac{1}{x-1}}\,[1],$$

so erfüllt offenbar die einzige singuläre Stelle $x = 1$ dieser Function die im Art. I des vorigen Paragraphen eingeführten Bedingungen. Man hat nämlich, um das Verhalten von $f_1(x)$ in der Nähe der Stelle $x = 1$ zu erkennen:

$$(2) \qquad f_1(1 + \xi + \eta i) = e^{1 + \frac{\xi - \eta i}{\xi^2 + \eta^2}}$$

also:

$$(3) \qquad |f_1(1 + \xi + \eta i)| = e^{1 + \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}}.$$

Gehört nun die Stelle $x = 1 + \xi + \eta i$ noch dem Innern des Einheitskreises an, so ist ξ wesentlich negativ und daher — was auch η bedeuten möge — stets: $|f_1(x)| < e$.

Gehört hingegen x der Peripherie des Einheitskreises an, so möge gesetzt werden $x = e^{\vartheta i}$, also:

$$x + 1 = e^{\frac{1}{2}\vartheta i}\left(e^{\frac{1}{2}\vartheta i} + e^{-\frac{1}{2}\vartheta i}\right) = 2e^{\frac{1}{2}\vartheta i} \cdot \cos\frac{\vartheta}{2}$$

$$x - 1 = e^{\frac{1}{2}\vartheta i}\left(e^{\frac{1}{2}\vartheta i} - e^{-\frac{1}{2}\vartheta i}\right) = 2ie^{\frac{1}{2}\vartheta i} \cdot \sin\frac{\vartheta}{2}.$$

und:

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i \cdot \cot\frac{\vartheta}{2}$$

folglich:

$$(4) \qquad f_1(e^{\vartheta i}) = e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i \cdot \cot\frac{\vartheta}{2}} = e^{\frac{1}{2}}\left\{\cos\left(\frac{1}{2}\cot\frac{\vartheta}{2}\right) - i \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\cot\frac{\vartheta}{2}\right)\right\},$$

[1]) Der Factor e ist nur hinzugefügt, um einen möglichst einfachen Ausdruck für die Entwicklungs-Coefficienten zu erhalten (s. Gl. (9)).

so dass also in diesem Falle $|f_1(x)| = e^{\frac{1}{2}}$ wird — auch in beliebiger Nähe der Stelle $\vartheta = 0$ d. h. $x = 1$.

Es muss daher nach Art. I des vorigen Paragraphen die zunächst für $|x| < 1$ geltende Entwickelung:

$$(5) \qquad f_1(x) = \sum_0^\infty {}^\nu A_\nu x^\nu$$

noch für $|x| = 1$ — mit eventuellem Ausschlusse der Stelle $x = 1$ — convergiren, d. h. es gilt die Entwickelung:

$$(6) \quad f_1(e^{\vartheta i}) = e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i \cdot \cot \frac{\vartheta}{2}} = \sum_0^\infty {}^\nu A_\nu (\cos \nu\vartheta + i \cdot \sin \nu\vartheta)$$

für $0 < \vartheta < 2\pi$, und dieselbe ist mit der Fourier'schen Reihe für $f_1(e^{\vartheta i})$ identisch.

Daraus folgt dann noch insbesondere, dass die Reihe für $\vartheta = 0$ divergirt.

Was die Coefficienten A_ν betrifft, so findet man aus:

$$e \cdot e^{\frac{1}{x-1}} = e \cdot \sum_0^\infty {}^\varkappa (-1)^\varkappa \cdot \frac{1}{\varkappa!} (1-x)^{-\varkappa}$$

$$= e \left(1 + \sum_1^\infty {}^\varkappa (-1)^\varkappa \cdot \frac{1}{\varkappa!} \sum_0^\infty {}^\nu (\varkappa + \nu - 1)_\nu x^\nu \right)$$

unmittelbar für $\nu \geqq 1$:

$$(7) \qquad A_\nu = e \cdot \sum_1^\infty {}^\varkappa (-1)^\varkappa \cdot \frac{1}{\varkappa!} \cdot (\varkappa + \nu - 1)_\nu$$

$$= e \cdot \sum_1^\infty {}^\varkappa (-1)^\varkappa \cdot \frac{1}{\varkappa!} (\varkappa + \nu - 1)_{\varkappa - 1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

und speciell: $A_0 = e \cdot \sum_0^\infty {}^\varkappa (-1)^\varkappa \cdot \frac{1}{\varkappa!} = 1$. Man kann aber auch die hier in Form unendlicher Reihen erscheinenden Grössen A_ν mit Hülfe der Mac Laurin'schen Entwickelung in geschlossener Form darstellen.

Man findet auf diese Weise:

$$A_0 = f_1(0) = 1$$

und für $\nu \geqq 1$:

$$A_\nu = \frac{1}{\nu!} \cdot f_1^{(\nu)}(0) = \frac{1}{\nu!} \cdot e \cdot \left(\frac{d^\nu e^{\frac{1}{x-1}}}{d x^\nu} \right)_{x=0} = \frac{1}{\nu!} \left(\frac{d^\nu e^y}{d\left(\frac{1}{y}\right)^\nu} \right)_{y=-1}.$$

Nun ist allgemein:

$$\frac{1}{\nu!} \cdot \frac{d^\nu \varphi(y)}{d\left(\frac{1}{y}\right)^\nu} = (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu!} \cdot y^{\nu+1} \cdot \frac{d^\nu (y^{\nu-1} \cdot \varphi(y))}{d y^\nu}$$

$$= (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu!} \cdot y^{\nu+1} \cdot \sum_1^\nu{}_\varkappa \, \nu_\varkappa \cdot \frac{(\nu-1)!}{(\varkappa-1)!} \cdot y^{\varkappa-1} \cdot \varphi^{(\varkappa)}(y)$$

$$(8) \qquad = (-1)^\nu \cdot \sum_1^\nu{}_\varkappa \, \frac{1}{\varkappa!} \cdot (\nu-1)_{\varkappa-1} \cdot y^{\nu+\varkappa} \cdot \varphi^{(\varkappa)}(y)$$

und daher:

$$\frac{1}{\nu!} \cdot e \cdot \frac{d^\nu e^y}{d\left(\frac{1}{y}\right)^\nu} = (-1)^\nu \cdot e^{1+y} \cdot \sum_1^\nu{}_\varkappa \, \frac{1}{\varkappa!} \cdot (\nu-1)_{\varkappa-1} \cdot y^{\nu+\varkappa},$$

also schliesslich:

$$(9) \qquad A_\nu = \sum_1^\nu{}_\varkappa \, \frac{(-1)^\varkappa}{\varkappa!} \cdot (\nu-1)_{\varkappa-1}.$$

II. Die Function:

$$(10) \qquad f_2(x) = e^{\frac{1}{1-x}} = e \cdot e^{-\frac{1}{x-1}},$$

welche zu der eben betrachteten in der zwiefachen Beziehung steht:

$$(11) \qquad f_2(x) = \begin{cases} f_1\left(\frac{1}{x}\right) \\ e \cdot \frac{1}{f_1(x)} \end{cases},$$

genügt, wie leicht zu sehen, den in Art. II des vorigen Paragraphen statuirten Bedingungen. Da nämlich:

$$f_2(1+\xi+\eta i) = e^{-\frac{\xi-\eta i}{\xi^2+\eta^2}} \tag{12}$$

also:

$$|f_2(1+\xi+\eta i)| = e^{-\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}} \tag{13}$$

so wächst dieser absolute Betrag über alle Grenzen, falls $|\eta| \leqq k \cdot |\xi|$ (k eine endliche positive Zahl) und ξ negativ, numerisch sehr klein genommen wird, also wenn x auf irgend einer geraden Linie aus dem Innern des Einheitskreises sich der Stelle 1 nähert. Da im übrigen $|f_2(x)|$, wie die erste der Beziehungen (11) lehrt, für Stellen ausserhalb oder auf der Peripherie des Einheitskreises auch in beliebiger Nähe der Stelle $x=1$ stets unter einer endlichen Grenze bleibt, so folgt aus Art. II des vorigen Paragraphen, dass die für $|x|<1$ geltende Potenz-Entwickelung von $f_2(x)$ für $|x|=1$ divergiren muss, während andererseits $f_2(e^{\vartheta i})$ durch eine convergente trigonometrische Reihe mit ganz neuen Coefficienten darstellbar ist. Um diese letztere zu finden, kann man ohne weiteres die Formel (24) des vorigen Paragraphen anwenden. Man hat — unter Beibehaltung der dort angewendeten Bezeichnungen:

$$f_2(x) = e^{\frac{1}{1-x}} = 1 + \sum_1^\infty{}_\nu (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu!}(x-1)^{-\nu}$$

also:
$$C_{-\nu} = (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu!}$$

und daher (nach § 3, Gl. (20)):

$$D_\nu = \sum_1^\nu{}_\varkappa \frac{(-1)^\varkappa}{\varkappa!}(\nu-1)_{\varkappa-1} \quad \text{d. h.} = A_\nu \text{ (Gl. (9))},$$

so dass jene Gl. (24) hier lauten würde:

$$(14) \qquad \lim_{r=1} \left\{ \sum_0^\infty{}^\nu B_\nu r^\nu e^{\nu\vartheta i} \right\} = \sum_1^\infty{}^\nu A_\nu e^{-\nu\vartheta i}.$$

Beachtet man jetzt noch, dass die in § 3 mit B'_ν bezeichneten Grössen für $\nu \geqq 1$ sämmtlich Null sind (da $f_2(x)$ keine singuläre Stelle ausser $x = 1$ besitzt) und dass (§ 3, Fussnote):

$$B'_0 = f_2(0) - \sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu!} = e - (e-1) = 1 = A_0,$$

so kann man Gl. (14) mit Hinzufügung des Gliedes B'_0 folgendermaassen schreiben:

$$(15) \qquad f_2(e^{\vartheta i}) = \sum_0^\infty{}^\nu A_\nu (\cos \nu\vartheta - i \cdot \sin \nu\vartheta),$$

ein Resultat, dessen Richtigkeit man mit Hülfe der Gleichungen (11) und (6) sofort verificiren kann.

Es scheint mir auch nicht ohne Interesse, die aus den allgemeinen Ergebnissen des vorigen Paragraphen hergeleitete D i v e r g e n z der Potenz-Entwickelung von $f_2(x)$ für $|x| = 1$ nachträglich noch durch die Rechnung direct zu bestätigen.

Es werde gesetzt für $|x| < 1$:

$$(16) \qquad f_2(x) = e^{\frac{1}{1-x}} = \sum_0^\infty{}^\nu B_\nu x^\nu$$

(wobei also jetzt das im allgemeinen Falle und oben mit $B'_0 + B_0$ bezeichnete constante Glied der Einfachheit halber mit B_0 bezeichnet ist).

Alsdann hat man $B_0 = f_2(0) = e$ und für $\nu \geqq 1$ zunächst:

$$B_\nu = \frac{1}{\nu!} \left(\frac{d^\nu e^{-\frac{1}{x-1}}}{d x^\nu} \right)_{x=0} = \frac{1}{\nu!} \left(\frac{d^\nu e^{-y}}{d\left(\frac{1}{y}\right)^\nu} \right)_{y=-1},$$

also mit Benützung von Gl. (8):

$$\frac{1}{\nu!}\cdot\frac{d^\nu e^{-y}}{d\left(\frac{1}{y}\right)^\nu} = (-1)^\nu\cdot e^{-y}\cdot \sum_1^\nu{}_\varkappa (-1)^\varkappa\cdot\frac{1}{\varkappa!}(\nu-1)_{\varkappa-1}\cdot y^{\nu+\varkappa}$$

schliesslich:

$$B_\nu = e\cdot\sum_1^\nu{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa!}(\nu-1)_{\varkappa-1}. \tag{17}$$

Da hiernach:

$$B_\nu > e\left(1+\frac{\nu-1}{2}\right),$$

so wird mit $\nu=\infty$ auch $\lim B_\nu=\infty$, was dann nothwendig die Divergenz von $\sum B_\nu x^\nu$ für $|x|=1$ zur Folge hat.

III. Die soeben betrachtete trigonometrische Reihe für $f_2(e^{\vartheta i})$ convergirte mit Ausschluss der einen Stelle $\vartheta=0$. Man kann indessen aus den Ausdrücken $f_1(x)$, $f_2(x)$ leicht neue bilden, deren trigonometrische Entwickelung auf dem Einheitskreise ausnahmslos convergirt, während die betreffende Potenzreihe dort divergirt.

Setzt man zunächst:

$$\begin{aligned} f_3(x) &= f_1(x)-f_2(x) \\ &= e^{\frac{x}{x-1}} - e^{\frac{1}{1-x}} = e^{\frac{1}{2}}\left\{e^{\frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{x-1}} - e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{x-1}}\right\} \\ &= 2i\cdot e^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{1}{2i}\cdot\frac{x+1}{x-1}\right) \end{aligned} \tag{18}$$

so wird die für $|x|<1$ geltende Potenzreihe:

$$f_3(x) = \sum_0^\infty{}_\nu (A_\nu - B_\nu)\cdot x^\nu \tag{19}$$

wiederum für $x=e^{\vartheta i}$ divergiren. Dagegen wird die Reihe:

$$f_3(e^{\vartheta i}) = -2i\cdot e^{\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{1}{2}\cot\frac{\vartheta}{2}\right) = 2i\sum_1^\infty{}_\nu A_\nu\cdot\sin\nu\vartheta \tag{20}$$

jetzt auch noch für $\vartheta = 0$, also ausnahmslos convergiren. Sie convergirt freilich in der Nähe der Stelle $\vartheta = 0$ ungleichmässig — wegen der unendlich vielen Maxima und Minima, welche $f_3(e^{\vartheta i})$ daselbst besitzt.

Indessen auch diese Eigenschaft lässt sich noch beseitigen. Ich setze:

$$F_1(x) = (x-1)\cdot f_1(x) \tag{21}$$

so hat man für $|x| < 1$ nach Gl. (5):

$$\begin{aligned} F_1(x) &= (x-1)\cdot \sum_0^\infty{}^\nu A_\nu x^\nu \\ &= -A_0 + \sum_0^\infty{}^\nu (A_\nu - A_{\nu+1})\, x^{\nu+1} \end{aligned} \tag{22}$$

und nach § 3, Art. I für $0 < \vartheta < 2\pi$:

$$\begin{aligned} F_1(e^{\vartheta i}) &= 2i\cdot\sin\frac{\vartheta}{2}\cdot e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i \left(\vartheta - \cot\frac{\vartheta}{2}\right)} \\ &= -A_0 + \sum_0^\infty{}^\nu \left(A_\nu - A_{\nu+1}\right)\cdot e^{(\nu+1)\vartheta i}. \end{aligned} \tag{23}$$

Diese Reihe convergirt aber auch noch für $\vartheta = 0$ — nämlich gegen den Werth Null (da in Folge der bewiesenen Convergenz von $\sum A_\nu e^{\nu\vartheta i}$ offenbar $\lim_{\nu=\infty} A_\nu = 0$ sein muss). Sie convergirt somit ausnahmslos und, da sie mit der Fourier'schen Reihe für die stetige Function $F_1(e^{\vartheta i})$ identisch ist, auch durchweg gleichmässig.

Betrachtet man nun ferner die Function:

$$F_2(x) = (x-1)\cdot f_2(x) \tag{24}$$

so wird für $|x| < 1$:

$$F_2(x) = (x-1)\sum_0^\infty{}^\nu B_\nu x^\nu = -B_0 + \sum_0^\infty{}^\nu (B_\nu - B_{\nu+1})\cdot x^{\nu+1} \tag{25}$$

und diese Reihe muss wiederum nach § 3, Art. II für $x = e^{\vartheta i}$ divergiren (da ja der Charakter der singulären Stelle $x = 1$ durch den Factor $(x - 1)$ keine wesentliche Veränderung erleidet).

Andererseits hat man aber für $|x| > 1$ nach Gl. (11) und (5):

$$\begin{aligned} F_2(x) &= (x-1) \cdot f_1\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= (x-1) \cdot \sum_0^\infty {}^\nu A_\nu x^{-\nu} \\ &= A_0 x - \sum_0^\infty {}^\nu (A_\nu - A_{\nu+1}) \cdot x^{-\nu} \end{aligned} \tag{26}$$

und da nach § 3, Art. I diese Reihe noch für $x = e^{\vartheta i}$ im allgemeinen convergiren muss:

$$F_2(e^{\vartheta i}) = A_0 e^{\vartheta i} - \sum_0^\infty {}^\nu (A_\nu - A_{\nu+1}) \cdot e^{-\nu \vartheta i}. \tag{27}$$

Die Vergleichung mit der Reihe (23) zeigt dann aber ohne weiteres, dass auch diese Reihe ausnahmslos und durchweg gleichmässig convergiren muss.

Hieraus erkennt man also, dass selbst in dem Falle, wo die Randfunction in eine ausnahmslos gleichmässig convergirende trigonometrische Reihe entwickelt werden kann, man noch keineswegs ohne weiteres auf die Convergenz der im Innern geltenden Potenzreihe für die Stellen des Convergenzkreises schliessen darf.

§ 5.

Während das Charakteristische der in Art. II und III des vorigen Paragraphen betrachteten Beispiele darin bestand, dass die betreffenden Potenzreihen auf dem Convergenzkreise divergiren, obschon die zugehörige Randfunction durch eine convergente Fourier'sche Reihe darstellbar

ist, will ich jetzt, wie in § 1 angekündigt wurde, ein Beispiel einer Potenzreihe geben, welche nachweislich auf dem Convergenzkreise (mit Ausschluss einer einzigen Stelle) noch convergirt, wohingegen die Existenz einer „eigentlichen" Fourier'sche Reihe, d. h. einer solchen mit schlechthin convergenten Integral-Coefficienten (vgl. § 1) nach der Natur der dargestellten Function definitiv ausgeschlossen erscheint.

Ich setze:

$$(1)\qquad f(x) = \frac{x}{(x-1)\, lg\,(1-x)}$$

also für $|x| < 1$:

$$(2)\qquad f(x) = \frac{\sum_0^\infty{}^\nu\, x^\nu}{\sum_0^\infty{}^\nu \frac{x^\nu}{\nu+1}} = \sum_0^\infty{}^\nu\, a_\nu\, x^\nu$$

und daher:

$$(3)\qquad \sum_0^\infty{}^\nu \left(\frac{a_0}{\nu+1} + \frac{a_1}{\nu} + \ldots + \frac{a_{\nu-1}}{2} + \frac{a_\nu}{1}\right) x^\nu = \sum_0^\infty{}^\nu\, x^\nu$$

so dass sich zur Bestimmung der Coefficienten a_ν die Recursionsformel ergiebt:

$$(4)\qquad \sum_0^\nu{}^\varkappa \frac{a_\varkappa}{\nu+1-\varkappa} = 1 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

und hieraus speciell:

$$(5)\qquad a_0 = 1.$$

Ich zeige nun, dass die Coefficienten a_ν sämmtlich positiv sind, mit wachsendem Index ν beständig abnehmen und für $\nu = \infty$ gegen Null convergiren.

Schreibt man in Gl. (2) $(\nu - 1)$ statt ν, also:

$$(6)\qquad \sum_0^{\nu-1}{}^\varkappa \frac{a_\varkappa}{\nu - \varkappa} = 1,$$

und setzt Gl. (4) in die Form:

(7) $$\sum_0^{\nu-1}{}^{\varkappa} \frac{a_\varkappa}{\nu+1-\varkappa} + a_\nu = 1,$$

so folgt durch Subtraction:

(8) $$a_\nu = \sum_0^{\nu-1}{}^{\varkappa} \frac{a_\varkappa}{(\nu-\varkappa)(\nu+1-\varkappa)}$$

Hieraus ergiebt sich, dass $a_\nu > 0$ ist, wenn das gleiche von $a_0, a_1, \ldots a_{\nu-1}$ gilt. Da aber $a_0 = 1$, so folgt in der That allgemein: $a_\nu > 0$.

Schreibt man ferner die Gleichungen (4) und (6) folgendermaassen:

(9) $$\begin{cases} \dfrac{1}{\nu+1} + \sum_1^{\nu}{}^{\varkappa} \dfrac{a_\varkappa}{\nu+1-\varkappa} = 1 \\ \sum_1^{\nu}{}^{\varkappa} \dfrac{a_{\varkappa-1}}{\nu+1-\varkappa} = 1, \end{cases}$$

so folgt wiederum durch Subtraction und Multiplication mit $\nu+1$:

(10) $$(\nu+1)\sum_1^{\nu}{}^{\varkappa} \frac{a_{\varkappa-1}-a_\varkappa}{\nu+1-\varkappa} = 1.$$

Setzt man hier $\nu - 1$ für ν, also:

(11) $$\nu \cdot \sum_1^{\nu-1}{}^{\varkappa} \frac{a_{\varkappa-1}-a_\varkappa}{\nu-\varkappa} = 1$$

und subtrahirt diese Gleichung von der vorigen, so kommt:

$$\sum_1^{\nu-1}{}^{\varkappa} \left\{\frac{\nu+1}{\nu+1-\varkappa} - \frac{\nu}{\nu-\varkappa}\right\}(a_{\varkappa-1}-a)_\varkappa + (a_{\nu-1}-a_\nu) = 0,$$

oder anders geschrieben:

(12) $$a_{\nu-1} - a_\nu = \sum_1^{\nu-1}{}^{\varkappa} \frac{\varkappa(a_{\varkappa-1}-a_\varkappa)}{(\nu-\varkappa)(\nu+1-\varkappa)},$$

d. h. $a_{\nu-1} - a_\nu$ ist sicher positiv, falls alle vorangehenden Differenzen es sind. Da aber aus Gl. (10) für $\nu = 1$:

$a_0 - a_1 = \frac{1}{2}$ sich ergiebt, so folgt wiederum, dass allgemein: $a_{\nu-1} - a_\nu > 0$ sein muss.

Da hiernach die positiven Grössen a_ν mit wachsendem ν beständig abnehmen, so besitzen sie für $\nu = \infty$ einen bestimmten Grenzwerth. Dieser muss aber Null sein, da andernfalls die linke Seite der Recursionsformel (4) wegen der Divergenz der harmonischen Reihe mit ν in's Unendliche wachsen würde.

Aus den eben nachgewiesenen Eigenschaften der Coefficienten a_ν folgt aber bekanntlich die gleichmässige Convergenz der Reihen $\Sigma a_\nu \cos \nu \vartheta$, $\Sigma a_\nu \sin \nu \vartheta$, mit eventuellem Ausschlusse der Stelle $\vartheta = 0$, also schliesslich die gleichmässige Convergenz von $\Sigma a_\nu x^\nu$ für $x = e^{\vartheta i}$, mit eventuellem Ausschlusse der Stelle $x = 1$. Hier divergirt in der That die betrachtete Reihe, wie sich daraus ergiebt, dass $\lim\limits_{x=1} f(x) = +\infty$ wird, wenn x auf dem Radius der Stelle 1 zustrebt.

Andererseits erkennt man ohne weiteres, dass $f(x)$ als Function von x in der Nähe der Stelle $x = 1$ nicht integrabel ist, da sie für $x = 1$ so unendlich wird, wie $\frac{d\, lg\, lg(1-x)}{dx}$. Es muss dann aber auch $f(e^{\vartheta i})$ als Function von ϑ an der Stelle $\vartheta = 0$ die Integrabilität verlieren, da $(e^{\vartheta i} - 1) = 2i \cdot e^{\frac{1}{2}\vartheta i} \cdot \sin \frac{\vartheta}{2}$ für $\vartheta = 0$ gerade so von der ersten Ordnung verschwindet, wie $(x - 1)$ für $x = 1$. Hieraus folgt dann aber, dass die Integral-Coefficienten der Fourier'schen Reihe im „eigentlichen" Sinne divergent werden müssen: die betreffende Reihe ist also eine „uneigentliche" Fourier'sche Reihe in dem oben (§ 1) näher definirten Sinne.

Zur Theorie der synektischen Functionen.

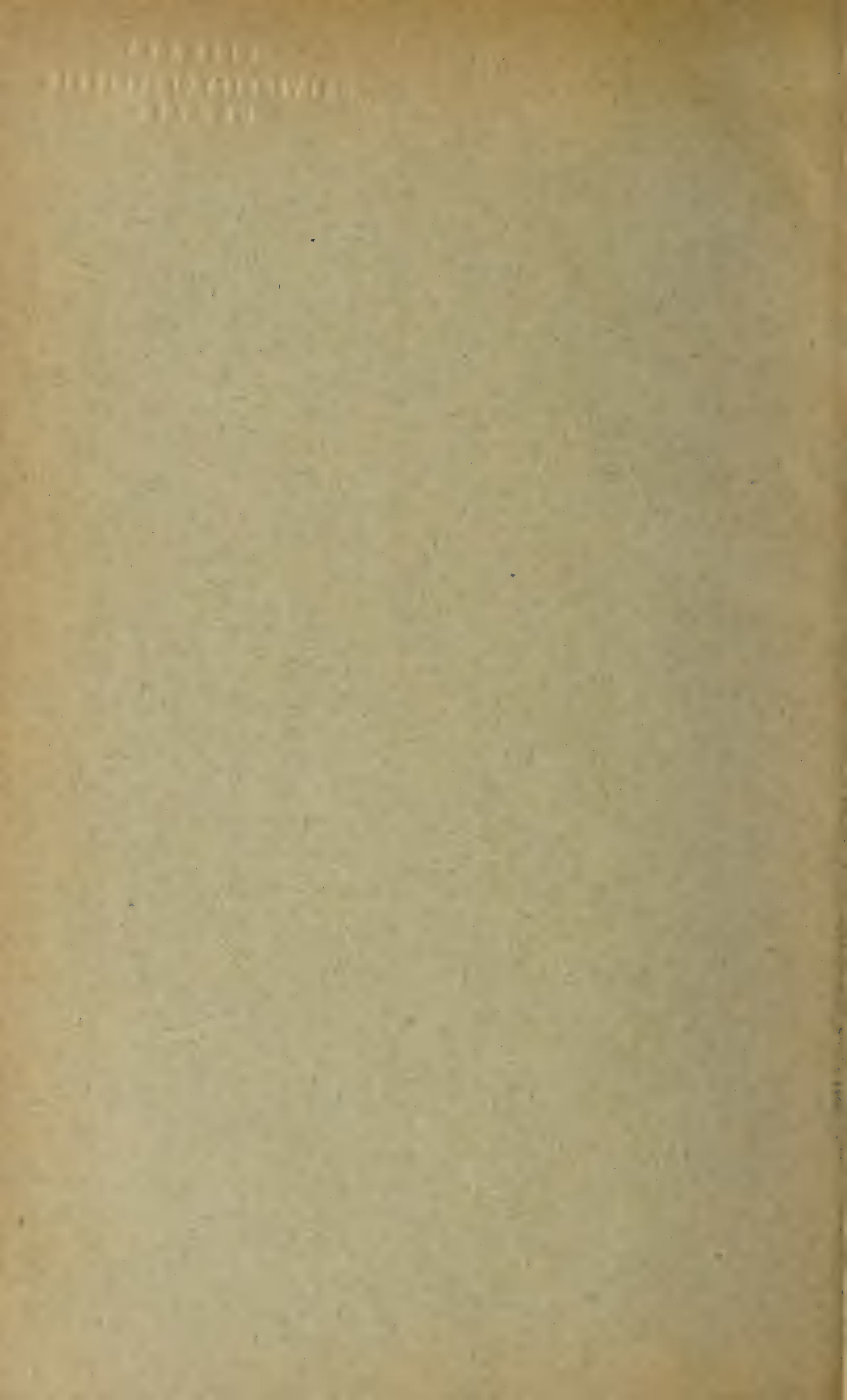
Von

Alfred Pringsheim.

Aus den Sitzungsberichten der mathematisch-physikalischen Classe der k. bayer. Akad. d. Wiss. Bd. XXVI. 1896. Heft I.

München 1896.

Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub.



Zur Theorie der synektischen Functionen.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 9. März.*)

1.

In einer früheren Mittheilung[1]): „Ueber die Entwickelung eindeutiger analytischer Functionen in Potenzreihen" habe ich gezeigt, wie man den Laurent'schen, bezw. den als speciellen Fall darin enthaltenen Taylor'schen (Mac Laurin'schen) Satz für „analytische" (d. h. in der Umgebung jeder nicht singulären Stelle durch eine gewöhnliche Potenzreihe definirte) Functionen mit Hülfe einer gewissen Mittelwerth-Betrachtung völlig streng und zugleich elementar begründen kann.

Hieran anknüpfend habe ich in einem späteren Aufsatze mit dem Titel[2]): „Ueber Vereinfachungen in der elementaren Theorie der analytischen Functionen" hervorgehoben, dass die Gültigkeit derjenigen Beziehungen, welche die eigentliche Grundlage der fraglichen Entwicklungen bilden, keineswegs den „analytischen" Charakter der betreffenden Functionen, sondern lediglich die gleichmässige Stetigkeit ihres Differenzen-Quotienten voraussetzt.[3])

Nachdem ich nun an einer anderen Stelle nachgewiesen, dass diese letztere Eigenschaft allen in irgend einem Bereiche „synektischen", d. h. eindeutigen und mit einem **stetigen**

---

[1]) Sitz.-Ber. 1895, p. 75 ff.

[2]) Math. Ann., Bd. 47, p. 121 ff.

[3]) A. a. O. p. 147, Zusatz.

Differential-Quotienten begabten Functionen zukommt,[1]) liegt es nahe, die in Rede stehende Methode auch für den Beweis der Entwickelbarkeit einer nur als „synektisch" vorausgesetzten Function zu verwerthen. Und da man auf diesem Wege in der That dazu gelangen kann, die Functionen-Theorie auch bei Zugrundelegung des allgemeinen Cauchy-Riemann'schen Functions-Begriffes, in völlig einwandfreier und dabei wesentlich einfacherer Weise aufzubauen, als dies bisher der Fall war, so möchte ich, einer Anregung des Herrn G. Vivanti folgend, die Uebertragbarkeit jener Methode auf synektische Functionen etwas näher begründen und einige weitere Bemerkungen hieran knüpfen.

Ich stelle zu diesem Behufe zunächst die Haupt-Eigenschaften des charakteristischen Mittelwerthes $\mathfrak{M}(f(r))$ in derjenigen Form übersichtlich zusammen, wie sie für den abzuleitenden Beweis zweckmässig erscheint.

2.

Es bedeute $\alpha_n = \beta_n + \gamma_n i$ die am nächsten zu der Stelle 1 gelegene Wurzel der Gleichung $x^{2^n} = 1$ mit positivem γ_n,[2]) $f(x)$ eine zunächst für alle x mit einem gewissen absoluten Betrage $|x| = r$ eindeutig definirte Function. Setzt man sodann:

$$\frac{1}{2^n} \sum_0^{2^n-1} {}^{\nu} f(\alpha_n^{\nu} \cdot r) = \mathfrak{M}_n(f(r)),$$

so gelten die folgenden Sätze:

---

[1]) Zum Cauchy'schen Integralsatze. Sitz.-Ber. 1895, p. 303.

[2]) Also, wenn man von der transscendenten Form der Einheits-Wurzeln Gebrauch machen will:

$$\begin{aligned}\alpha_n &= e^{\frac{2\pi i}{2^n}} \\ &= \cos\frac{\pi}{2^{n-1}} + i \sin\frac{\pi}{2^{n-1}}.\end{aligned}$$

I. Ist $f(x)$ stetig längs des Kreises $|x| = r$ (wobei also ausschliesslich Werthe von x mit absolutem Betrage r in Betracht zu ziehen sind, so besitzt $\mathfrak{M}_n(f(r))$ für $n = \infty$ einen bestimmten Grenzwerth[1]):

$$(1) \qquad \lim_{n=\infty} \mathfrak{M}_n(f(r)) = \mathfrak{M}(f(r)).$$

Dies findet auch dann noch statt, wenn $f(x)$ nur durchweg endlich bleibt, dagegen die Eigenschaft der Stetigkeit nur „im allgemeinen" besitzt, d. h. für eine endliche Anzahl von Stellen endlich-unstetig wird oder innerhalb endlicher Grenzen oscillirt.[2])

II. Ist $f(x)$ durchweg eindeutig definirt und endlich, ausserdem im allgemeinen stetig für alle Stellen x des Ringgebietes $R_0 \leqq |x| \leqq R$, so ist $\mathfrak{M}(f(r))$ für alle x jenes Gebietes eine eindeutige und ausnahmslos stetige Function der reellen Veränderlichen r.

Denn man hat:

$$(2) \quad \left| \mathfrak{M}_n(f(r')) - \mathfrak{M}_n(f(r)) \right| \leqq \frac{1}{2^n} \sum_0^{2^n-1} {}^{\nu} \left| f(\alpha_n^{\nu} \cdot r') - f(\alpha_n^{\nu} \cdot r) \right|.$$

Versteht man hierbei unter r einen beliebig gewählten festen und unter r' einen veränderlichen, dem fraglichen Intervalle angehörigen Werth, so hat man, falls $f(x)$ als ausnahmslos stetig und $\varepsilon > 0$ beliebig klein angenommen wird:

$$|f(x') - f(x)| < \varepsilon \quad \text{etwa für:} \quad |x' - x| < \delta,$$

---

1) Math. Ann. a. a. O. p. 132.

2) A. a. O. p. 134. Mit Benützung bekannter Methoden aus der Theorie der bestimmten Integrale (s. z. B. Dini-Lüroth, Grundlagen für die Theorie der Functionen etc. § 187) lassen sich die zulässigen Ausnahmestellen auch auf gewisse unendliche Punktmengen ausdehnen. Da jedoch die hierdurch zu erzielende Verallgemeinerung für den hier vorliegenden Zweck keine wesentliche Bedeutung besitzt, so sehe ich davon ab.

und daher:

$$\left| \mathfrak{M}_n f(r') - \mathfrak{M}_n f(r) \right| < \varepsilon \quad \text{für:} \quad \left| r' - r \right| < \delta,$$

also schliesslich auch:

$$\left| \mathfrak{M}(f(r')) - \mathfrak{M}(f(r)) \right| \leqq \varepsilon \quad \text{für:} \quad \left| r' - r \right| < \delta.$$

Besitzt $f(x)$ eine endliche Anzahl von Unstetigkeits-Stellen, so werden, wie gross man auch n annehmen mag, in dem rechts stehenden Ausdrucke der Gl. (2) höchstens eine endliche Anzahl (etwa $= m$) von Summanden vorkommen, für welche zwar:

$$| f(x') - f(x) | \geqq \varepsilon,$$

aber immerhin:

$$| f(x') - f(x) | \leqq | f(x') | + | f(x) | < g,$$

wo g eine endliche positive Zahl bedeutet. Alsdann ergibt sich:

$$\left| \mathfrak{M}_n (f(r')) - \mathfrak{M}_n (f(r)) \right| < \left(1 - \frac{m}{2^n}\right) \cdot \varepsilon + \frac{m}{2^n} \cdot g$$

und daher für $n = \infty$:

$$\left| \mathfrak{M}(f(r')) - \mathfrak{M}(f(r)) \right| \leqq \varepsilon,$$

so dass also die Stetigkeit von $\mathfrak{M}(f(r))$ erhalten bleibt.

III. Ist $f(x)$ nicht nur stetig, sondern synektisch für das Ringgebiet $R_0' \leqq |x| \leqq R'$, so dass also $f(x)$ nach dem in Art. 1 citirten Satze einen gleichmässig stetigen Differenzen-Quotienten besitzt[1]), so ist $\mathfrak{M}(f(r))$ für $R_0' \leqq r \leqq R'$ constant[2]), d. h. man hat:

$$\mathfrak{M}(f(R_0')) = \mathfrak{M}(f(r)) = \mathfrak{M}(f(R')). \tag{3}$$

---

[1]) Bei der Bildung des Differential- bezw. Differenzen-Quotienten für eine der Begrenzung angehörige Stelle x kommen auch immer nur solche Werthe x in Betracht, die dem Gebiete $R_0' \leqq |x| \leqq R'$ angehören.

[2]) A. a. O. p. 145. Hauptsatz.

IV. Ist $f(x)$ synektisch für alle x im Innern des Ringgebietes $R_0 < |x| < R$, so gilt zunächst die Beziehung (3) für alle r, welche der Bedingung genügen:

$$R_0' \leq r \leq R', \text{ sofern nur } R_0' > R_0, \ R' < R.$$

Ist dann ferner $f(x)$ noch eindeutig definirt und endlich für alle x mit dem absoluten Betrage R_0 bezw. R und ausserdem im allgemeinen stetig für solche x, welche der Begrenzung, bezw. dem Innern des Ringgebietes $R_0 < x < R$ angehören, so haben zunächst $\mathfrak{M}(f(R_0))$, $\mathfrak{M}(f(R))$ nach I. eindeutig bestimmte endliche Werthe. Da aber andererseits nach II. die Differenzen:

$$|\mathfrak{M}(f(R_0')) - \mathfrak{M}f(R_0))| \quad \text{bezw.} \quad |\mathfrak{M}(f(R')) - \mathfrak{M}(f(R))|$$

gleichzeitig mit

$$R_0' - R_0 \qquad \text{bezw.} \qquad R - R'$$

beliebig klein werden, so folgt, dass geradezu:

$$(4) \quad \mathfrak{M}(f(R_0)) = \mathfrak{M}(f(R_0')) = \mathfrak{M}(f(R')) = \mathfrak{M}(f(R))$$

sein muss.[1])

V. Mit Benützung des letzten Resultates ergiebt sich jetzt leicht, dass die Constanz von $\mathfrak{M}(f(r))$ auch dann erhalten bleibt, wenn für die im übrigen synektische Function im Innern eines gewissen Ringgebietes Punkte vorhanden sind, in denen über den synektischen Charakter von $f(x)$ nur soviel ausgesagt werden kann, dass $f(x)$ daselbst eindeutig und endlich bleibt, während über die Existenz und Stetigkeit des Differential-Quotienten, ja über die Stetigkeit von $f(x)$ selbst keinerlei Voraussetzung besteht.

Denn angenommen, es sei im Innern des Ringgebietes (R_0, R) eine solche Stelle x_0 vorhanden, während $f(x)$ im übrigen für $R_0 < |x| < R$ als synektisch, für $|x| = R_0$, $|x| = R$

---

[1]) Zu II. und IV. vgl. Sitz.-Ber. p. 90, Zusatz I.

zum mindesten als endlich und im allgemeinen stetig vorausgesetzt wird, so theile man das Ringgebiet (R_0, R) durch Einschaltung eines Kreises mit dem Radius $r_0 = |x_0|$ in die zwei Ringgebiete (R_0, r_0) und (r_0, R). Alsdann folgt aber nach Satz IV., dass:

$$\mathfrak{M}(f(R_0)) = \mathfrak{M}(f(r_0)) = \mathfrak{M}(f(R)) \tag{5}$$

d. h. durch das eventuelle Auftreten einer solchen Ausnahme-Stelle x_0 wird die Existenz der Fundamentalgleichung (2) in keiner Weise beeinträchtigt.

Ja man erkennt sogar aus der Art des Beweises, dass das betreffende Resultat auch dann bestehen bleibt, falls über die Beschaffenheit von $f'(x)$ längs des ganzen Kreises $|x| = |x_0|$ gar keine Voraussetzung besteht, sofern die eindeutige Function $f(x)$ daselbst nur durchweg endlich und im allgemeinen stetig bleibt. Und das gleiche gilt offenbar, wenn an die Stelle eines solchen Ausnahmekreises eine beliebige endliche Anzahl solcher Kreise tritt.

3.

I. Sei nun $f(x)$ synektisch im Ringgebiete $R_0 \leqq x \leqq R$.

Bezeichnet dann x_0 irgend eine willkürlich gewählte Stelle im Innern des betreffenden Gebietes, so bilde man:

$$\varphi(x) = x \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{6}$$

Alsdann ist $\varphi(x)$ sicher synektisch für jede von x_0 verschiedene Stelle x, welche dem fraglichen Gebiete angehört. Für $x = x_0$ ist $\varphi(x)$ zunächst überhaupt nicht definirt.

Nun ist aber:

$$\lim_{x=x_0} \varphi(x) = x_0 \cdot f'(x_0). \tag{7}$$

Definirt man also $\varphi(x_0)$ durch die Gleichung:

$$\varphi(x_0) = \lim_{x=x_0} \varphi(x), \tag{8}$$

so ist jetzt $\varphi(x)$ eine im Ringgebiete $R_0 \leqq |x| \leqq R$ ausnahmslos eindeutige und stetige, ausserdem mit eventuellem Ausschlusse der Stelle $x = x_0$ geradezu synektische Function.

In Folge dessen hat man aber:

$$\mathfrak{M}(\varphi(R_0)) = \mathfrak{M}(\varphi(R))$$

und daher:

$$f(x_0) \cdot \mathfrak{M}\left(\frac{R}{R - x_0}\right) - f(x_0) \cdot \mathfrak{M}\left(\frac{R_0}{R_0 - x_0}\right)$$
$$= \mathfrak{M}\left(\frac{R \cdot f(R)}{R - x_0}\right) - \mathfrak{M}\left(\frac{R_0 f(R)}{R_0 - x_0}\right),$$

woraus dann durch genau dieselben Entwickelungen, wie an den entsprechenden Stellen der oben citirten Aufsätze[1]), der Laurent'sche bezw. im Falle $R_0 = 0$, der Mac Laurin'sche Satz sich ergiebt.

II. Ueberträgt man diese Resultate von einem Ringgebiete mit dem Mittelpunkte $x = 0$ auf ein solches mit beliebigem Mittelpunkte x_0, so erkennt man zunächst, dass eine für eine gewisse Umgebung $|x - x_0| < \varrho$ einschliesslich der Stelle x_0 synektische Function, durch eine für $|x - x_0| < \varrho$ convergirende Reihe nach positiven Potenzen dargestellt werden kann. Dies findet aber für jede von x_0 verschiedene Stelle x jener Umgebung selbst dann noch statt, wenn die Beschaffenheit von $f(x)$ für die Stelle x_0 selbst fraglich ist, und nur so viel feststeht, dass $|f(x)|$ in beliebiger Nähe der Stelle x_0 unter einer endlichen Grenze bleibt: denn in diesem Falle kann die zunächst nach dem Laurent'schen Satze sich ergebende Entwickelung für $f(x)$ in Wahrheit keine negativen Potenzen von $(x - x_0)$ enthalten. Schliesst man sodann mit Riemann ein für allemal den Fall aus[2]), dass $f(x)$ hebbare Unstetigkeiten besitzt, so folgt ohne weiteres, dass die betreffende Entwickelung auch noch für die Stelle x_0 gilt, und dass somit $f(x)$ auch für $x = x_0$ synektisch ist.

---

[1]) Sitz.-Ber. p. 86. Math. Ann. p. 148.

[2]) Ges. Werke, p. 21.

Hiernach ist also eine in einem gewissen Bereiche eindeutige und endliche Function $f(x)$, welche daselbst „im allgemeinen“[1]) synektisch ist, in jenem Bereiche ausnahmslos synektisch, und es zieht somit die „im allgemeinen“ vorausgesetzte Stetigkeit von $f'(x)$ die ausnahmslose Stetigkeit nach sich. Man erkennt also auf diesem völlig elementaren Wege einen fundamentalen Unterschied zwischen den differenzirbaren Functionen einer complexen und denjenigen einer reellen Veränderlichen. Bei letzteren kann, wenn auch $f'(x)$ vorwärts und rückwärts genommen für jede Stelle x irgend eines reellen Intervalles einen eindeutig bestimmten, im allgemeinen mit x stetig veränderlichen Werth besitzt, noch keineswegs auf die ausnahmslose Stetigkeit von $f'(x)$ geschlossen werden. Man betrachte z. B. die Function $f(x) = x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}$, wobei speciell $f(0) = 0$ definirt werden mag. Man hat hier:

$$f'(0) = \lim_{h=+0} h \cdot \sin \frac{1}{h} = 0$$

und für jedes 0 verschiedene x:

$$f'(x) = 2\,x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

so dass $f'(x)$, obschon durchweg eindeutig definirt und ausser für $x = 0$ auch stetig, an der Stelle $x = 0$ unstetig ist.

4.

I. Nachdem nun durch die Ergebnisse des vorigen Artikels festgestellt worden ist, dass jede in einem Bereiche T synektische Function (ein Begriff, der bei Einführung geeigneter Grenzen auch die einzelnen Zweige der mehrdeutigen, differenzirbaren Functionen umfasst) in der Umgebung jeder im Innern von T gelegenen Stelle x_0 nach ganzen positiven Potenzen von

---

[1]) Vgl. Art. 2, I, Fussnote.

$(x - x_0)$ entwickelt werden kann, lässt sich auch die Lehre von den Integralen solcher Functionen in überaus einfacher Weise begründen: das Cauchy'sche Fundamental-Theorem erscheint hierbei als eine Folge der elementarsten Sätze aus der gewöhnlichen Integral-Rechnung. Da mir die fragliche Beweismethode bisher nirgends begegnet ist, so mag es gestattet sein, zur näheren Erläuterung des Gesagten Folgendes zu bemerken.[1])

Ist $\varphi(u)$ eine stetige, reelle oder complexe Function der reellen Veränderlichen u mit einem integrablen Differential-Quotienten, so hat man:

$$\int_{u_0}^{u_1} \frac{d\,\varphi(u)}{d\,u} = \varphi(u_1) - \varphi(u_0) = \Big[\varphi(u)\Big]_{u_0}^{u_1}.$$

Da nun, falls c eine beliebige relle oder complexe Constante bedeutet:

$$\frac{d}{d\,u}(u+c)^{n+1} = (n+1)\cdot(u+c)^n$$

für jedes positive oder negative ganzzahlige n mit Ausschluss von $n = -1$ (aber mit Einschluss von $n = 0$), so wird:

$$(9)\quad \begin{cases} (n+1)\displaystyle\int_{u_0}^{u_1}(u+c)^n\cdot d\,u = \Big[(u+c)^{n+1}\Big]_{u_0}^{u_1} \\ (n+1)\displaystyle\int_{u_0}^{u_1}(ui+c)^n\cdot i\,du = (n+1)\cdot i^{n+1}\cdot\displaystyle\int_{u_0}^{u_1}(u-ci)^n\cdot du \\ \qquad = i^{n+1}\cdot\Big[(u-ci)^{n+1}\Big]_{u_0}^{u_1} = \Big[(ui+c)\Big]_{u_0}^{u_1}. \end{cases}$$

---

[1]) Während der Drucklegung dieser Note ist der zweite Theil von Herrn O. Stolz' Grundzügen der Differential- und Integralrechnung erschienen. Hier wird (Abschnitt XV, Nr. 2) das Cauchy'sche Integral-Theorem für „holomorphe" Functionen (d. h. solche, die in der Umgebung jeder Stelle x_0 durch eine $\mathfrak{P}(x - x_0)$ darstellbar sind) in ganz ähnlicher Weise begründet und als Quelle für diese Beweis-Methode auf die Weierstrass'schen Vorlesungen verwiesen.

Bedeutet jetzt für $x = \xi + \eta i$

$$f(x) = \varphi(\xi, \eta) + i \cdot \psi(\xi, \eta)$$

eine zwischen den Punkten $x_0 = \xi_0 + \eta_0 i$ und $x_1 = \xi_1 + \eta_1 i$ längs der Curve $C(\xi, \eta) = 0$ eindeutig definirte, endliche und im allgemeinen stetige Function von x, so definire man das über den Integrationsweg (C) von x_0 bis x_1 erstreckte Integral durch die Gleichung:

$$(10) \quad \int_{C\; x_0}^{x_1} f(x)\, dx = \int_{C\; \xi_0, \eta_0}^{\xi_1, \eta_1} \left\{ \varphi(\xi, \eta) + i \cdot \psi(\xi, \eta) \right\} (d\xi + i\, d\eta).$$

Dasselbe hat alsdann einen bestimmten, lediglich von den Werthen, welche $f(x)$ längs der Curve C annimmt, nicht aber von der besonderen Form des dabei zu Grunde gelegten arithmetischen Ausdruckes abhängigen Werth. Bei Umkehrung der Integrations-Richtung geht dieser Werth in den entgegengesetzten über.

Nun betrachte man zunächst das Integral $\int x^n \cdot dx$ erstreckt über die Begrenzung (R) eines Rechteckes mit den Eckpunkten: $a + bi$, $a' + bi$, $a' + b'i$, $a + b'i$, wobei etwa $a + bi$ den linken unteren Eckpunkt bezeichnen möge, so dass also die Folge jener Punkte der gewöhnlich als positiv bezeichneten Integrations-Richtung entspricht, so ergiebt sich zunächst auf Grund der Definitions-Gleichung (10):

$$\int_{(R)} x^n \cdot dx = \int_a^{a'} (\xi + b\, i)^n \cdot d\xi + \int_b^{b'} (a' + \eta\, i)^n \cdot i\, d\eta$$

$$+ \int_{a'}^{a} (\xi + b'\, i)^n \cdot d\xi + \int_{b'}^{b} (a + \eta\, i)^n \cdot i\, d\eta,$$

also mit Benützung von Gl. (9):

$$\int\limits_{(R)} x^n \cdot dx = \frac{1}{n+1} \left\{ \Big[(\xi + b\,i)^{n+1}\Big]_a^{a'} + \Big[(a' + \eta\,i)^{n+1}\Big]_b^{b'} \right.$$
$$\left. + \Big[(\xi + b'\,i)^{n+1}\Big]_{a'}^{a} + \Big[(a + \eta\,i)^{n+1}\Big]_{b'}^{b} \right\}$$

das heisst

(11) $$\int\limits_{(R)} x^n \cdot dx = 0$$

und zwar für $n \geqq 0$ und $n \leqq -2$, mit der einzigen Einschränkung, dass im Falle eines negativen n die Stelle $x = 0$ nicht gerade auf der Begrenzung (wohl aber im Innern) von R liegen darf.

Ersetzt man in (11) x durch $x - x_0$ (was wegen der Willkürlichkeit der in Gl. (9) mit c bezeichneten Constante ohne weiteres zulässig ist), so folgt, dass auch:

(12) $$\int\limits_{(R)} (x - x_0)^n \cdot dx = 0 \quad (n \geqq 0,\ n \leqq -2),$$

sofern nur für $n < 0$ die Stelle x_0 nicht auf der Begrenzung von R liegt.

Dieses Resultat lässt sich offenbar ohne weiteres auf den Fall übertragen, dass an die Stelle des Rechtecks (R) ein „Treppen-Polygon" (d. h. eine gebrochene, aus Parallelen zu den Coordinatenaxen bestehende, sich selbst nicht schneidende, geschlossene Linie) tritt, da ein solches durch Einschaltung passender Hülfslinien stets in eine endliche Anzahl von Rechtecken zerlegt werden kann, und die von diesen Hülfslinien herrührenden Integral-Bestandtheile sich schliesslich wieder herausheben.

Und da man einer beliebigen, einfach geschlossenen Curve (S) stets ein solches Treppen-Polygon (P) so zuordnen kann, dass die Differenz der über (S) und (P) erstreckten Integrale beliebig klein wird[1]), so findet man, dass auch:

---

[1]) Vgl. „Ueber den Cauchy'schen Integralsatz", Sitz.-Ber. 1895, p. 56 ff. 66 ff.

$$(13) \qquad \int_{(S)} (x - x_0)^n \cdot dx = 0 \quad (n \geqq 0,\ n \leqq -2)$$

(immer mit der Einschränkung, dass x_0 im Falle $n < 0$ nicht auf der Curve (S) liegen darf).

Wenn jetzt die Reihen:

$$\sum_0^\infty {}^\nu a_\nu \cdot (x - x_0)^\nu, \quad \sum_2^\infty {}^\nu a_{-\nu} \cdot (x - x_0)^{-\nu}$$

für irgend welche Bereiche convergiren, so ergiebt sich vermöge der gleicmässigen Convergenz solcher Reihen, dass:

$$(14) \quad \int_{(S)} \left(\sum_0^\infty {}^\nu a_\nu \cdot (x - x_0)^\nu \right) \cdot dx = \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu \int_{(S)} (x - x_0)^\nu \cdot dx = 0$$

$$(15) \quad \int_{(S)} \left(\sum_2^\infty {}^\nu a_{-\nu} \cdot (x - x_0)^{-\nu} \right) \cdot dx = \sum_2^\infty {}^\nu a_{-\nu} \cdot \int_{(S)} (x - x_0)^{-\nu} \cdot dx = 0,$$

falls die geschlossene Curve (S) dem Convergenz-Bereiche der betreffenden Reihe angehört.

II. Nun sei $f(x)$ synektisch zum mindesten für alle Stellen im Innern eines gewissen Bereiches T, und es bedeute T' ein von einer oder mehreren Randcurven begrenztes, innerhalb T liegendes Flächenstück. Alsdann existirt für jede Stelle x_0 im Innern und auf der Begrenzung von T' eine gewisse Umgebung $|x - x_0| < \varrho$, innerhalb deren eine Entwickelung von der Form $f(x) = \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu (x - x_0)^\nu$ besteht. Die positive Zahl ϱ_0 besitzt nun nach bekannten Sätzen ein gewisses von Null verschiedenes Minimum δ. Zerlegt man jetzt den Bereich T' durch Parallelen zu den Coordinaten-Axen im Abstande $\frac{\delta}{\sqrt{2}}$ in Theilbereiche, so ist die grösste Entfernung zweier Punkte, von denen einer im Innern, der andere auf der Grenze eines solchen Theilbereiches t liegt, kleiner als die Diagonale

eines Quadrates mit der Seite $\frac{\delta}{\sqrt{2}}$ d. h. $< \delta$. Nimmt man also eine Stelle x_0 ganz beliebig im Innern von t an, so liegt dessen gesammte Begrenzung noch innerhalb des Gültigkeits-Bereiches der Entwickelung $f(x) = \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu (x - x_0)^\nu$. Alsdann ergiebt sich aber nach Gl. (15):

$$\int_{(t)} f(x) \cdot dx = 0 \tag{16}$$

und aus der Addition der von allen einzelnen Theilbereichen herrührenden Integrale (wobei sich wegen der Eindeutigkeit von $f(x)$ wiederum alle auf die Hülfslinien erstreckten Integrale herausheben):

$$\int_{(T')} f(x) \cdot dx = 0, \tag{17}$$

womit das Cauchy'sche Fundamental-Theorem bewiesen ist.

Dabei kann schliesslich für die Integrations-Curve (T') auch die Begrenzung (T) — ganz oder theilweise — substituirt werden, soweit $f(x)$ daselbst noch durchweg endlich und im allgemeinen stetig ist.

III. Ist α eine singuläre Stelle von $f(x)$, so wird die Laurent'sche Entwickelung:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^\nu a_\nu (x - \alpha)^\nu$$

negative Potenzen von $(x - \alpha)$ in begrenzter oder unbegrenzter Zahl enthalten. Bedeutet dann wieder (S) eine geschlossene, im Convergenz-Bereiche dieser Entwickelung verlaufende Curve, so folgt mit Benützung der Gleichungen (14) und (15), dass:

$$\int_{(S)} f(x) \cdot dx = a_{-1} \int_{(S)} (x - \alpha)^{-1} \cdot dx \tag{18}$$

Ich möchte noch zeigen, wie man dieses Integral oder, was auf dasselbe hinausläuft, das Integral $\int x^{-1} \cdot d\,x$, erstreckt über eine geschlossene Curve um den Nullpunkt, in sehr einfacher Weise ohne Benützung der sonst üblichen Polar-Coordinaten auswerthen kann.

Ich nehme als Integrationsweg das Quadrat mit den Eckpunkten:

$$-1-i, \qquad 1-i, \qquad 1+i, \qquad -1+i.$$

Alsdann ergiebt sich:

$$\int_{(0)} \frac{d\,x}{x} = \int_{-1}^{+1} \frac{d\,\xi}{\xi - 1} + \int_{-1}^{+1} \frac{i\,d\,\eta}{1 + \eta\,i} + \int_{+1}^{-1} \frac{d\,\xi}{\xi + i} + \int_{+1}^{-1} \frac{i\,d\,\eta}{-1 + \eta\,i}$$

$$= \int_{-1}^{+1} \left\{ \frac{1}{\xi - i} - \frac{1}{\xi + i} \right\} d\,\xi + \int_{-1}^{+1} \left\{ \frac{1}{1 + \eta\,i} + \frac{1}{1 - \eta\,i} \right\} i\,d\,\eta$$

$$= 2\,i \int_{-1}^{+1} \frac{d\,\xi}{1 + \xi^2} + 2\,i \int_{-1}^{+1} \frac{d\,\eta}{1 + \eta^2}$$

$$= 8\,i \int_0^1 \frac{d\,u}{1 + u^2} = 8\,i \sum_0^\infty{}^{\nu} (-1)^\nu \cdot \frac{1}{2\,\nu + 1} = 2\,\pi\,i.$$

Und hieraus allgemein:

$$\int_{(a)} \frac{d\,x}{x - a} = 2\,\pi\,i. \tag{19}$$

Mit Hülfe dieser letzten Beziehung und der Identität:

$$\int_{(T)} \frac{f(x) - f(x')}{x - x'}\,d\,x = \int_{(T)} \frac{f(x)}{x - x'}\,d\,x - f(x') \int_{(T)} \frac{d\,x}{x - x'}$$

findet man, da das links stehende Integral nach II den Werth Null hat, wenn $f(x)$ innerhalb (T) synektisch und auf der Begrenzung noch endlich und im allgemeinen stetig ist, schliesslich noch den Cauchy'schen Randintegral-Satz:

(20) $$f(x') = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(T)} \frac{f(x)}{x - x'} \cdot dx,$$

wo x' jede beliebige innerhalb (T) gelegene Stelle bedeuten kann.

IV. Unmittelbar aus der Definition eines Integrals von der Form $\int_{x_0}^{x_1} f(x) \cdot dx$ folgt, dass der absolute Werth eines solchen Integrals zugleich mit der Länge des Integrationsweges beliebig klein wird, falls $|f(x)|$ auf demselben durchweg unter einer endlichen Grenze bleibt.

Sind jetzt m, n zwei ganze positive Zahlen ohne gemeinsamen Theiler, $\varphi(x)$ eine innerhalb eines gewissen Bereiches T synektische Function, α irgend eine im Innern von (T) gelegene Stelle, so lässt sich noch zeigen, dass für $m < n$ das Integral:

$$\int \frac{\varphi(x)}{(x - \alpha)^{\frac{m}{n}}} dx$$

nach Festsetzung eines bestimmten Anfangs-Werthes für $(x - \alpha)^{\frac{m}{n}}$, einen bestimmten endlichen Werth besitzt, falls es über eine innerhalb (T) verlaufende, den Punkt α zunächst nicht umkreisende Curve bis nach α hin erstreckt wird; und dass dasselbe Integral, genommen über eine einfach geschlossene Curve um den Punkt α herum, zugleich mit dem Integrationswege beliebig klein wird.

Beides erkennt man mit Hülfe der Substitution:

$$(x - \alpha)^{\frac{1}{n}} = z, \text{ also: } x = z^n + \alpha,$$

vermöge deren:

$$\int \frac{\varphi(x)}{(x - \alpha)^{\frac{m}{n}}} dx = \int z^{n-m-1} \cdot \varphi(z^n + \alpha) \cdot dz$$

wird. Dabei ist $n - m - 1 \geqq 0$, da $n > m$ vorausgesetzt wurde, und zugleich $\varphi(z^n + \alpha)$ für die dem Werthe $x = \alpha$ entsprechende

Stelle $z = 0$ eine synektische Function von z, so dass die Richtigkeit der beiden ausgesprochenen Behauptungen ohne weiteres aus dem Hauptsatze II. und der am Eingange von IV. gemachten Bemerkung hervorgeht.

Die vorstehenden Sätze reichen im wesentlichen vollständig aus, um die Lehre von den Integralen rationaler Functionen, den cyclometrischen, elliptischen und hyperelliptischen Integralen mit einem verhältnissmässig geringen Aufwand von functionentheoretischen Hülfsmitteln zu entwickeln.

1

Ueber

die sogenannte Grenze und die Grenzgebiete zwischen Convergenz und Divergenz.

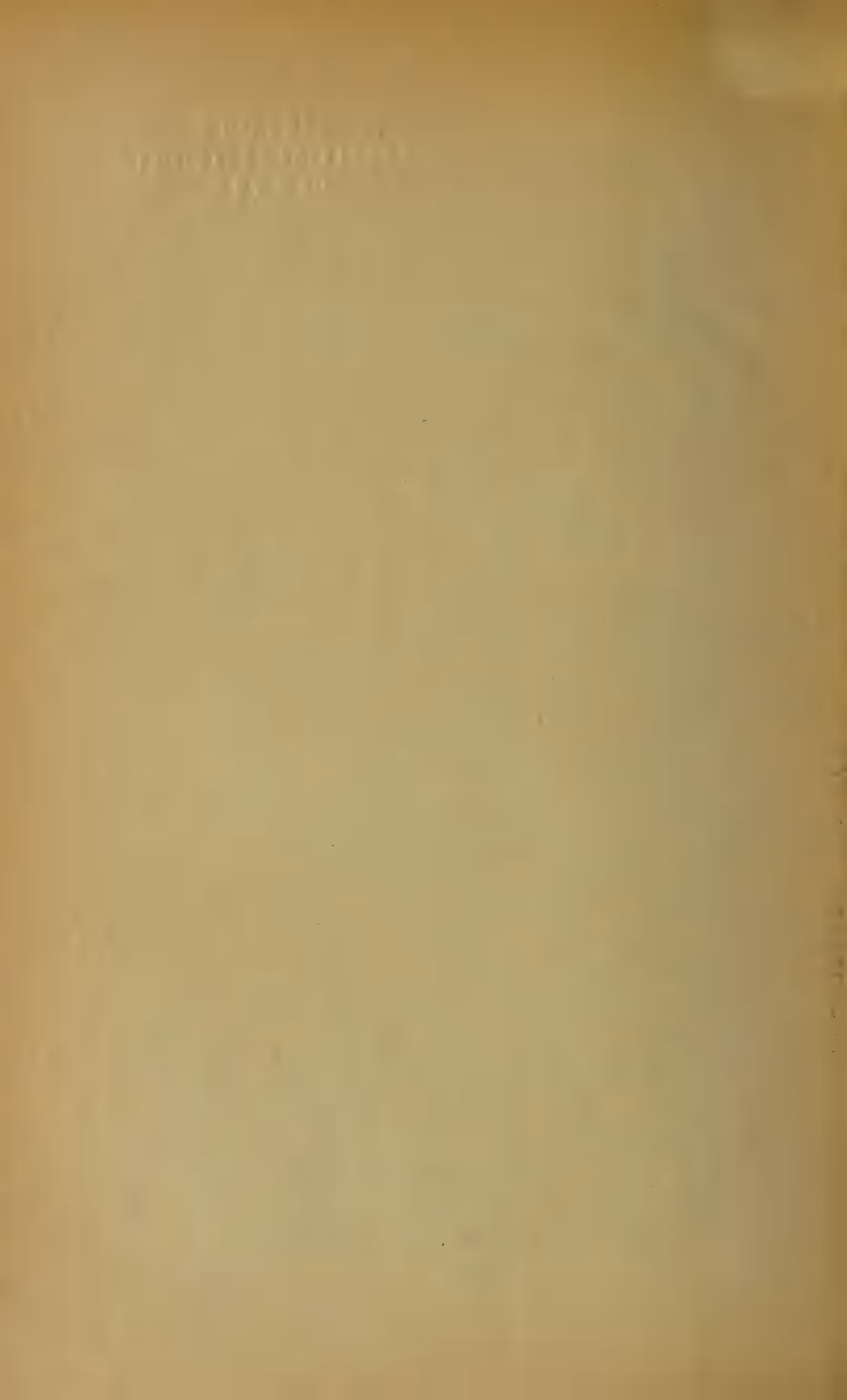
Von

Alfred Pringsheim.

Aus den Sitzungsberichten der mathematisch-physikalischen Classe der k. bayer. Akad. d. Wiss. Bd. XXVI. 1896. Heft IV.

München 1897.

Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub.



Ueber die sogenannte Grenze und die Grenzgebiete zwischen Convergenz und Divergenz.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 12. Dezember.*)

§ 1. Ueber die Du Bois-Reymond'sche Function $\tau(\alpha)$ als Grenze zwischen Convergenz und Divergenz.

In seinen „Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungsformeln"[1]) hat Du Bois-Reymond eine Function $\tau(\alpha)$ eingeführt,[2]) welche für $\alpha = 0$ ohne Maxima und Minima verschwindet und „**die Grenze der Convergenz und Divergenz** des Integrals:

$$\int_0^a d\alpha \cdot \frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$$

bildet". Dazu bemerkt er zunächst in einer erläuternden Fussnote: „Die Einführung dieser Function $\tau(\alpha)$ kann als Widerspruch mit dem Schluss angesehen werden, dass es keine Function gibt, welche die Grenze zwischen Convergenz und Divergenz bildet. **Ein Widerspruch ist indessen hier nicht vorhanden.** Die genauere Erörterung dieser etwas subtilen Frage werde ich demnächst an anderem Orte geben.[3]) Hier nur in Kürze die Andeutung, dass die Function τ zu den von der

---

[1]) Abh. d. bayer. Akad. d. W., Cl. II, Bd. XII (1876).

[2]) A. a. O. Einleitung, p. XV.

[3]) Dies ist, so viel ich weiss, leider nicht geschehen.

Seite der Divergenz wie von der Seite der Convergenz her sich ihr nähernden Functionen in ähnlicher Beziehung steht, wie der Kreis zu den ihm umschriebenen und eingeschriebenen Linien ....“

Dies mag auf den ersten Blick ganz plausibel erscheinen, auch wenn man davon absieht, dass das zur Erläuterung herangezogene Beispiel des Kreises als Grenze der umschriebenen und eingeschriebenen Polygone durchaus unpassend gewählt ist. Denn der Kreis kann unabhängig von jenem Grenz-Processe reingeometrisch oder analytisch vollständig definirt werden: derselbe erscheint also bei dem fraglichen Grenz-Processe als ein **a priori** schon vorhandenes Object, welches lediglich zu einer unendlichen Folge von umschriebenen oder eingeschriebenen Polygonen in eine gewisse Beziehung gesetzt wird, genau so, wie z. B. die **rationale** Grenze eines unbegrenzten periodischen Decimalbruches zu der betreffenden Folge von endlichen Decimalbrüchen.

Im übrigen führt gerade diese letzte Bemerkung unmittelbar auf ein völlig zutreffendes Analogon, nämlich die Einführung der Irrationalzahlen auf Grund der Cantor'schen Definitions-Methode.[1]) Hier wird einer passend gewählten unbegrenzten Folge von rationalen Zahlen (z. B. einem nicht-periodischen unbegrenzt fortsetzbaren Decimalbruche) ein neues Zahlzeichen und damit eine neue Zahl zugeordnet und als Grenze jener Folge von Rationalzahlen **bezeichnet.** Dieser neuen Zahl können dann bestimmte **Eigenschaften** nur in der Weise beigelegt werden, dass dieselben durch entsprechende Eigen-

---

[1]) Du Bois-Reymond verwirft freilich in seiner „Allgemeinen Functionen-Theorie“ (Tübingen 1882) jene „rein formale“ Auffassungsweise des Zahlbegriffes (a. a. O. p. 55), ohne aber etwas besseres oder überhaupt nur brauchbares an deren Stelle zu setzen. Weder der Du Bois-Reymond'sche „Idealist“, noch sein „Empirist“ gelangen zu einer arithmetisch-strengen Definition des allgemeinen Zahlbegriffes. Was im übrigen bei dieser angeblich „philosophischen“, schwerlich aber „mathematischen“ Betrachtungsweise herauskommt, davon liefert die genauere Untersuchung der in Rede stehenden Function $\tau(a)$ ein beredtes Beispiel.

schaften der betheiligten rationalen Zahlen definirt werden. So gilt z. B. jene neue Zahl (Irrationalzahl) als positiv, wenn alle Terme der definirenden Zahlenfolge von irgend einem bestimmten ab über einer gewissen positiven Zahl liegen; sie heisst grösser als irgend eine rationale Zahl a, wenn alle Terme von irgend einem bestimmten ab $\geqq a + \varepsilon$ sind (wo $\varepsilon > 0$), u. s. f.

In analoger Weise kann man einer passend gewählten unbegrenzten Functionen-Folge ein neues Functions-Zeichen zuordnen und gelangt damit zur Einführung einer neuen, etwa als Grenz-Function jener Folge zu bezeichnenden Function, sobald es gelingt, für jenes neue Functions-Zeichen bestimmte Eigenschaften, Grössen-Beziehungen, Rechnungs-Operationen durch diejenigen zu definiren, welche den einzelnen Individuen der betreffenden Functionen-Folge zukommen. In diesem Sinne kann man z. B. e^x als Grenz-Funktion der Folge:

$$\left(1+\frac{x}{1}\right)^1, \left(1+\frac{x}{2}\right)^2, \ldots \left(1+\frac{x}{\nu}\right)^\nu, \ldots .$$

oder lg x als Grenz-Function der Folge:

$$1\cdot(\sqrt[1]{x}-1),\ 2\cdot(\sqrt[2]{x}-1),\ \ldots\ \nu\cdot(\sqrt[\nu]{x}-1),\ \ldots$$

einführen.

Von einem Versuche, die fragliche Function $\tau(\alpha)$ in solcher Weise wirklich zu definiren, ist nun freilich bei Du Bois-Reymond mit keinem Worte die Rede. Er sagt darüber lediglich Folgendes:[1])

„Wenn man die Grenze zwischen Convergenz und Divergenz auch nicht wirklich darstellen kann, so hindert dies nicht, in den Calcul eine **ideale** Function $\tau(\alpha)$ einzuführen, von solcher Beschaffenheit, dass das Integral

---

[1]) A. a. O. p. 45.

$$\int_0^a d\alpha \cdot \frac{\tau(\alpha)}{\alpha}$$

convergirt, dass aber jedes Integral

$$\int_0^a d\alpha \cdot \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$$

divergirt, in welchem $\varphi(\alpha) \succ \tau(\alpha)$ gedacht sind."

Ich muss bekennen, dass ich von einer solchen „idealen" Function keine rechte Vorstellung habe. Angenommen aber, sie liesse sich in dem oben bezeichneten Sinne wirklich definiren, so kann man nach einer bekannten Mcthode sofort auch Functionen $\tau_1(\alpha) > \tau(\alpha)$ (und sogar: $\tau_1(\alpha) \succ \tau(\alpha)$) herstellen, für welche das Integral:

$$\int_0^a d\alpha \cdot \frac{\tau_1(\alpha)}{\alpha}$$

ebenfalls noch convergirt: alsdann stellt aber $\tau(\alpha)$ nicht die praetendirte Grenze zwischen Convergenz und Divergenz dar.

Hiernach erscheint die Einführung einer solchen Function $\tau(\alpha)$ unzulässig, nicht deshalb, weil sie durch bekannte Functionen nicht dargestellt werden kann, sondern weil die blosse Annahme ihrer Existenz auf einen logischen Widerspruch führt.

Man könnte nun etwa zur Rettung dieser Function $\tau(\alpha)$ auf die Riemann'schen Flächen hinweisen, deren sich gegenseitig durchsetzende Blätter zwar nicht mit unseren Denkgesetzen, aber, genau genommen, mit unserem[1]) geometrischen Vorstellungs-Vermögen im Widerspruche stehen. Man tolerirt aber diesen Widerspruch lediglich wegen des praktischen Nutzens, welchen die fragliche Fiction der Functionen-Theorie thatsächlich gestiftet hat. Ein solcher ist ihr jedoch aus der Einführung der Function $\tau(\alpha)$ bisher nicht

[1]) Vielleicht auch nur mit dem meinigen?

erwachsen[1]) und steht auch kaum zu erhoffen: in Folge dessen liegt auch keinerlei Grund vor, die so wunderbar vollkommene und präcise Sprache der Analysis durch dergleichen „ideale“ Zuthaten zu verunzieren.

§ 2. Ueber Grenzgebiete zwischen Convergenz und Divergenz.

Während sich die Annahme einer Grenze zwischen der Convergenz und Divergenz des Integrals

$$\int_0^a d\alpha \cdot \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$$

als unzulässig erwiesen hat, kann man in gewissem Sinne von Grenzgebieten zwischen der Convergenz und Divergenz eines solchen Integrales reden. Der Sinn und die Tragweite dieses Begriffes soll jetzt einer genaueren Untersuchung unterworfen werden und zwar will ich dieselbe, um sie möglichst elementar zu gestalten, zunächst nicht für ein bestimmtes Integral, sondern für eine unendliche Reihe führen. Dabei kann es sich selbstverständlich lediglich um Reihen mit lauter gleichbezeichneten (etwa positiven) und monoton gegen Null abnehmenden Gliedern handeln, da für andere Reihen (geradeso wie für bestimmte Integrale von Functionen mit unendlich vielen Maximis und Minimis) die Möglichkeit derartiger Betrachtungen a priori ausgeschlossen erscheint.

Es seien nun c_ν, d_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) zwei monoton gegen Null abnehmende Folgen positiver Zahlen von der Beschaffenheit, dass Σc_ν convergirt, Σd_ν divergirt und dass $d_\nu > c_\nu$

[1]) Du Bois-Reymond sagt hierüber — am Schlusse der oben citirten Fussnote — selbst Folgendes: „**Praktisch** braucht man übrigens unter τ nicht die Grenze der Convergenz und Divergenz selbst sich vorzustellen, sondern es genügt, darunter eine Function sich zu denken, die der Grenze näher liegt, als alle anderen in den gerade vorgelegten Calcul eingehenden.“

für jedes endliche ν, $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{d_\nu}{c_\nu} = \infty$. Nach bekannten Sätzen aus der Reihenlehre[1]) können hierbei die c_ν und d_ν als „beliebig nahe" an einander liegend angenommen werden, d. h. so, dass der Quotient $\frac{d_\nu}{c_\nu}$ mit unbegrenzt wachsenden Werthen von ν beliebig langsam ins Unendliche wächst.

Bedeutet jetzt a_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) eine andere positive, monotone Zahlenfolge, so convergirt die Reihe Σa_ν, wenn für alle Werthe von ν, zum mindesten von einem bestimmten Werthe $\nu = n$ ab:

$$a_\nu \leqq c_\nu; \tag{A}$$

sie divergirt, wenn für $\nu \geqq n$:

$$a_\nu \geqq d_\nu. \tag{B}$$

Ist dagegen, wie gross auch ν werden mag:

$$c_\nu \leqq a_\nu \leqq d_\nu, \tag{C}$$

(wobei man die Gleichheitszeichen so zu verstehen hat, dass die schon unter (A) und (B) erledigten Fälle: $a_\nu = c_\nu$, bezw. $a_\nu = d_\nu$ für $\nu \geqq n$, wegfallen), so kann die Reihe Σa_ν noch convergiren oder divergiren. Wir wollen alsdann sagen, sie gehöre demjenigen Grenzgebiete zwischen Convergenz und Divergenz an, welches durch die Schranken (c_ν), (d_ν) definirt wird.

Nun darf man aber ja nicht glauben — und dieser Irrthum ist thatsächlich von Du Bois Reymond und anderen Reihen-Theoretikern begangen worden — dass bei irgend einer Wahl dieser Schranken alle überhaupt möglichen Reihen mit positiven, monoton abnehmenden Gliedern in drei wohlgesonderte Classen vom Charakter (A), (B), (C) zerlegt werden könnten. Vielmehr gilt der folgende Satz:

Wie man auch die monotonen Zahlenfolgen (c_ν), (d_ν) annehmen mag, so giebt es stets unendlich viele mo-

---

[1]) S. z. B. meine „Allgemeine Theorie der Divergenz und Convergenz etc.", Math. Ann., Bd. 35.

notone Zahlenfolgen (a'_ν), welche **keiner** der drei Classen (A), (B), (C) angehören; nämlich solche, welche **eine** der beiden Schranken (c_ν), (d_ν) oder auch **beide** unendlich oft durchsetzen, also durch eins der folgenden drei Ungleichungs-Paare charakterisirt werden:

$$(\mathrm{A}') \qquad a_\lambda < c_\lambda \qquad c_\mu \leqq a_\mu \leqq d_\mu$$

$$(\mathrm{B}') \qquad a_\lambda > d_\lambda \qquad c_\mu \leqq a_\mu \leqq d_\mu$$

$$(\mathrm{C}') \qquad a_\lambda < c_\lambda \qquad a_\mu > d_\mu$$

(Dabei bedeuten die λ und μ von einander verschiedene Zahlen, von denen beide Kategorien in unbegrenzter Anzahl vorkommen und die in den Fällen (A′), (B′) die Reihe der ganzen Zahlen ν, zum mindestens für $\nu \geqq n$, vollständig erschöpfen).

Beweis. Es bedeute p_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ eine ganz willkürlich anzunehmende Folge beliebiger positiver Zahlen, m_0 eine positive ganze Zahl oder auch die Null. Man bestimme sodann eine ganze Zahl $m_1 > m_0$ und weiter eine unbegrenzte Folge wachsender ganzer Zahlen $m_2, m_3, \ldots.$ in der Weise, dass:

$$p_1 \cdot d_{m_1} < p_0 \cdot c_{m_0}, \quad p_2 \cdot c_{m_2} < p_1 \cdot d_{m_1}, \quad p_3 \cdot d_{m_3} < p_2 \cdot c_{m_2}, \text{ u. s. f.,}$$

was offenbar stets (auf unendlich viele Arten) möglich ist, da sowohl die c_ν, als die d_ν mit wachsenden Werthen von ν monoton gegen Null abnehmen. Man erhält durch dieses Verfahren eine unbegrenzte monoton abnehmende Folge von der Form:

$$p_0 \cdot c_{m_0}, \; p_1 \cdot d_{m_1}, \; \ldots \; p_{2k} \cdot c_{m_{2k}}, \; p_{2k+1} \cdot c_{m_{2k+1}}, \; \ldots.$$

Setzt man jetzt:

$$(1) \qquad p_{2k} \cdot c_{m_{2k}} = a'_{m_{2k}}, \quad p_{2k+1} \cdot d_{m_{2k+1}} = a'_{m_{2k+1}} \quad (k = 0, 1, 2 \ldots)$$

und bestimmt im übrigen a'_ν für alle ganzzahligen Werthe von ν, die zwischen m_λ und $m_{\lambda+1}$ $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$ liegen, in der Weise, dass a'_ν für $\nu = m_\lambda, \; m_\lambda + 1, \ldots m_{\lambda+1}$ monoton von a'_{m_λ} zu $a'_{m_{\lambda+1}}$ abnimmt, so bilden die a'_ν für $\nu = 0, 1, 2 \ldots$ eine

unbegrenzte monoton abnehmende Folge, welche unendlich viele Terme von der Form (1) enthält.

Durch passende Wahl der bisher noch willkürlich gelassenen Zahlen p_ν kann man schliesslich erreichen, dass die Zahlenfolge (a'_ν) einer der drei Classen (A'), (B'), (C') angehört. Nimmt man z. B. $p_{2k} < 1$, $p_{2k+1} > 1$, so wird nach Gl. (1):

$$a'_{m_{2k}} < c_{m_{2k}}, \quad a'_{m_{2k+1}} > d_{m_{2k+1}},^{1)}$$

so dass also die Folge (a'_ν) der Classe (C') angehört.

Berücksichtigt man ferner, dass (zum mindesten von einer bestimmten Stelle $\nu = n$ ab) $d_\nu > p \cdot c_\nu$ sein muss, wenn p beliebig > 1 angenommen wird, so folgt für $p_{2k} < 1$, $p_{2k+1} \left\{ \begin{matrix} < 1 \\ > \frac{1}{p} \end{matrix} \right\}$:

$$a'_{m_{2k}} < c_{m_{2k}}, \quad a'_{m_{2k+1}} = p_{2k+1} \cdot d_{m_{2k+1}} \begin{cases} < d_{m_{2k+1}}, \\ > c_{m_{2k+1}}, \end{cases}$$

d. h. die Folge (a'_ν) gehört in diesem Falle der Classe (A') an.

Analog wird für $p_{2k} \left\{ \begin{matrix} > 1 \\ < p \end{matrix} \right\}$, $p_{2k+1} > 1$:

$$a'_{m_{2k}} = p_{2k} \cdot c_{m_{2k}} \begin{cases} > c_{m_{2k}}, \\ < d_{m_{2k}}, \end{cases} \quad a'_{m_{2k+1}} > d_{m_{2k+1}},$$

so dass die Folge (a'_ν) zur Classe (B') gehört. —

Aus dem eben bewiesenen Satze ergiebt sich nun unmittelbar das folgende Resultat:

Wie man auch die monotonen Zahlenfolgen (c_ν), (d_ν) wählen mag, so giebt es stets unendlich viele monoton

---

1) Man hat sogar:

$$a'_{m_{2k}} \prec c_{m_{2k}}, \quad a'_{m_{2k+1}} \succ c_{m_{2k+1}},$$

wenn man:

$$\lim_{k=\infty} p_{2k} = 0, \quad \lim_{k=\infty} p_{2k+1} = \infty$$

annimmt.

abnehmende Reihen $\Sigma a'_\nu$, welche **nicht** dem von den Schranken (c_ν), (d_ν) eingeschlossenen **Grenzgebiete** angehören, und deren Convergenz oder Divergenz **dennoch nicht** durch Vergleichung von a'_ν mit c'_ν oder d'_ν entschieden werden kann.

Versteht man insbesondere unter (a'_ν) eine monotone Zahlenfolge, welche beide Schranken (c_ν), (d_ν) unendlich oft durchsetzt (d. h. den Ungleichungen (C') genügt) und setzt man: $c_\nu = \frac{1}{C_\nu}$, $d_\nu = \frac{1}{D_\nu}$, so hat man für unendlich viele Werthe von ν:

$$(2) \qquad \text{theils: } a'_\nu < \frac{1}{C_\nu}, \quad \text{theils: } a'_\nu > \frac{1}{D_\nu},$$

also:

$$\text{theils: } D_\nu \cdot a'_\nu < \frac{D_\nu}{C_\nu}, \quad \text{theils: } C_\nu \cdot a'_\nu > \frac{C_\nu}{D_\nu},$$

d. h. schliesslich:[1])

$$\lim_{\nu=\infty} \inf D_\nu \cdot a'_\nu = 0, \quad \lim_{\nu=\infty} \sup C_\nu \cdot a'_\nu = \infty$$

$$\left(\text{wegen: } \lim_{\nu=\infty} \frac{C_\nu}{D_\nu} = \lim_{\nu=\infty} \frac{d_\nu}{c_\nu} = \infty\right),$$

in Worten: Das mit Hülfe der C_ν, D_ν herstellbare Kriterien-Paar für Convergenz und Divergenz versagt in diesem Falle.

Das gleiche gilt dann offenbar auch von jedem durch weitere Verschärfung[2]) aus C_ν, D_ν abzuleitenden Kriterien-Paare. Denn nimmt man $C'_\nu \prec C_\nu$, $D'_\nu \succ D_\nu$, wo wiederum:

---

[1]) Ich bezeichne als unteren bezw. oberen Limes (lim. inf. bezw. lim. sup.) das nämliche, was Cauchy als „la plus petite bezw. la plus grande des limites" zu bezeichnen pflegt. Die nach dem Vorgange von Du Bois-Reymond neuerdings fast allgemein üblich gewordene, nicht gerade sehr bequeme Bezeichnung: „Untere bezw. obere Unbestimmtheitsgrenze" ist lediglich ein neuer Name für jenen schon Cauchy vollständig geläufigen Begriff.

[2]) S. meine oben citirte Convergenz-Theorie, a. a. O. p. 302.

$\lim\limits_{\nu=\infty} \dfrac{C'_\nu}{D'_\nu} = \infty$, so bestehen die Ungleichungen (2) a fortiori, auch wenn man C_ν, D_ν durch C'_ν, D'_ν ersetzt, und folglich hat man immer wieder:

$$\liminf_{\nu=\infty} D'_\nu \cdot a'_\nu = 0, \quad \limsup_{\nu=\infty} C'_\nu \cdot a'_\nu = \infty.$$

§ 3. Die wahre Schranke für die Convergenz einer unendlichen Reihe.

Aus den Betrachtungen des vorigen Paragraphen geht hervor, dass es in keinem Falle **gleichzeitig** eine allgemein gültige Schranke für die Convergenz und eine solche für die Divergenz in dem Sinne geben kann, dass die Terme aller convergenten Reihen (mit monotonen Gliedern) von irgend einem bestimmten Stellenzeiger ab durchweg unterhalb der einen (oberen) Schranke, die aller divergenten Reihen oberhalb der anderen (unteren) Schranke liegen. Dagegen lässt sich zeigen, dass eine solche Schranke für die Convergenz allein existirt, dass dieselbe aber merklich höher liegt, als von früheren Reihen-Theoretikern angenommen wurde.[1]) Es gilt nämlich der folgende Satz:

[1]) Hierauf habe ich bereits in der citirten Abhandlung hingewiesen (a. a. O. p. 347 ff.), woselbst auch der hier folgende Satz bereits aufgestellt und bewiesen wird. Ich reproducire denselben hier nochmals, theils wegen seines unmittelbaren Zusammenhanges mit den vorangehenden und noch folgenden Betrachtungen, theils auch, weil der hier gegebene Beweis seines wesentlicheren (zweiten) Theiles mir vollkommener erscheint, als der a. a. O. und Math. Ann., Bd. 37, p. 601 mitgetheilte. Was übrigens den (sehr leicht zu beweisenden) ersten Theil jenes Satzes betrifft, so hat man dessen Richtigkeit wohl seit lange als selbstverständlich angesehen. Bewiesen wurde aber immer nur, dass $\Sigma\, a_\nu$ divergirt, wenn $\lim\limits_{\nu=\infty} \nu \cdot a_\nu > 0$, und daraus folgt nur soviel, dass im Falle der Convergenz von $\Sigma\, a_\nu$ stets $\lim\limits_{\nu=\infty} \nu \cdot a_\nu = 0$ sein muss, falls dieser Grenzwerth überhaupt existirt. Gerade diesen Existenz-Beweis liefert aber der erste Theil des fraglichen Satzes.

Bei einer **convergenten** Reihe mit niemals zunehmenden Gliedern hat man allemal:

$$a_\nu \prec \frac{1}{\nu} \quad \text{d. h.} \lim_{\nu=\infty} \nu \cdot a_\nu = 0.$$

Bedeutet dagegen (m_ν) eine mit ν **beliebig langsam** in's Unendliche wachsende monotone Zahlenfolge, so giebt es stets **convergente** Reihen Σa_ν mit monotonen Gliedern, für welche:

$$\limsup_{\nu=\infty} \nu \cdot m_\nu \cdot a_\nu = \infty,$$

d. h. die Reihe Σa_ν enthält unendlich viele Terme, welche **infinitär grösser** sind, als die **entsprechenden** der **divergenten** Reihe $\Sigma \frac{1}{\nu \cdot m_\nu}$.

Oder anders ausgesprochen:

Für Reihen mit monotonen Termen a_ν bildet zwar die Beziehung:

$$\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot a_\nu = 0$$

eine **nothwendige Convergenz**-Bedingung, **nicht** aber irgend eine Beziehung von der Form:

$$\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot m_\nu \cdot a_\nu = 0,$$

wie **langsam** auch m_ν mit ν in's Unendliche wachsen möge.

Beweis. In Folge der vorausgesetzten Convergenz von Σa_ν lässt sich nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Zahl ε eine ganze Zahl m so fixiren, dass für $\mu \geqq m$ und jede noch so grosse ganze Zahl ϱ:

$$a_{\mu+1} + a_{\mu+2} + \cdots + a_{\mu+\varrho} < \varepsilon.$$

Setzt man hier speciell einmal $\varrho = \mu$, das andere Mal $\varrho = \mu + 1$, und beachtet, dass allgemein $a_\nu \leqq a_{\nu+1}$, so folgt:

$$\left.\begin{array}{r}\mu \cdot a_{2\mu} \leq a_{\mu+1} + a_{\mu+2} + \cdots + a_{2\mu} \\ (\mu+1) \cdot a_{2\mu+1} \leq a_{\mu+1} + a_{\mu+2} + \cdots + a_{2\mu+1}\end{array}\right\} < \varepsilon \quad (\mu \geq m)$$

und daher:

$$2\mu \cdot a_{2\mu} < 2\varepsilon$$

$$(2\mu + 1) \cdot a_{2\mu+1} < 2(\mu+1) \cdot a_{2\mu+1} < 2\varepsilon$$

also schliesslich:

$$\nu \cdot a_\nu < 2\varepsilon \qquad (\nu \geq 2m)$$

d. h.:

$$\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot a_\nu = 0.$$

Um den zweiten Theil des ausgesprochenen Satzes zu beweisen, wähle man eine für jeden Werth von x, der eine gewisse Zahl x_0 übersteigt, stetige und positive, mit x monoton in's Unendliche wachsende Function $f(x)$ von der Beschaffenheit, dass

(1) $$f(x+1) - f(x) < 1$$

(2) $$f(\nu) \prec m_\nu.$$

Vermöge der ersten Festsetzungen besitzt die Gleichung:

(3) $$y = f(x) \qquad (x > x_0)$$

eine Auflösung von der Form:

(4) $$x = \varphi(y) \qquad (\text{also: } \varphi(f(x)) = x = f(\varphi(x))),$$

wo $\varphi(y)$ eine für $y > y_0 = f(x_0)$ eindeutig definirte, positive und mit y monoton in's Unendliche wachsende Function bedeutet.

Alsdann folgt aus Ungl. (1) und Gl. (3):

$$f(x+1) < y + 1$$

und daher:

$$\varphi(f(x+1)) = x + 1 < \varphi(y+1),$$

also mit Benützung von Gl. (4):

(5) $$\varphi(y+1) - \varphi(y) > 1.$$

Bedeutet jetzt $\Sigma \frac{1}{C_\lambda}$ eine beliebig anzunehmende convergente Reihe, deren Glieder durchweg der Bedingung genügen:

$$C_\lambda - C_{\lambda-1} \geqq 1 \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots),$$

so hat man nach Ungl. (5) auch:

$$(6) \qquad \varphi(C_\lambda) - \varphi(C_{\lambda-1}) > 1,$$

so dass also zwischen $\varphi(C_{\lambda-1})$ und $\varphi(C_\lambda)$ stets mindestens **eine** ganze Zahl liegen muss.

Nun nehme man noch eine Folge positiver, mit wachsendem ν monoton abnehmender Zahlen k_ν so an, dass $\lim_{\nu=\infty} k_\nu = k$ von Null verschieden ausfällt (z. B. $k_\nu = k + \frac{1}{\nu}$, $k_\nu = k \cdot e^{\frac{1}{\nu}}$ etc.) und setze:

$$(7) \qquad a_\nu = \frac{k_\nu}{C_{\lambda-1} \cdot \varphi(C_\lambda)}$$

für alle ganzzahligen Werthe ν, welche durch die Bedingung definirt sind:

$$(8) \qquad \varphi(C_{\lambda-1}) \leqq \nu < \varphi(C_\lambda).$$

Die so definirten Terme a_ν nehmen dann offenbar mit wachsendem ν monoton ab.

Ausserdem lässt sich zeigen, dass $\limsup_{\nu=\infty} \nu \cdot m_\nu \cdot a_\nu = \infty$ und die Reihe Σa_ν convergent ist.

Bezeichnet man nämlich mit p_λ die grösste ganze Zahl, die kleiner als $\varphi(C_\lambda)$ ist, also diejenige ganze Zahl, welche durch die Bedingung definirt wird:

$$(9) \qquad \varphi(C_\lambda) - 1 \leqq p_\lambda < \varphi(C_\lambda),$$

so kann man zunächst die Ungleichungen (8) durch die folgenden ersetzen:

$$(10) \qquad p_{\lambda-1} < \nu \leqq p_\lambda$$

und man hat sodann:

$$p_\lambda \cdot f(p_\lambda) \cdot a_{p_\lambda} = k_{p_\lambda} \cdot \frac{f(p_\lambda)}{C_{\lambda-1}} \cdot \frac{p_\lambda}{\varphi(C_\lambda)}$$

$$> k_{p_\lambda} \cdot \frac{f(\varphi(C_{\lambda-1}))}{C_{\lambda-1}} \cdot \frac{\varphi(C_\lambda)-1}{\varphi(C_\lambda)} \quad \text{(wegen: } p_\lambda \geqq \varphi(C_\lambda) - 1 > \varphi(C_{\lambda-1})\text{)}$$

$$= k_{p_\lambda} \cdot \frac{\varphi(C_\lambda)-1}{\varphi(C_\lambda)}$$

also:

$$\lim_{\lambda=\infty} p_\lambda \cdot f(p_\lambda) \cdot a_{p_\lambda} \geqq k,$$

d. h.

$$\limsup_{\nu=\infty} \nu \cdot f(\nu) \cdot a_\nu \geqq k \tag{11}$$

und daher mit Berücksichtigung von Ungl. (2):

$$\limsup_{\nu=\infty} \nu \cdot m_\nu \cdot a_\nu = \infty. \tag{12}$$

Setzt man ferner:

$$\sum_{p_n+1}^{\infty}{}^{\nu}\, a_\nu = \sum_{n+1}^{\infty}{}^{\lambda}\, A_\lambda, \quad \text{wo: } A_\lambda = \sum_{p_{\lambda-1}+1}^{p_\lambda}{}^{\nu}\, a_\nu,$$

so wird:

$$A_\lambda = \sum_{p_{\lambda-1}+1}^{p_\lambda}{}^{\nu} \frac{k_\nu}{C_{\lambda-1} \cdot \varphi(C_\lambda)} < k_0 \cdot \frac{p_\lambda - p_{\lambda-1}}{C_{\lambda-1} \cdot \varphi(C_\lambda)}$$

$$< \frac{k_0}{C_{\lambda-1}} \cdot \frac{p_\lambda - p_{\lambda-1}}{p_\lambda} \quad \text{(wegen: } p_\lambda < \varphi(C_\lambda)\text{)}$$

$$< \frac{k_0}{C_{\lambda-1}},$$

woraus die Convergenz der fraglichen Reihe unmittelbar hervorgeht.

Damit ist aber der oben ausgesprochene Satz vollständig bewiesen.

Will man wirklich Reihen Σa_ν von der eben charakterisirten Beschaffenheit herstellen, so kann man etwa über C_λ so verfügen, dass man setzt:

$$C_\lambda = \lambda^\varrho, \quad \text{wo: } \varrho > 1,$$

also nach Gl. (7):

$$a_\nu = \frac{k_\nu}{(\lambda - 1)^\varrho \cdot \varphi(\lambda^\varrho)} \tag{13}$$

für alle ν, welche durch die Bedingung (8) definirt sind, d. h. für:

$$\varphi((\lambda - 1)^\varrho) \leqq \nu < \varphi(\lambda^\varrho). \tag{14}$$

Mit Hülfe dieser Ungleichungen lässt sich sodann λ auch explicite durch ν ausdrücken. In Folge der Beziehung: $f(\varphi(x)) = x$ ergiebt sich nämlich aus (14):

$$(\lambda - 1)^\varrho \leqq f(\nu) < \lambda^\varrho$$

und hieraus folgt weiter:

$$\lambda - 1 = \left[\sqrt[\varrho]{f(\nu)}\right] \tag{15}$$

(wenn man durch das Symbol $[x]$ die grösste in x enthaltene ganze Zahl bezeichnet).

Somit geht der Ausdruck (13) in den folgenden über:

$$a_\nu = \frac{k_\nu}{\left[\sqrt[\varrho]{f(\nu)}\right]^\varrho \cdot \varphi\left(\left[1 + \sqrt[\varrho]{f(\nu)}\right]^\varrho\right)}. \tag{16}$$

Da aber offenbar:

$$\left[\sqrt[\varrho]{f(\nu)}\right] \simeq \sqrt[\varrho]{f(\nu)} \text{ und daher: } \left[\sqrt[\varrho]{f(\nu)}\right]^\varrho \simeq f(\nu),$$

so kann man, ohne den Charakter der Reihe Σa_ν zu verändern, den Term (16) auch durch den folgenden etwas einfacheren ersetzen:

$$a_\nu = \frac{k_\nu}{f(\nu) \cdot \varphi\left(\left[1 + \sqrt[\varrho]{f(\nu)}\right]^\varrho\right)}. \tag{17}$$

Ist dann z. B. $m_\nu = \lg \nu$ vorgelegt, so wähle man etwa: $f(x) = (\lg x)^{\frac{1}{\sigma}} = y$ (wo $\sigma > 1$), also: $x = e^{y^\sigma} = \varphi(y)$; alsdann wird, wenn man noch $\varrho\,\sigma = \tau$ setzt:

$$a_\nu = \frac{k_\nu}{\sqrt[\sigma]{\lg \nu} \cdot e^{\left[1 + \sqrt[\tau]{\lg \nu}\right]^\tau}} \quad (\text{wo: } \tau > \sigma > 1). \tag{18}$$

Die Reihe Σa_ν ist alsdann convergent, obschon ihre monoton abnehmenden Glieder der Bedingung genügen:

$$\lim_{\nu=\infty} \sup \nu \cdot \lg \nu \cdot a_\nu = \infty.$$

Sie reagirt als auf keins der üblichen Convergenz-Kriterien.

§ 4. Es giebt keine Schranke für die Divergenz.

Nach dem Satze des vorigen Paragraphen bildet jede Zahlenfolge von der Form $\left(\frac{\varepsilon}{\nu}\right)$, wo ε eine beliebig klein anzunehmende positive Zahl bedeutet, eine Convergenz-Schranke in dem Sinne, dass die Terme einer monotonen Zahlenfolge (a_ν) von einer angebbaren Stelle ab jene Schranke nicht mehr erreichen dürfen, wenn Σa_ν convergiren soll. Ersetzt man dagegen ε durch ε_ν, wo ε_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) mit unbegrenzt wachsendem ν beliebig langsam gegen Null abnimmt, so giebt es unendlich viele convergente Reihen Σa_ν, deren (monoton abnehmende) Glieder a_ν der Schranke $\left(\frac{\varepsilon_\nu}{\nu}\right)$ unendlich oft durchsetzen.

Aus der bewiesenen Existenz der Convergenz-Schranke $\left(\frac{\varepsilon}{\nu}\right)$ folgt aber, wie schon zu Anfang des vorigen Paragraphen angedeutet wurde, unmittelbar die Nicht-Existenz einer Divergenz-Schranke. Denn bezeichnet (b_ν) irgend eine positive monotone Zahlenfolge, so giebt es nach § 2 stets unendlich viele monotone Zahlenfolgen (a_ν), welche die beiden Schranken $\left(\frac{\varepsilon}{\nu}\right)$ und (b_ν) unendlich oft durchsetzen, sodass Σa_ν sicher divergiren muss. Da man hierbei für (b_ν) die Terme einer beliebig stark convergirenden Reihe $\Sigma \frac{1}{C_\nu}$ wählen und diese wiederum noch durch eine wesentlich stärker convergirende ersetzen kann, so ergiebt sich also der Satz:

Wie stark auch die Reihe $\Sigma \frac{1}{C_\nu}$ **convergiren** möge,

so giebt es stets **divergente** Reihen Σa_ν, unter deren (monoton abnehmenden) Gliedern unbegrenzt viele **infinitär kleiner** sind, als die **entsprechenden** der Reihe $\Sigma \frac{1}{C_\nu}$, d. h. man hat:

$$\lim_{\nu=\infty} \inf C_\nu \cdot a_\nu = 0.$$

Wir können aber auch geradezu ein einfaches Verfahren angeben, um bei beliebig vorgeschriebenem C_ν solche divergente Reihen Σa_ν wirklich herzustellen.

Es bedeute $\varphi(x)$ wiederum eine positive, mit wachsenden positiven Werthen von (x) monoton zunehmende Function, welche der Bedingung genügt:

$$(1) \qquad \varphi(\nu) \succ C_\nu, \text{ also a fortiori: } \varphi(x) \succ x,$$

und es werde gesetzt:

$$(2) \quad \varphi_1(x) = \varphi(x), \ \varphi_2(x) = \varphi(\varphi_1(x)), \ldots \varphi_\lambda(x) = \varphi(\varphi_{\lambda-1}(x)), \ldots$$

Bezeichnet dann b eine beliebige positive Zahl > 1, so lässt sich zunächst in Folge der Beziehung (1) eine positive Zahl a so fixiren, dass

$$(3) \qquad \varphi_1(x) > b \cdot x \text{ für: } x \geqq a.$$

Alsdann wird aber — immer für $x \geqq a$:

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(\varphi_1(x)) > b \cdot \varphi_1(x)$$
$$\varphi_3(x) = \varphi_1(\varphi_2(x)) > b \cdot \varphi_2(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(4) \qquad \varphi_\lambda(x) = \varphi_1(\varphi_{\lambda-1}(x)) > b \cdot \varphi_{\lambda-1}(x) \text{ u. s. f.}$$

Die Terme $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_\lambda(x), \ldots$ bilden also eine unbegrenzte, mit λ monoton in's Unendliche wachsende, positive Zahlenfolge. Und zwar hat man für $x \geqq a$ und $\lambda = 2, 3, 4, \ldots$ nach Ungl. (4) und (3):

$$(5) \quad \varphi_\lambda(x) - \varphi_{\lambda-1}(x) > (b-1) \cdot \varphi_{\lambda-1}(x) > (b-1) \cdot b \cdot x,$$

folglich bei passender Wahl von b und a (z. B. für $b > 2$, $a > \frac{1}{2}$) jedenfalls:

(6) $\varphi_\lambda(a) - \varphi_{\lambda-1}(a) > 1 \qquad (\lambda = 2, 3, 4, \ldots),$

so dass zwischen $\varphi_{\lambda-1}(a)$ und $\varphi_\lambda(a)$ stets mindestens **eine** ganze Zahl liegt.

Nimmt man jetzt wiederum noch eine Folge beliebiger positiver, monoton abnehmender Zahlen $k_\nu\ (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ mit dem von Null verschiedenen Grenzwerthe $\lim\limits_{\nu=\infty} k_\nu = k$ an, so soll gesetzt werden:

$$(7) \qquad a_\nu = \frac{k_\nu}{\varphi_\lambda(a)}$$

für alle ganzzahligen ν, welche durch die Bedingung definirt sind:

$$(8) \qquad \varphi_{\lambda-1}(a) - 1 \leqq \nu < \varphi_\lambda(a) - 1 \quad (\lambda = 2, 3, 4, \ldots).$$

Alsdann nehmen offenbar die a_ν mit wachsendem ν monoton ab, und es lässt sich andererseits zeigen, dass $\liminf\limits_{\lambda=\infty} C_\nu \cdot a_\nu = 0$ und die Reihe Σa_ν divergent ist.

Bezeichnet man nämlich (analog wie in § 3) mit p_λ die grösste ganze Zahl, die kleiner als $\varphi_\lambda(a)$ ist, so dass also:

$$(9) \qquad \varphi_\lambda(a) - 1 \leqq p_\lambda < \varphi_\lambda(a),$$

so lässt sich zunächst die Bedingung (8) durch die folgende ersetzen:

$$(10) \qquad p_{\lambda-1} \leqq \nu < p_\lambda.$$

In Folge dessen ergiebt sich:

$$a_{p_\lambda} = \frac{k_{p_\lambda}}{\varphi_{\lambda+1}(a)} = \frac{k_{p_\lambda}}{\varphi(\varphi_\lambda(a))}$$
$$< \frac{k_{p_\lambda}}{\varphi(p_\lambda)} \quad (\text{wegen: } p_\lambda < \varphi_\lambda(a))$$

also:

$$\lim_{\lambda=\infty} \varphi(p_\lambda) \cdot a_{p_\lambda} \leqq k$$

d. h.

$$(11) \qquad \liminf_{\nu=\infty} \varphi(\nu) \cdot a_\nu \leqq k$$

und schliesslich mit Berücksichtigung von Ungl. (1):

$$\lim_{\nu=\infty} \inf C_\nu \cdot a_\nu = 0. \tag{12}$$

Ferner hat man:

$$\sum_{p_1}^{\infty}{}^{\nu}\, a_\nu = \sum_{2}^{\infty}{}^{\lambda}\, A_\lambda, \text{ wenn gesetzt wird: } A_\lambda = \sum_{p_{\lambda-1}}^{p_\lambda - 1}{}^{\nu}\, a_\nu.$$

Da sodann:

$$A_\lambda = \sum_{p_{\lambda-1}}^{p_\lambda - 1}{}^{\nu} \frac{k_\nu}{\varphi_\lambda(a)} > k \cdot \frac{p_\lambda - p_{\lambda-1}}{\varphi_\lambda(a)} = k \cdot \frac{p_\lambda - p_{\lambda-1}}{p_\lambda} \cdot \frac{p_\lambda}{\varphi_\lambda(a)},$$

so ergiebt sich sofort die Divergenz der fraglichen Reihe, da $\frac{p_\lambda - p_{\lambda-1}}{p_\lambda}$ das allgemeine Glied einer divergenten Reihe bildet und $\lim_{\lambda=\infty} \frac{p_\lambda}{\varphi_\lambda(a)} = 1$ ist (s. Ungl. (9)).

Beispiel. Es sei: $C_\nu = \nu^\varrho$, wo $\varrho > 1$. Man kann also setzen:

$$\varphi(x) = x^\sigma, \quad \text{wo: } \sigma > \varrho.$$

Alsdann wird:

$$\varphi_2(x) = (x^\sigma)^\sigma = x^{\sigma^2}, \; \ldots \; \varphi_\lambda(x) = x^{\sigma^\lambda}.$$

Nimmt man der Einfachheit halber die oben mit a bezeichnete Zahl auch $= \sigma$ (was z. B. sicher gestattet ist, wenn $\sigma \geqq 2$, da alsdann:

$$\varphi_\lambda(\sigma) - \varphi_{\lambda-1}(\sigma) = \sigma^{\sigma^\lambda} - \sigma^{\sigma^{\lambda-1}} \geqq 2^{2^\lambda} - 2^{2^{\lambda-1}} > 1),$$

so wird nach (7) und (8):

$$a_\nu = \frac{k_\nu}{\sigma^{\sigma^\lambda}}, \text{ solange: } \sigma^{\sigma^{\lambda-1}} - 1 \leqq \nu < \sigma^{\sigma^\lambda} - 1. \tag{13}$$

Um auch hier wiederum λ explicite durch ν auszudrücken, hat man:

$$\sigma^{\lambda-1} \leq \overset{\sigma}{\log}(\nu+1) < \sigma^{\lambda}$$

$$\lambda - 1 \leq \overset{\sigma}{\log_2}(\nu+1) < \lambda$$

d. h.

$$\lambda - 1 = \left[\overset{\sigma}{\log_2}(\nu+1)\right] \tag{14}$$

und daher

$$a_\nu = \frac{k_\nu}{\sigma^{\sigma^{1+\left[\overset{\sigma}{\log_2}(\nu+1)\right]}}}. \tag{15}$$

Diese Reihe Σa_ν ist divergent, obschon ihre (monoton abnehmenden) Glieder der Bedingung genügen:

$$\lim\inf \nu^\varrho \cdot a_\nu = 0 \qquad (\text{wo: } \varrho > 1).$$

Sie kann also auf keins der gewöhnlichen Divergenz-Kriterien reagiren.

Die vorstehenden Betrachtungen und Resultate lassen sich ohne weiteres auch auf Integrale von der Form $\int_{x_0}^{\infty} f(x) \cdot dx$ übertragen, wo $f(x)$ mit unbegrenzt wachsendem x monoton gegen Null abnimmt. Denn dieses Integral convergirt und divergirt stets gleichzeitig mit der Reihe $\Sigma f(\nu)$.

Jede Curve: $y = \frac{\varepsilon}{x}$ bildet also — bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ — stets eine Schranke für die Convergenz jenes Integrals, d. h. alle monotonen Curven $y = f(x)$ mit convergentem Integral müssen schliesslich durchweg merklich unter dieser Schranke verlaufen, während sie andererseits jede Curve von der Form: $y = \frac{1}{x \cdot \vartheta(x)}$ noch unendlich oft überschneiden können, wenn auch $\vartheta(x)$ mit x beliebig langsam in's Unendliche wächst.

Dagegen existirt überhaupt keine Schranke für die Divergenz des Integrals, d. h. dasselbe kann divergiren, auch wenn die monotone Curve $y = f(x)$ jede Curve $y = \varphi(x)$ mit beliebig stark convergirendem Integral $\int_{x_0}^{\infty} \varphi(x) \cdot dx$ unendlich oft durchsetzt.

8

Elementare Theorie der unendlichen Doppelreihen.

Von

Alfred Pringsheim.

Aus den Sitzungsberichten der mathematisch-physikalischen Classe
der k. bayer. Akad. d. Wiss. Bd. XXVII. 1897. Heft I.

München 1897.

Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub.



Elementare Theorie der unendlichen Doppelreihen.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 16. Februar.*)

Während die elementare Theorie der einfach-unendlichen Reihen wohl im wesentlichen als abgeschlossen gelten darf, so scheint mir diejenige der unendlichen Doppelreihen in verschiedener Beziehung der Vervollkommnung nicht nur bedürftig, sondern thatsächlich auch fähig zu sein. Im Folgenden mache ich den Versuch, auf der Grundlage einiger einfacher Sätze über die Grenzwerthe zweifach-unendlicher Zahlenfolgen, eine solche Theorie in möglichst einheitlicher und übersichtlicher Weise aufzubauen. Jene Hülfssätze, die im wesentlichen von den möglichen Beziehungen zwischen Grenzwerthen von der Form:

$$\lim_{\mu=\infty,\ \nu=\infty} \left(a_\mu^{(\nu)}\right), \quad \lim_{\nu=\infty} \left(\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right), \quad \lim_{\mu=\infty} \left(\lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right)$$

handeln, mögen wohl allgemein bekannt sein: da sie mir indessen in der hier gewählten einfachen Formulirung und Begründung nirgends begegnet sind, so schien es mir zweckmässig, dieselben zunächst vollständig zu entwickeln (§ 1, Art. 2—5). Daraus ergeben sich dann in sehr anschaulicher Weise die verschiedenen Eventualitäten, die bei der Convergenz und Divergenz einer Doppelreihe eintreten können, in's besondere jene scheinbaren Anomalien, die aus dem principiellen Unterschiede zwischen einer Doppelreihe einerseits und der aus ihren Zeilen bezw. Colonnen gebildeten Reihe andererseits hervorgehen; zugleich liefert der gewählte Ausgangspunkt unmittelbar die Hülfsmittel, um das wirkliche Vorkommen der als möglich erkannten Fälle durch concrete Beispiele zu belegen (§ 2). Im darauffolgenden Paragraphen werden die

Beziehungen untersucht, welche zwischen einer convergenten Doppelreihe und der aus den Diagonal-Summen des betreffenden zweifach-unendlichen Schema's gebildeten einfachen Reihe bestehen. Der bei dieser Gelegenheit bewiesene Hauptsatz (§ 3, Art. 3) stellt eine merkliche Verallgemeinerung und Vervollständigung eines wichtigen, zuerst von Herrn Stolz[1]) bewiesenen Satzes dar. Dabei möchte ich einigen Werth darauf legen, dass der hier mitgetheilte Beweis lediglich eine ganz elementare Grenzwerth-Bestimmung erfordert, während derjenige des Herrn Stolz auf Stetigkeits-Betrachtungen und dem Begriffe der gleichmässigen Convergenz beruht.

Es folgen nun zunächst die bekannten Sätze über absolut convergente Doppelreihen und deren unbedingte Convergenz (§ 4, Art. 1—4); sodann aber (Art. 5—7) wird der Satz, dass jede unbedingt convergente Doppelreihe auch absolut convergiren muss, wie ich glaube, zum ersten Male vollständig bewiesen.[2]) — Im letzten Paragraphen (§ 5) werden schliesslich verschiedene Methoden zur Herstellung allgemeiner Convergenz- und Divergenz-Kriterien für unendliche Doppelreihen discutirt und die als zweckmässig erkannten entsprechend verwerthet. Da mir in der Literatur, ausser einer ganz gelegentlichen kurzen Bemerkung des Herrn Thomae[3]),

---

[1]) Ueber unendliche Doppelreihen. Mathem. Ann., Bd. **24**, S. **164**, Art. 6.

[2]) Herr Stolz hat in der oben citirten Abhandlung (a. a. O. S. 168) den fraglichen Satz nur unter der Voraussetzung bewiesen, dass jede einzelne Zeile und Colonne convergirt. Es steht nun natürlich frei, eine unabhängig von der Anordnung der Glieder convergirende Doppelreihe nur dann unbedingt convergent zu nennen, wenn sie von vornherein jene Eigenschaft besitzt. Allein dann bleibt doch immer die Möglichkeit offen, dass eine convergente Doppelreihe mit divergenten Zeilen oder Colonnen (die also eo ipso nicht absolut convergirt) in dem gewöhnlichen Sinne unbedingt convergiren könnte, d. h. dass die Summe der Doppelreihe bei jeder Umordnung des betreffenden zweifach-unendlichen Schema's den gleichen Werth behielte.

[3]) Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Theta-Functionen einer Veränderlichen. 2. Aufl. (**1873**). S. 70, Fussnote.

keinerlei Versuche nach dieser Richtung hin bekannt geworden sind, so dürften die hier mitgetheilten Betrachtungen in der Hauptsache als neu und nicht ganz überflüssig erscheinen.[1])

§ 1. Ueber Grenzwerthe zweifach unendlicher Zahlenfolgen.

1. Es sei eine zweifach unendliche Folge reeller Zahlen vorgelegt:

$$(1)\qquad \begin{cases} a_0^{(0)} & a_1^{(0)} \; . \; . \; . \; a_\mu^{(0)} \; . \; . \; . \\ a_0^{(1)} & a_1^{(1)} \; . \; . \; . \; a_\mu^{(1)} \; . \; . \; . \\ . \; . \; . \; . \; . & . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ a_0^{(\nu)} & a_1^{(\nu)} \; . \; . \; . \; a_\mu^{(\nu)} \; . \; . \; . \\ . \; . \; . \; . \; . & . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \end{cases}$$

so sagt man bekanntlich: die Zahlen $a_\mu^{(\nu)}$ besitzen für $\lim \mu = \infty$, $\lim \nu = \infty$, oder, genauer bezeichnet, für unabhängig von einander in's Unendliche wachsende μ und ν einen bestimmten Grenzwerth a, in Zeichen:

$$(2)\qquad \lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a,$$

wenn eine bestimmte Zahl a existirt, so dass:

$$(3)\qquad |a - a_\mu^{(\nu)}| \leqq \varepsilon \quad \text{für: } \mu \geqq m,\ \nu \geqq n:$$

d. h. jeder (beliebig kleinen) positiven Zahl ε müssen sich zwei natürliche Zahlen m, n so zuordnen lassen, dass Ungl. (3) befriedigt wird. Hierzu ist nothwendig und hinreichend, dass:

$$(3\,\text{a})\qquad |a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - a_\mu^{(\nu)}| \leqq \varepsilon'$$

für $\mu \geqq m'$, $\nu \geqq n'$, $\varrho = 0, 1, 2, \ldots$ $\sigma = 0, 1, 2, \ldots$ (d. h. bei beliebig vorgeschriebenem $\varepsilon' > 0$ und passender Wahl von m', n').

---

[1]) Gleichzeitig mit der Correctur dieser Mittheilung erhalte ich einen Aufsatz des Herrn O. Biermann „Ueber unendliche Doppelreihen und unendliche Doppelproducte“ (Monatshefte für Mathematik und Physik, VIII, p. 115 ff.), in welchem gleichfalls einige Convergenz-Kriterien für Doppelreihen aufgestellt werden. Dieselben sind indessen von geringerer Tragweite als die hier mitgetheilten.

Die Beziehung:

$$(4)\qquad \lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \infty \text{ bezw. } = -\infty$$

hat sodann die Bedeutung: Jeder (beliebig grossen) positiven Zahl G lassen sich zwei natürliche Zahlen m, n so zuordnen, dass:

$$(5)\qquad a_\mu^{(\nu)} > G \text{ bezw. } a_\mu^{(\nu)} < -G \text{ für: } \mu \geqq m,\ \nu \geqq n.$$

2. Man bemerke vor allem, dass durch die Existenz eines bestimmten endlichen $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ diejenige von $\lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ für endliche Werthe von ν, bezw. diejenige von $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ für endliche Werthe von μ in keiner Weise präjudicirt wird. Denn die definirenden Ungleichungen (3) verlangen ja eine gewisse Eigenschaft lediglich von denjenigen Termen, bei denen beide Indices μ, ν gewisse Grenzen überschreiten: mit anderen Worten, diejenigen $a_\mu^{(\nu)}$, welche den ersten m Zeilen und n Colonnen des Schema's (1) angehören, können hierbei völlig willkürlich gedacht werden, sie brauchen z. B. nicht einmal numerisch unter einer endlichen Grenze zu bleiben. Aber noch mehr: es kann sogar $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ endlich und bestimmt ausfallen, obschon $\lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ für keinen einzigen bestimmten Werth von ν, $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ für keinen einzigen bestimmten Werth von μ existirt. Beispiel:

$$\begin{aligned} a_\mu^{(\nu)} &= (-1)^{\mu+\nu} \cdot \frac{\mu^p + \nu^q}{\mu^p \cdot \nu^q} \\ &= (-1)^{\mu+\nu}\left(\frac{1}{\mu^p} + \frac{1}{\nu^q}\right) \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \mu, \nu = 1, 2, 3, \ldots \\ p > 0,\ q > 0 \end{pmatrix}.$$

Hier wird offenbar:

$$\lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0,$$

also völlig bestimmt, dagegen:

$$\liminf_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = -\frac{1}{\nu^q}, \quad \limsup_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\frac{1}{\nu^q} \quad \text{für: } \nu = 1, 2, 3, \ldots \text{ in infinitum},$$

$$\liminf_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = -\frac{1}{\mu^p}, \quad \limsup_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\frac{1}{\nu^p} \quad \text{für: } \mu = 1, 2, 3, \ldots \text{ in infinitum},$$

d. h. jede einzelne Zeile bezw. Colonne besitzt zwei von einander verschiedene Unbestimmtheitsgrenzen. Dabei gilt nun, wie dieses Beispiel schon vermuthen lässt, der folgende Satz:

Ist:

$$(6)\quad \begin{cases} \liminf\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = l_\nu, \quad \limsup\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = L_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots), \\ \liminf\limits_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = l'_\mu, \quad \limsup\limits_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = L'_\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots), \end{cases}$$

so hat man stets:

$$(7)\quad \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{\nu=\infty} l_\nu = \lim\limits_{\nu=\infty} L_\nu \\ \lim\limits_{\mu=\infty} l'_\mu = \lim\limits_{\mu=\infty} L'_\mu \end{array} \right\} = \lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)},$$

falls überhaupt ein endlicher oder bestimmt unendlicher $\lim\limits_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ **existirt.**

Beweis. Ist: $\lim\limits_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a$ (d. h. endlich), so existirt für jedes beliebig kleine positive ε eine Beziehung von der Form:

$$|a_\mu^{(\nu)} - a| \leqq \varepsilon \quad \text{für: } \mu \geqq m, \ \nu \geqq n.$$

In Folge dessen hat man auch:

$$|\liminf_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} - a| \leqq \varepsilon, \quad |\limsup_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} - a| \leqq \varepsilon \quad \text{für: } \nu \geqq n,$$

d. h.

$$|l_\nu - a| \leqq \varepsilon, \ |L_\nu - a| \leqq \varepsilon \qquad \text{für: } \nu \geqq n,$$

und somit schliesslich:

$$\lim_{\nu=\infty} l_\nu = \lim_{\nu=\infty} L_\nu = a.$$

Ist dagegen $\lim\limits_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty$, so besteht für jedes beliebig grosse positive G eine Beziehung von der Form:

$$a_\mu^{(\nu)} > G \text{ bezw. } a_\mu^{(\nu)} < -G \text{ für: } \mu \geqq m,\ \nu \geqq n,$$

und somit wird auch:

$$\left.\begin{matrix} l_\nu \\ L_\nu \end{matrix}\right\} > G \text{ bezw. } \left.\begin{matrix} l_\nu \\ L_\nu \end{matrix}\right\} < -G \text{ für: } \nu \geqq n,$$

d. h. schliesslich:

$$\lim_{\nu=\infty} l_\nu = \lim_{\nu=\infty} L_\nu = +\infty \text{ bezw. } = -\infty.$$

Das analoge gilt dann offenbar für l'_μ, L'_μ — womit der oben ausgesprochene Satz bewiesen ist.

3. Wird jetzt speciell $l_\nu = L_\nu$ für $\nu \geqq n$ (bezw. $l'_\mu = L'_\mu$ für $\mu \geqq m$), d. h. existirt für $\nu \geqq n$ ein endlicher oder bestimmt unendlicher $\lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ (bezw. für $\mu \geqq m$ ein endlicher oder bestimmt unendlicher $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$), so nimmt der eben bewiesene Satz die folgende Form an:

Existirt ein endlicher oder bestimmt unendlicher $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ und ausserdem $\lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ für $\nu \geqq n$, bezw. $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ für $\mu \geqq m$, so ist:

$$(8)\quad \lim_{\nu=\infty}\left(\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right) = \lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} \text{ bezw. } \lim_{\mu=\infty}\left(\lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right) = \lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}.$$

Demnach ergibt sich, dass die Existenz[1]) von:

$$(9)\quad \lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)},\quad \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\ (\nu \geqq n),\quad \lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\ (\mu \geqq m)$$

allemal diejenige von:

$$(10)\quad \lim_{\nu=\infty}\left(\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right),\quad \lim_{\mu=\infty}\left(\lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right)$$

und zugleich die Beziehung:

$$(11)\quad \lim_{\nu=\infty}\left(\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right) = \lim_{\mu=\infty}\left(\lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right)$$

nach sich zieht.

---

[1]) In dem angegebenen weiteren Sinne, d. h. die betreffenden Grenzwerthe dürfen eventuell auch unendlich gross mit bestimmten Vorzeichen ausfallen.

Daraus folgt dann weiter, dass $\lim_{\mu=\infty, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ sicher nicht existiren kann, wenn die beiden Grenzwerthe (10) existiren und von einander verschieden ausfallen.

(Beispiele:

$$(12) \qquad a_\mu^{(\nu)} = \frac{\mu}{\mu+\nu}, \quad 2^{-\frac{\nu}{\mu}}, \quad \left(\frac{\mu}{\mu+1}\right)^\nu.$$

Man hat hier für jedes $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

$$(13) \qquad \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 1, \text{ also auch: } \lim_{\nu=\infty}\left(\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right) = 1:$$

dagegen für jedes $\mu = 1, 2, 3, \ldots$

$$(14) \qquad \lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0, \text{ also auch: } \lim_{\mu=\infty}\left(\lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right) = 0.$$

Bei keinem der genannten Beispiele kann also $\lim_{\mu=\infty, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ existiren, was sich im übrigen auch leicht verificiren lässt).

Dagegen ist es keineswegs gestattet, aus der blossen Existenz der Beziehung (11) (welche allemal die Existenz von $\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ für $\nu \geqq n$, $\lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ für $\mu \geqq m$ implicite voraussetzt) auf diejenige von $\lim_{\mu=\infty, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ zu schliessen. Selbst wenn:

$$(15) \qquad \begin{cases} \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a \text{ für **jeden** einzelnen Werth von } \nu, \\ \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a \quad \text{,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,,} \quad \mu, \end{cases}$$

so braucht darum keineswegs $\lim_{\mu=\infty, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a$ zu sein (was nach dem Satze am Anfange dieses Artikels nur dann der Fall sein müsste, wenn $\lim_{\mu=\infty, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ überhaupt existirt).

Man betrachte z. B.:

$$(16) \qquad a_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{1+(\mu-\nu)^2} \quad \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Hier wird:

$$(17) \qquad \begin{cases} \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0 \text{ für **jeden** einzelnen Werth von } \nu, \\ \lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0 \quad \text{,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,,} \quad \mu, \end{cases}$$

während ein bestimmter $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ offenbar nicht vorhanden ist, da $(\mu-\nu)^2$ jede beliebige Zahl $\geqq 0$ vorstellen kann, wenn μ und ν unabhängig von einander in's Unendliche wachsen. Im übrigen besteht hier für jedes beliebige Werthepaar μ, ν die Beziehung:

$$(18) \qquad 0 < a_\mu^{(\nu)} < 1$$

und daraus folgt, dass $a_\mu^{(\nu)}$ auch bei unendlich wachsenden Werthen von μ und ν das endliche Intervall (0, 1) niemals verlassen kann.

Ein ähnliches Verhalten zeigt der folgende Ausdruck:

$$(19) \qquad a_\mu^{(\nu)} = \frac{\mu\nu}{\mu^2+\nu^2} \quad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, 3, \ldots \\ \nu = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix},$$

für welchen:

$$(20) \qquad \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0,$$

während $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ nicht existirt und im übrigen:

$$(21) \qquad 0 < a_\mu^{(\nu)} \leqq \frac{1}{2}$$

wird.

Man könnte hiernach vermuthen, dass etwas analoges allemal stattfindet, wenn die Grenzwerthe $\lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$, $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ für jedes einzelne (wenn auch noch so grosse) ν bezw. μ existiren und unter einer festen Grenze bleiben. Diese Vermuthung wäre indessen irrig, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$(22) \qquad a_\mu^{(\nu)} = \left(\frac{2}{1+(\mu-\nu)^2}\right)^{\nu+1} \quad \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Auch hier wird:

$$(23) \qquad \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0 \text{ (für jedes einzelne } \nu \text{ bezw. } \mu),$$

und andererseits:

$$(24) \qquad a_\nu^{(\nu)} = 2^{\nu+1}$$

d. h. die Terme $a_\mu^{(\nu)}$ wachsen für $\mu=\nu$ gleichzeitig mit μ und ν in's Unendliche.

Ein Beispiel ähnlicher Art liefert der Ausdruck:

$$(25) \qquad a_\mu^{(\nu)} = \frac{\mu^2 \nu^2}{\mu^3 + \nu^3} \quad \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

4. Die im vorigen Artikel betrachteten Eventualitäten erscheinen ausgeschlossen, falls die Terme $a_\mu^{(\nu)}$ sich monoton verhalten, d. h. falls für jedes (μ, ν):

$$(26) \qquad a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - a_\mu^{(\nu)} \geqq 0 \text{ bezw. } \leqq 0 \quad \begin{pmatrix} \varrho = 0, 1, 2, \ldots \\ \sigma = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Für solche monotone Zahlenfolgen gilt der Satz:

Bleiben die $|a_\mu^{(\nu)}|$ stets unter einer endlichen Zahl g, so stellen die Ausdrücke:

$$(27) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} & (\nu = 0, 1, 2, \ldots), \\ \lim\limits_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} & (\mu = 0, 1, 2, \ldots), \end{cases}$$

$$(28) \qquad \lim_{\mu=\infty, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)},$$

durchweg bestimmte Zahlen vor, und es besteht die Beziehung:

$$(29) \qquad \lim_{\mu=\infty, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} \left(\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right) = \lim_{\mu=\infty} \left(\lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right).$$

Beweis. Es sei etwa die Zahlenfolge $(a_\mu^{(\nu)})$ eine niemals abnehmende, so dass also durchweg:

$$a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - a_\mu^{(\nu)} \geqq 0.$$

Alsdann hat man insbesondere:

$$a_{\mu+\varrho}^{(\nu)} - a_\mu^{(\nu)} \geqq 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$
$$a_\mu^{(\nu+\sigma)} - a_\mu^{(\nu)} \geqq 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

d. h. die einzelnen Zeilen und Colonnen des Schema's (1) bilden gleichfalls niemals abnehmende und zwar einfach unendliche Zahlenfolgen. Daraus ergiebt sich zunächst, wegen $|a_\mu^{(\nu)}| < g$, nach einem bekannten Satze die Bestimmtheit der Grenzwerthe (27).

Wäre nun der Grenzwerth (28) nicht gleichfalls endlich und bestimmt, so müsste, wie gross auch μ, ν angenommen werden, zu dem Terme $a_\mu^{(\nu)}$ stets ein Term $a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)}$ existiren, so dass

$$a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - a_\mu^{(\nu)} \geqq a,$$

wo a eine — möglicherweise sehr kleine — aber bestimmte positive Zahl bedeutet. Man könnte darnach aus der Folge $(a_\mu^{(\nu)})$ eine unbegrenzt fortsetzbare Folge von Termen: $a_\mu^{(\nu)}$, $a_{\mu+\varrho_1}^{(\nu+\sigma_1)}, \ldots a_{\mu+\varrho_\varkappa}^{(\nu+\sigma_\varkappa)}, \ldots$ herausheben, so dass

$$\begin{aligned} a_{\mu+\varrho_1}^{(\nu+\sigma_1)} - a_\mu^{(\nu)} &\geqq a \\ a_{\mu+\varrho_2}^{(\nu+\sigma_2)} - a_{\mu+\varrho_1}^{(\nu+\sigma_1)} &\geqq a \\ \cdots\cdots&\cdots \\ a_{\mu+\varrho_\varkappa}^{(\nu+\sigma_\varkappa)} - a_{\mu+\varrho_{\varkappa-1}}^{(\nu+\sigma_{\varkappa-1})} &\geqq a \end{aligned}$$

und daher für jedes noch so grosse $\varkappa$:

$$a_{\mu+\varrho_\varkappa}^{(\nu+\sigma_\varkappa)} - a_\mu^{(\nu)} \geqq \varkappa \cdot a \quad \text{d. h.} \quad a_{\mu+\varrho_\varkappa}^{(\nu+\sigma_\varkappa)} \geqq a_\mu^{(\nu)} + \varkappa \cdot a,$$

was der Voraussetzung widerspräche, dass durchweg: $|a_\mu^{(\nu)}| < g$.

Es muss somit $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ eine bestimmte Zahl sein. Daraus folgt dann schliesslich mit Benützung des Satzes in Art. 3 (Gl. (8)) die Existenz der Grenzwerthe $\lim\limits_{\nu=\infty}\left(\lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right)$, $\lim\limits_{\mu=\infty}\left(\lim\limits_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right)$ und ihre Uebereinstimmung mit $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$.

Das analoge Resultat ergiebt sich ohne weiteres für eine niemals zunehmende Folge $(a_\mu^{(\nu)})$, wenn man beachtet, dass in diesem Falle die Folge $(-a_\mu^{(\nu)})$ eine niemals abnehmende und $\lim(-a_\mu^{(\nu)}) = -\lim(a_\mu^{(\nu)})$ ist.

Als Corollar zu dem eben bewiesenen Satze kann man noch folgendes aussprechen:

Ist die Folge $(a_\mu^{(\nu)})$ **monoton**, so zieht **jede** der drei Gleichungen:

$$(30)\quad \lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = A,\ \lim_{\nu=\infty}\left(\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right) = A,\ \lim_{\mu=\infty}\left(\lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right) = A$$

die beiden anderen nach sich.

Denn aus jeder dieser drei Gleichungen würde für jedes beliebige (μ, ν) folgen:

$$a_0^{(0)} \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq A,$$

falls die $a_\mu^{(\nu)}$ niemals abnehmen; und:

$$a_0^{(0)} \geqq a_\mu^{(\nu)} \geqq A.$$

falls die $a_\mu^{(\nu)}$ niemals zunehmen. In jedem Falle müssen also die $| a_\mu^{(\nu)} |$ durchweg unter einer endlichen Zahl bleiben, so dass die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Behauptung aus dem unmittelbar zuvor bewiesenen Satze hervorgeht.

Ferner ergiebt sich noch:

Ist die Folge $(a_\mu^{(\nu)})$ **monoton** und:

$$\lim_{\nu = \infty} a_\nu^{(\nu)} = A$$

so hat man auch:

$$\lim_{\mu = \infty, \nu = \infty} a_\mu^{(\nu)} = A.$$

Denn bedeutet n die grössere der beiden Zahlen μ, ν, so hat man stets:

$$a_\mu^{(\nu)} \leqq a_n^{(n)} \leqq A.$$

Daraus folgt aber die Existenz eines endlichen $\lim\limits_{\mu = \infty, \nu = \infty} a_\mu^{(\nu)}$ und somit die Beziehung

$$(31) \qquad \lim_{\mu = \infty, \nu = \infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu = \infty} a_\nu^{(\nu)}.$$

5. Bleiben die absoluten Beträge einer monotonen Zahlenfolge $(a_\mu^{(\nu)})$ nicht unter einer festen Grenze, giebt es also zu jeder noch so grossen positiven Zahl G Werthepaare (μ, ν), für welche $| a_\mu^{(\nu)} | > G$, so können nur die folgenden zwei Fälle eintreten:

Entweder die Folge $(a_\mu^{(\nu)})$ ist eine niemals abnehmende. Dann müssen die $a_\mu^{(\nu)}$ für hinlänglich grosse Werthe von μ und ν durchweg positiv werden, so dass also geradezu $a_\mu^{(\nu)} > G$, d. h.:

$$(32) \qquad \lim_{\mu = \infty, \nu = \infty} a_\mu^{(\nu)} + = \infty.$$

und, wie leicht zu sehen, auch:

$$(33) \qquad \lim_{\nu=\infty}\left(\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right) = \lim_{\mu=\infty}\left(\lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right) = +\infty.$$

Oder die Folge $(a_\mu^{(\nu)})$ ist eine niemals zunehmende. Dann bilden wiederum die Terme $(-a_\mu^{(\nu)})$ eine niemals abnehmende Folge, so dass zunächst:

$$\lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} (-a_\mu^{(\nu)}) = +\infty,$$

und daher schliesslich:

$$(34) \quad \lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty}\left(\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right) = \lim_{\mu=\infty}\left(\lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right) = -\infty.$$

Man kann dieses Resultat auch in folgender Form aussprechen:

Ist die Folge $(a_\mu^{(\nu)})$ **monoton**, so zieht **jede** der drei Gleichungen (30) **die beiden anderen** nach sich, auch wenn A die Bedeutung von $+\infty$ oder $-\infty$ hat.

§ 2. Unendliche Doppelreihen: Convergenz und Divergenz. Beziehungen zwischen einer Doppelreihe und der Reihe der Zeilen- bezw. Colonnen-Summen.

1. Setzt man:

$$(1) \qquad \left.\begin{array}{l} \quad u_0^{(0)} + u_1^{(0)} + \ldots + u_\mu^{(0)} \\ + u_0^{(1)} + u_1^{(1)} + \ldots + u_\mu^{(1)} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu)} + \ldots + u_\mu^{(\nu)} \end{array}\right\} = S_\mu^{(\nu)},$$

so heisst die unendliche Doppelreihe:

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} \quad u_0^{(0)} + u_1^{(0)} + \ldots + u_\mu^{(0)} + \ldots \\ + u_0^{(1)} + u_1^{(1)} + \ldots + u_\mu^{(1)} + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu)} + \ldots + u_\mu^{(\nu)} + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

convergent, wenn $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ (in dem § 1, Art. 1 definirten Sinne) einen bestimmten Werth besitzt.

Ist etwa:

$$\lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)} = S, \tag{3}$$

so heisst S die Summe der unendlichen Doppelreihe (2). Zur abgekürzten Bezeichnung der in Gl. (1) und (3) enthaltenen Aussagen dient die Schreibweise:

$$\sum_0^\infty{}^{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = S. \tag{4}$$

In jedem anderen Falle heisst die Doppelreihe (1) divergent, und zwar eigentlich divergent, wenn:

$$\lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)} = +\infty \text{ bezw. } = -\infty; \tag{5}$$

uneigentlich divergent oder oscillirend (unbestimmt), wenn überhaupt kein endlicher oder bestimmt unendlicher $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ existirt.

Wir bedienen uns in diesen Fällen gelegentlich der zwar nicht ganz correcten, aber bequemen und zu Missverständnissen keinen Anlass bietenden Bezeichnung: die Summe der Doppelreihe (1), in Zeichen: $\sum\limits_0^\infty{}^{\mu,\nu} a_\mu^{(\nu)}$, sei unendlich gross bezw. unbestimmt.

2. Wie ein Blick auf das Schema (1) lehrt, hat man:

$$\begin{cases} u_0^{(0)} + u_1^{(0)} + \ldots + u_\mu^{(0)} = S_\mu^{(0)} \\ u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu)} + \ldots + u_\mu^{(\nu)} = S_\mu^{(\nu)} - S_\mu^{(\nu-1)} \quad (\nu \geq 1). \end{cases} \tag{6}$$

Ebenso:

$$\begin{cases} u_0^{(0)} + u_0^{(1)} + \ldots + u_0^{(\nu)} = S_0^{(\nu)} \\ u_\mu^{(0)} + u_\mu^{(1)} + \ldots + u_\mu^{(\nu)} = S_\mu^{(\nu)} - S_{\mu-1}^{(\nu)} \quad (\mu \geq 1). \end{cases} \tag{7}$$

Daraus folgt weiter:

$$\begin{cases} \text{(a) } u_0^{(0)} = S_0^{(0)},\ u_\mu^{(0)} = S_\mu^{(0)} - S_{\mu-1}^{(0)}\ (\mu \geqq 1),\ u_0^{(\nu)} = S_0^{(\nu)} - S_0^{(\nu-1)}\ (\nu \geqq 1), \\ \qquad u_\mu^{(\nu)} = S_\mu^{(\nu)} - S_\mu^{(\nu-1)} - (S_{\mu-1}^{(\nu)} - S_{\mu-1}^{(\nu-1)}) \\ \text{(b) } \qquad = S_{\mu-1}^{(\nu-1)} + S_\mu^{(\nu)} - (S_\mu^{(\nu-1)} + S_{\mu-1}^{(\nu)}) \end{cases} \quad (\mu \geqq 1,\ \nu \geqq 1). \tag{8}$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass:

$$(9) \qquad \lim_{\mu=\infty,\ \nu=\infty} u_\mu^{(\nu)} = 0$$

sein muss, wenn $\lim\limits_{\mu=\infty,\ \nu=\infty} S_\mu^{(\nu)} = S$ ist, d. h. wenn die Doppelreihe convergirt. Insbesondere ist also bei einer convergenten Doppelreihe stets:

$$(10) \qquad \lim_{\nu=\infty} u_\nu^{(\nu)} = 0,$$

d. h. die Terme der Haupt-Diagonale (Schema (2)) müssen schliesslich gegen Null convergiren. Da andererseits die Existenz eines bestimmten $\lim\limits_{\mu=\infty,\ \nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ nach Art. 2 der vorigen Paragraphen keineswegs diejenige von:

$\lim\limits_{\mu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ für irgend einen endlichen Werth von ν

$\lim\limits_{\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ „ „ „ „ „ „ μ

involvirt, so lehren die Gleichungen (8), dass selbst bei einer convergenten Doppelreihe

$\lim\limits_{\mu=\infty} u_\mu^{(\nu)}$ für keinen einzigen endlichen Werth von ν

$\lim\limits_{\nu=\infty} u_\mu^{(\nu)}$ „ „ „ „ „ „ μ

zu verschwinden braucht. Mit andern Worten: Eine Doppelreihe kann sehr wohl convergiren, ohne dass die Terme einer einzigen Zeile bezw. Colonne mit unbegrenzt wachsendem Stellenzeiger der Null zustreben.

Beispiel. Man setze:

$$(11) \qquad S_\mu^{(\nu)} = \frac{(-1)^{\mu+\nu}}{2(a+1)} \cdot \left(\frac{1}{a^\mu} + \frac{1}{a^\nu}\right) \quad \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

wo $a > 1$, und daher nach Gl. (8):

$$(12) \left\{ \begin{array}{c} u_0^{(0)} = \dfrac{1}{a+1} \\ u_\mu^{(0)} = \dfrac{(-1)^\mu}{2}\left(\dfrac{1}{a^\mu} + \dfrac{2}{a+1}\right),\ u_0^{(\nu)} = \dfrac{(-1)^\nu}{2}\left(\dfrac{1}{a^\nu} + \dfrac{2}{a+1}\right) \\ u_\mu^{(\nu)} = (-1)^{\mu+\nu}\left(\dfrac{1}{a^\mu} + \dfrac{1}{a^\nu}\right) \end{array} \right\} (\mu \geqq 1, \nu \geqq 1)$$

Die Doppelreihe $\sum_0^\infty{}^{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)}$ ist alsdann convergent, denn es ergiebt sich:

$$(13)\qquad \lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)} = 0.$$

Nichtsdestoweniger hat man:

$$(14)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{\mu=\infty} \left| u_\mu^{(0)} \right| = \dfrac{1}{a+1}, \; \lim\limits_{\mu=\infty} \left| u_\mu^{(\nu)} \right| = \dfrac{1}{a^\nu} \; (\nu = 1, 2, 3, \ldots), \\ \lim\limits_{\nu=\infty} \left| u_0^{(\nu)} \right| = \dfrac{1}{a+1}, \; \lim\limits_{\nu=\infty} \left| u_\mu^{(\nu)} \right| = \dfrac{1}{a^\mu} \; (\mu = 1, 2, 3, \ldots), \end{cases}$$

sodass also die Terme jeder einzelnen Zeile und Colonne durchweg von Null verschieden bleiben.

3. Ist:

$$(15)\qquad \lim_{\mu=\infty} S_\mu^{(\nu)} = S^{(\nu)} \text{ für: } \nu = 0, 1, 2, \ldots n,$$

so folgt aus Gl. (6), dass:

$$(16)\qquad \begin{cases} \sum\limits_0^\infty u_\mu^{(0)} = S^{(0)} \\ \sum\limits_0^\infty u_\mu^{(\nu)} = S^{(\nu)} - S^{(\nu-1)} \; (\nu = 1, 2 \ldots n) \end{cases}$$

d. h. fallen die Grenzwerthe $\lim\limits_{\mu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ für $\nu = 0, 1, 2, \ldots n$ endlich aus, so bildet die 1[te], 2[te], ... $(n+1)$[te] Zeile je eine convergente Reihe.

Umgekehrt hat man:

$$(17)\qquad S_m^{(\nu)} = \sum_0^m{}^\mu u_\mu^{(0)} + \sum_0^m{}^\mu u_\mu^{(1)} + \ldots + \sum_0^m{}^\mu u_\mu^{(\nu)} \; (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

und daher:

$$(18)\qquad \lim_{\mu=\infty} S_\mu^{(\nu)} = \sum_0^\infty{}^\mu u_\mu^{(0)} + \sum_0^\infty{}^\mu u_\mu^{(1)} + \ldots + \sum_0^\infty{}^\mu u_\mu^{(\nu)} \; (\nu = 0, 1, 2, \ldots n),$$

falls die rechts stehenden Reihen, d. h. die 1[te], 2[te], ... $(n+1)$[te] Zeile sämmtlich convergiren.

Hieraus folgt also:

Die Existenz endlicher Grenzwerthe $\lim_{\mu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ ist **identisch** mit der Convergenz aller einzelnen Zeilen.

Die analoge Beziehung besteht dann offenbar zwischen der Existenz endlicher Grenzwerthe $\lim_{\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ für $\mu = 0, 1, 2, \ldots$ und der Convergenz aller einzelnen Colonnen.

4. Mit Benützung dieses Resultates liefern aber die im vorigen Paragraphen gewonnenen Ergebnisse über die Grenzwerthe zweifach unendlicher Zahlenfolgen ohne weiteres die folgenden Sätze:

I. Eine Doppelreihe kann **convergiren,** ohne dass eine einzige Zeile oder Colonne eine **convergente** Reihe bildet. Es kann dann aber immer nur eine **endliche** Anzahl von Zeilen bezw. Colonnen **eigentlich** divergiren oder ein **unendliches** Unbestimmtheits-Intervall besitzen; und es muss das Unbestimmtheits-Intervall aller Zeilen und Colonnen von einer bestimmten an **beliebig klein** werden.

Dies folgt aus § 1, Art. 2. Ein Beispiel einer Doppelreihe, bei welcher sicher keine einzige Zeile und Colonne convergirt (denn die unendlich entfernten Glieder hatten ja nicht einmal den Grenzwerth Null) wurde bereits am Schlusse des Art. 2 gegeben. Hier war (Gl. (11)):

$$S_\mu^{(\nu)} = \frac{(-1)^{\mu+\nu}}{2(a+1)}\left(\frac{1}{a^\mu} + \frac{1}{a^\nu}\right)$$

also:

$$S_\mu^{(0)} = \frac{(-1)^\mu}{2(a+1)}\left(\frac{1}{a^\mu} + 1\right)$$

$$S_\mu^{(\nu)} - S_\mu^{(\nu-1)} = \frac{(-1)^{\mu+\nu}}{2(a+1)}\left(\frac{2}{a^\mu} + \frac{a+1}{a^\nu}\right) \quad (\nu \geq 1),$$

sodass also die 1[te] Zeile in den Grenzen $\pm \frac{1}{2(a+1)}$, die

$(\nu+1)^{\text{te}}$ (wo $\nu \geq 1$) in den Grenzen $\pm \frac{1}{2a^\nu}$ oscillirt. Das analoge gilt bezüglich der Colonnen. Um ferner convergente Doppelreihen herzustellen, in denen eine beliebige endliche Anzahl von Zeilen (Colonnen) eigentlich divergirt oder ein unendliches Unbestimmtheits-Intervall besitzt, braucht man nur in irgend einer convergenten Doppelreihe eine beliebige endliche Anzahl von Zeilen (Colonnen) durch die Terme irgendwelcher eigentlich divergenten oder unendlich-unbestimmten Reihen, ebensoviele andere Zeilen (Colonnen) durch die nämlichen Terme mit entgegengesetztem Vorzeichen zu ersetzen.

II. Ist ausser der **Doppelreihe:** $\sum_0^\infty{}^{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = S$ jede einzelne **Zeile:** $\sum_0^\infty{}^{\mu}\, u_\mu^{(\nu)}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ oder jede einzelne **Colonne:** $\sum_0^\infty{}^{\nu}\, u_\mu^{(\nu)}$ **convergent,** so **convergirt** auch die Reihe der **Zeilen-Summen** bezw. diejenige der **Colonnen-Summen** gegen die Summe S, d. h. man hat:

$$(19)\qquad \sum_0^\infty{}^{\nu} \sum_0^\infty{}^{\mu}\, u_\mu^{(\nu)} = S, \text{ bezw. } \sum_0^\infty{}^{\mu} \sum_0^\infty{}^{\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = S.^{1)}$$

---

[1]) Das Symbol:

$$\sum_0^\infty{}^{\nu} \sum_0^\infty{}^{\mu}\, u_\mu^{(\nu)},$$

ausführlicher geschrieben:

$$\sum_0^\infty{}^{\nu} \left(\sum_0^\infty{}^{\mu}\, u_\mu^{(\nu)} \right),$$

hat allemal die Bedeutung von:

$$\lim_{n=\infty} \left(\lim_{m=\infty} \sum_0^n{}^{\nu} \sum_0^m{}^{\mu}\, u_\mu^{(\nu)} \right)$$

d. h. von:

$$\lim_{n=\infty} \left(\lim_{m=\infty} S_m^{(n)} \right).$$

(Fortsetzung auf der nächsten Seite!)

Denn nach § 1, Art. 3 hat die Annahme: $\lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)} = S$ und die Existenz der Grenzwerthe $\lim_{\mu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ bezw. $\lim_{\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots)$ stets zur Folge, dass:

$$(20) \qquad \lim_{\nu=\infty} (\lim_{\mu=\infty} S_\mu^{(\nu)}) = S \text{ bezw. } \lim_{\mu=\infty} (\lim_{\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}) = S.$$

Man kann den Inhalt des Satzes II auch folgendermaassen aussprechen:

Die Summation einer **convergenten**[1]) Doppelreihe mit **convergenten Zeilen** oder **Colonnen** kann auf zwei successive auszuführende einfache Summationen zurückgeführt werden, nämlich:

$$(21) \quad \sum_0^\infty{}^{\mu,\nu} u_\mu^{(\nu)} = \sum_0^\infty{}^{\nu} \left(\sum_0^\infty{}^{\mu} u_\mu^{(\nu)} \right) \text{ bezw. } \sum_0^\infty{}^{\mu,\nu} u_\mu^{(\nu)} = \sum_0^\infty{}^{\mu} \left(\sum_0^\infty{}^{\nu} u_\mu^{(\nu)} \right).$$

Man bemerke schliesslich, dass der Satz II mutatis mutandis auch richtig bleibt, wenn $+\infty$ oder $-\infty$ an die Stelle der endlichen Zahl S tritt, da die Gleichung (20) auch in diesem Falle Geltung behält (s. § 1, Art. 3, Gl. (8); also:

III. Ist die **Doppelreihe** der $u_\mu^{(\nu)}$ mit **convergenten Zeilen** bezw. **Colonnen eigentlich** divergent, so gilt das gleiche von der Reihe der **Zeilen-Summen** bezw. **Colonnen-Summen.**

Das analoge gilt für das Symbol:

$$\sum_0^\infty{}^{\mu} \sum_0^\infty{}^{\nu} u_\mu^{(\nu)}.$$

Man könnte ein solches Symbol, zum Unterschiede von demjenigen der Doppelreihe: $\sum_0^\infty{}^{\mu,\nu} u_\mu^{(\nu)}$, passend als iterirte Reihe bezeichnen, ein Ausdruck, dessen Analogon zur Vermeidung von Zweideutigkeiten sich auch für die Theorie der bestimmten Integrale empfehlen dürfte.

[1]) Die Convergenz der Doppelreihe, d. h. die Existenz eines endlichen $\lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ muss a priori feststehen, sonst ist der Satz unrichtig, wie Satz IV zeigt.

Mit Berücksichtigung dieses Satzes und der weiteren Betrachtungen in § 1, Art. 3 ergiebt sich sodann:

IV. Auch wenn alle **Zeilen und Colonnen convergente** Reihen bilden, und wenn sowohl die Reihe der **Zeilen-Summen,** als auch diejenige der **Colonnen-Summen** gegen die **nämliche** Summe S **convergirt,** so **kann** die betreffende **Doppelreihe** nichtsdestoweniger **divergiren** und zwar (nach Satz III) allemal **uneigentlich.** Dieses **muss** der Fall sein, wenn die Reihe der **Zeilen-Summen** und diejenige der **Colonnen-Summen** gegen **verschiedene** Werthe convergiren.

Um Beispiele derartiger divergenter Doppelreihen zu gewinnen, hat man lediglich für $S_\mu^{(\nu)}$ einen jener Ausdrücke $a_\mu^{(\nu)}$ zu wählen, welche in § 1, Art. 3 näher untersucht wurden, und sodann die Reihenglieder $u_\mu^{(\nu)}$ vermittelst der Gleichungen (8) entsprechend darzustellen. Setzt man z. B. (s. § 1, Gl. (16) (19) (22) (25)):

$$(22)\quad S_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{1+(\mu-\nu)^2},\ \frac{\mu\nu}{1+\mu^2+\nu^2},\ \left(\frac{2}{1+(\mu-\nu)^2}\right)^{\nu+1},\ \frac{\mu^2\nu^2}{1+\mu^3+\nu^3},$$

so hat man:

$$(23)\quad \begin{cases} \lim\limits_{\mu=\infty} S_\mu^{(\nu)} = \lim\limits_{\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)} = 0 \quad \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix} \\ \lim\limits_{\nu=\infty}\left(\lim\limits_{\mu=\infty} S_\mu^{(\nu)}\right) = \lim\limits_{\mu=\infty}\left(\lim\limits_{\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}\right) = 0, \end{cases}$$

während $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ nicht existirt. Es convergirt dann also jede Zeile und jede Colonne gegen die Summe 0, desgleichen die Reihe aller Zeilen-Summen, wie auch aller Colonnen-Summen gegen die Gesammtsumme 0, während die betreffende Doppelreihe oscillirt.

Nimmt man ferner für $S_\mu^{(\nu)}$ einen der folgenden Ausdrücke (s. § 1, Gl. (12)):

$$(24)\qquad S_\mu^{(\nu)} = \frac{\mu+1}{\mu+\nu+1},\ 2^{-\frac{\nu+1}{\mu+1}},\ \left(\frac{\mu+1}{\mu+2}\right)^{\nu+1},$$

so ist:

(25) $$\lim_{\nu=\infty}\left(\lim_{\mu=\infty} S_\mu^{(\nu)}\right) = 1, \quad \lim_{\mu=\infty}\left(\lim_{\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}\right) = 0,$$

sodass also die Reihe der Zeilen-Summen gegen die Summe 1, diejenige der Colonnen-Summen gegen die Summe 0 convergirt. Eine verhältnissmässig einfache Form der Reihenglieder $u_\mu^{(\nu)}$ liefert übrigens der letzte der Ausdrücke (24), nämlich:

(26) $u_0^{(0)} = \frac{1}{2}$, im übrigen: $$u_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{\mu+1}\cdot\left(\frac{\mu}{\mu+1}\right)^\nu - \frac{1}{\mu+2}\cdot\left(\frac{\mu+1}{\mu+2}\right)^{\nu+1}.$$ [1]

5. Hat man durchweg $u_\mu^{(\nu)} \geqq 0$, so bilden die $S_\mu^{(\nu)}$ allemal eine monotone (nämlich niemals abnehmende) Folge positiver Zahlen. Daraus ergeben sich aber sofort mit Rücksicht auf § 1, Art. 4 die folgenden Sätze:

V. Ist $u_\mu^{(\nu)} \geqq 0$ und bleibt $S_\mu^{(\nu)}$ unter einer endlichen Zahl g, so convergirt die Doppelreihe der $u_\mu^{(\nu)}$ gegen eine bestimmte Summe S. Zugleich convergirt jede **Zeile** und jede **Colonne**, und die Reihe der **Zeilen-** bezw. **Colonnen-Summen** convergirt gleichfalls gegen die Summe S.

VI. Ist $u_\mu^{(\nu)} \geqq 0$, so zieht **jede** der drei Gleichungen:

(27) $$\sum_0^\infty{}^{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = S, \quad \sum_0^\infty{}^{\nu} \sum_0^\infty{}^{\mu}\, u_\mu^{(\nu)} = S, \quad \sum_0^\infty{}^{\mu} \sum_0^\infty{}^{\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = S$$

die beiden anderen nach sich. Dies gilt auch noch, wenn $+\infty$ an die Stelle der bestimmten positiven Zahl S tritt.

Die Sätze V und VI bleiben selbstverständlich in Kraft, wenn unter den Termen $u_\mu^{(\nu)}$ negative Zahlen in endlicher Anzahl vorkommen.

---

[1] Es ist dies im wesentlichen das von F. Arndt herrührende Beispiel (Grunert's Archiv, Bd. 11, S. **319**) Beispiel (s. Stolz, Allg. Arithmetik, Bd. I, S. **246**).

§ 3. Beziehungen zwischen einer Doppelreihe und der aus den Diagonal-Summen gebildeten einfachen Reihe.

1. Formt man das zweifach unendliche Schema:

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{l} \quad u_0^{(0)} + u_1^{(0)} + \ldots + u_\mu^{(0)} + \ldots \\ + u_0^{(1)} + u_1^{(1)} + \ldots + u_\mu^{(1)} + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu)} + \ldots + u_\mu^{(\nu)} + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

in eine einfach unendliche Reihe um, indem man die Terme $u_\mu^{(\nu)}$ nach „Diagonalen" ordnet, d. h. indem man bildet:

$$(2)\quad \sum_0^\infty{}^\nu\, w_\nu,\ \text{wo: } w_\nu = u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu-1)} + \ldots + u_{\nu-1}^{(1)} + u_\nu^{(0)},$$

so besteht zwischen der Doppelreihe der $u_\mu^{(\nu)}$ und der einfach-unendlichen Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu\, w_\nu$ eine vollkommene Aequivalenz, sobald $u_\mu^{(\nu)} \geqq 0$.

Es gilt dann nämlich, wie das Schema:

$$\begin{array}{l} u_0^{(0)} + \ldots + u_n^{(0)} + \ldots + u_{2n}^{(0)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_0^{(n)} + \ldots + u_n^{(n)} \\ \ldots\ldots\ldots \\ u_0^{(2n)} \end{array}$$

ohne weiteres zeigt, die doppelte Ungleichung:

$$(3)\quad \sum_0^n{}^\nu\, w_\nu \leqq S_n^{(n)} \leqq \sum_0^{2n}{}^\nu\, w_\nu.$$

Wenn nun die Doppelreihe gegen die Summe S convergirt, so hat man speciell $\lim_{n=\infty} S_n^{(n)} = S$, also:

$$\sum_0^n{}^\nu\, w_\nu \leqq S,$$

und daraus folgt zunächst wegen $w_\nu \geqq 0$, die Convergenz der Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu w_\nu$.

Bringt man sodann Ungl. (3) auf die Form:

$$(4) \qquad 0 \leqq S_n^{(n)} - \sum_0^n{}^\nu w_\nu \leqq \sum_{n+1}^{2n}{}^\nu w_\nu,$$

so erkennt man unmittelbar, dass: $\lim_{n=\infty} (S_n^{(n)} - \sum_0^\infty{}^\nu w_\nu) = 0$, und somit:

$$(5) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu w_\nu = S.$$

Umgekehrt: Wenn $\sum_0^\infty{}^\nu w_\nu$ gegen die Summe S convergirt, so lehrt die Ungleichung (4), dass auch:

$$(6) \qquad \lim_{n=\infty} S_n^{(n)} = S,$$

und somit nach § 1, Gl. (31) auch allgemein:

$$(7) \qquad \lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} S_\mu^{(\nu)} = S.$$

Daraus folgt weiter, dass die Doppelreihe der $u_\mu^{(\nu)}$ und die Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu w_\nu$ auch allemal gleichzeitig divergiren, falls eine der beiden divergirt.

Fasst man dieses Resultat mit dem Satz VI des vorigen Paragraphen zusammen, so ergiebt sich an dessen Stelle der folgende etwas allgemeinere:

Ist $u_\mu^{(\nu)} \geqq 0$, so zieht jede der **vier** Gleichungen:

$$(8) \quad \sum_0^\infty{}^{\mu,\nu} u_\mu^{(\nu)} = S,\ \sum_0^\infty{}^\nu \sum_0^\infty{}^\mu u_\mu^{(\nu)} = S,\ \sum_0^\infty{}^\mu \sum_0^\infty{}^\nu u_\mu^{(\nu)} = S,\ \sum_0^\infty{}^\nu w_\nu = S$$

die drei anderen nach sich, gleichgültig, ob S endlich oder unendlich gross ist.

2. Um die Beziehung zwischen einer beliebigen Doppelreihe $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)}$ und der Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu$ festzustellen, schicken wir zunächst den folgenden Hülfssatz voraus, welcher eine Verallgemeinerung eines bekannten Cauchy'schen[1]) Satzes darstellt:

Bleiben die Terme $a_\mu^{(\nu)}$ $\begin{pmatrix}\mu = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots\end{pmatrix}$ numerisch unter einer endlichen Zahl g, und ist:

$$\lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a, \tag{9}$$

(wo a eine bestimmte Zahl incl. Null vorstellt), so wird:

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_0^{(n)} + a_1^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}^{(1)} + a_n^{(0)}}{n+1} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \sum_0^n{}_\nu\, a_\nu^{(n-\nu)} = a. \tag{10}$$

Beweis. Man hat zunächst identisch:

$$\sum_0^n{}_\nu\, a_\nu^{(n-\nu)} - (n+1)\cdot a = \sum_0^n{}_\nu\, (a_\nu^{(n-\nu)} - a). \tag{11}$$

In Folge der Voraussetzung (9) kann man nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Zahl ε eine Zahl m so fixiren, dass:

$$| a_\nu^{(n-\nu)} - a | \leqq \varepsilon \quad \text{für: } \nu > m,\ n - \nu \geqq m. \tag{12}$$

Nimmt man jetzt $n > 2m$ an (also: $n - m > m$) und schreibt Gl. (11) folgendermaassen:

$$\begin{aligned} &\sum_0^n{}_\nu\, a_\nu^{(n-\nu)} - (n+1)\, a \\ &= \sum_0^m{}_\nu\, (a_\nu^{(n-\nu)} - a) + \sum_{m+1}^{n-m}{}_\nu\, (a_\nu^{(n-\nu)} - a) + \sum_{n-m+1}^n{}_\nu\, (a^{(n-\nu)} - a). \end{aligned} \tag{13}$$

so wird in der zweiten Summe der rechten Seite durchweg: $| a_\nu^{(n-\nu)} - a | \leqq \varepsilon$, in der ersten und dritten zum mindesten: $| a_\nu^{(n-\nu)} - a | \leqq | a^{(n-\nu)} | + | a | < g + | a |$, und daher:

---

[1]) Analyse algébrique, p. 54.

$$(14) \qquad \left| \sum_0^n {}^\nu \, a_\nu^{(n-\nu)} - (n+1)\,a \right| < (2m+1)\cdot(g+|a|) + (n-2m)\cdot\varepsilon$$

oder:

$$(15) \qquad \left| \frac{1}{n+1} \cdot \sum_0^n {}^\nu \, a_\nu^{(n-\nu)} - a \right| < \frac{2m+1}{n+1}\cdot(g+|a|) + \left(1 - \frac{2m+1}{n+1}\right)\cdot\varepsilon.$$

Lässt man hier n in's Unendliche wachsen, so wird:

$$(16) \qquad \lim_{n=\infty} \left| \frac{1}{n+1} \sum_0^n {}^\nu \, a_\nu^{(n-\nu)} - a \right| \leqq \varepsilon,$$

also schliesslich:

$$(17) \qquad \lim_{n=\infty} \left| \frac{1}{n+1} \cdot \sum_0^n {}^\nu \, a_\nu^{(n-\nu)} \right| = a.$$

3. Nunmehr können wir den folgenden Satz beweisen:

Besitzt die **convergente** Doppelreihe:

$$\sum_0^\infty {}^{\mu,\nu} \, u_\mu^{(\nu)} = S$$

die Eigenschaft, dass die einzelnen Zeilen und Colonnen **convergiren** oder innerhalb **endlicher Grenzen oscilliren,** so kann die Reihe $\sum_0^\infty {}^\nu \, w_\nu$ nur **convergiren** oder **oscilliren.**[1]) Im **ersteren** Falle ist dann auch:

$$\sum_0^\infty {}^\nu \, w_\nu = S.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass in Folge der gemachten Voraussetzungen $|S_\mu^{(\nu)}|$ für alle möglichen μ, ν unter einer festen Zahl g bleiben muss.

Wegen der Convergenz der Doppelreihe gegen die Summe S lassen sich jeder positiven Zahl ε zwei Zahlen m, n zuordnen, so dass:

---

[1]) Sie kann also niemals eigentlich divergiren. Dagegen können ihre Unbestimmtsgrenzen auch $\pm\infty$ werden (s. das Beispiel in Art. 4).

$$|S_\mu^{(\nu)} - S| < \varepsilon \quad \text{für:}\ \mu \geqq m,\ \nu \geqq n,$$

also:

$$S - \varepsilon < S_\mu^{(\nu)} < S + \varepsilon,$$

und somit:

$$(18) \qquad |S_\mu^{(\nu)}| < |S| + \varepsilon \quad (\mu \geqq m,\ \nu \geqq n).$$

Betrachtet man jetzt die ersten n Zeilen der Doppelreihe, so bleibt nach Voraussetzung die Summe jeder einzelnen, wieviele Glieder man auch summiren mag, numerisch unter einer endlichen Grenze. Dasselbe gilt also auch für diejenigen Summen, welche entstehen, wenn man die ersten 2, 3, ... n Zeilen addirt, sodass man setzen kann:

$$(19) \quad |S_\mu^{(\nu)}| < g' \quad \text{für:}\ \mu = 0, 1, 2, \ldots \text{ in inf.},\ \nu < n,$$

wo g' eine bestimmte positive Zahl bedeutet.

Analog ergiebt sich durch Betrachtung der ersten m Colonnen:

$$(20) \quad |S_\mu^{(\nu)}| < g'' \quad \text{für:}\ \mu < m,\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \text{ in inf.}$$

Bedeutet jetzt g eine Zahl, die von keiner der drei Zahlen $|S| + \varepsilon$, g', g'' überstiegen wird, so bestehen alle drei Beziehungen (18) (19) (20) gleichzeitig, sobald man jene drei Zahlen durch g ersetzt, d. h. es ergiebt sich schliesslich:

$$(21) \qquad |S_\mu^{(\nu)}| < g \quad \text{für:} \begin{cases} \mu = 0, 1, 2, \ldots \text{ in inf.} \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \text{ in inf.} \end{cases}$$

Nun werde gesetzt:

$$(22) \qquad w_0 + w_1 + \ldots + w_\nu = W_\nu,$$

so hat man für $\nu \geqq 1$:

$$\begin{aligned} W_\nu = u_0^{(0)} + u_1^{(0)} + \ldots + u_{\nu-2}^{(0)} + u_{\nu-1}^{(0)} + u_\nu^{(0)} &= S_\nu^{(0)} \\ + u_0^{(1)} + u_1^{(1)} + \ldots + u_{\nu-2}^{(1)} + u_{\nu-1}^{(1)} \qquad &+ (S_{\nu-1}^{(1)} - S_{\nu-1}^{(0)}) \\ + u_0^{(2)} + u_1^{(2)} + \ldots + u_{\nu-2}^{(2)} \qquad &+ (S_{\nu-2}^{(2)} - S_{\nu-2}^{(1)}) \\ + \ldots\ldots \qquad &+ \ldots\ldots \\ + u_0^{(\nu)} \qquad &+ (S_0^{(\nu)} - S_0^{(\nu-1)}) \end{aligned}$$

oder, anders geordnet:

(23) $W_\nu = S_\nu^{(0)} + S_{\nu-1}^{(1)} + \ldots + S_1^{(\nu-1)} + S_0^{(\nu)} - \left\{ S_{\nu-1}^{(0)} + S_{\nu-2}^{(1)} + \ldots + S_0^{(\nu-1)} \right\}$

Substituirt man hier der Reihe nach $\nu = 1, 2, 3, \ldots n$, so ergiebt sich:

$$
\begin{aligned}
W_1 &= S_1^{(0)} + S_0^{(1)} - S_0^{(0)} \\
W_2 &= S_2^{(0)} + S_1^{(1)} + S_0^{(2)} - \left\{ S_1^{(0)} + S_0^{(1)} \right\} \\
W_3 &= S_3^{(0)} + S_2^{(1)} + S_1^{(2)} + S_0^{(3)} - \left\{ S_2^{(0)} + S_1^{(1)} + S_0^{(2)} \right\} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
W_n &= S_n^{(0)} + S_{n-1}^{(1)} + \ldots + S_0^{(n)} - \left\{ S_{n-1}^{(0)} + S_{n-2}^{(1)} + \ldots + S_0^{(n-1)} \right\},
\end{aligned}
$$

und wenn man diese n Gleichungen zu der folgenden addirt:

$$W_0 = S_0^{(0)}$$

so resultirt nach Hinzufügung des Factors $\frac{1}{n+1}$:

$$\text{(24)} \qquad \frac{1}{n+1} \sum_0^n{}_\nu W_\nu = \frac{S_n^{(0)} + S_{n-1}^{(1)} + \ldots + S_0^{(n)}}{n+1}.$$

Hieraus folgt aber für $\lim n = \infty$, mit Berücksichtigung der Beziehung $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)} = S$ und des unmittelbar zuvor bewiesenen Hilfssatzes:

$$\text{(25)} \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \sum_0^n{}_\nu W_n = S.$$

Wenn nun $\sum_0^\infty{}_\nu w_\nu$ convergirt und etwa:

$$\text{(26)} \qquad \sum_0^\infty{}_\nu w_\nu = \lim_{n=\infty} W_n = W$$

ist, so ist, nach dem im vorigen Artikel citirten Cauchy'schen Satze, auch:

$$\text{(27)} \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \sum_0^n{}_\nu W_\nu = W,$$

so dass sich aus der Verbindung der Gleichungen (25)—(27) ergiebt:

$$(28) \qquad \sum_0^\infty {}^\nu w_\nu = S.$$

Wäre nun andererseits $\sum_0^\infty {}^\nu w_\nu$ eigentlich divergent, also $\lim_{n=\infty} = +\infty$ bezw. $= -\infty$, so müsste wiederum nach jenem Cauchy'schen Satze:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \sum_0^n {}^\nu W_\nu = +\infty \text{ bezw. } = -\infty$$

sein, was der Gleichung (25) widerspräche. Daraus folgt mit Nothwendigkeit, dass die Reihe $\sum_0^\infty {}^\nu w_\nu$, falls sie nicht convergirt, jedenfalls nur oscilliren kann.

4. Um an einigen einfachen Beispielen zu zeigen, dass die beiden im vorigen Satze hervorgehobenen Möglichkeiten auch wirkich eintreten können, werde gesetzt:

$$(29) \qquad u_\mu^{(\nu)} = v_{\mu+\nu} - v_{\mu+\nu+1},$$

wo $\sum_0^\infty {}^\nu v_\nu$ als (bedingt oder unbedingt) convergent angenommen wird. Die auf diese Weise definirte Doppelreihe wird durch das Schema dargestellt:

$$(30) \left\{ \begin{array}{l} \quad (v_0 - v_1) + (v_1 - v_2) \; + (v_2 - v_3) \; + \ldots + (v_\mu - v_{\mu+1}) \; + \ldots \\ + (v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) \; + (v_3 - v_4) \; + \ldots + (v_{\mu+1} - v_{\mu+2}) + \ldots \\ + (v_2 - v_3) + (v_3 - v_4) \; + (v_4 - v_5) \; + \ldots + (v_{\mu+2} - v_{\mu+3}) + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (v_\nu - v_{\nu+1}) + (v_{\nu+1} - v_{\nu+2}) + (v_{\nu+2} - v_{\nu+3}) + \ldots + (v_{\mu+\nu} - v_{\mu+\nu+1}) + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Dasselbe ist offenbar convergent und besitzt die Summe: $\sum_0^\infty {}^\nu v_\nu$. Denn man hat:

$$(31) \qquad S_m^{(n)} = \sum_0^n {}^\nu v_\nu - \sum_{m+1}^{m+n+1} {}^\nu v_\nu = \sum_0^m {}^\nu v_\nu - \sum_{n+1}^{m+n+1} {}^\nu v_\nu.$$

Die einzelnen Zeilen und Colonnen sind gleichfalls convergent und ihre Summen der Reihe nach $= v_0, v_1, v_2, \ldots$

Andererseits hat man offenbar:

$$(32) \qquad w_\nu = (\nu + 1) \cdot (v_\nu - v_{\nu+1})$$

und daher:

$$\sum_0^{n-1}{}^\nu w_\nu = (v_0 - v_1) + 2(v_1 - v_2) + 3(v_2 - v_3) + \ldots + n(v_{n-1} - v_n)$$

$$(33) \qquad = \sum_0^{n-1}{}^\nu v_\nu - n \cdot v_n.$$

Diese Gleichung lehrt, dass $\sum_0^\infty{}^\nu w_\nu$ dann und nur dann convergirt, wenn $\lim_{n=\infty} n \cdot v_n$ eine bestimmte Zahl ist. Letzteres ist aber nur in der Weise möglich, dass:

$$(34) \qquad \lim_{n=\infty} n \cdot v_n = 0.$$

Denn die Beziehung $\lim_{n=\infty} n \cdot v_n = a$, wo $|a| > 0$, würde ja die Divergenz der Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu v_\nu$ zur Folge haben. Hieraus folgt also, dass in der That:

$$(35) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu w_\nu = \sum_0^\infty{}^\nu v_\nu \text{ d. h. } = \sum_0^\infty{}^{\mu,\nu} (v_{\mu+\nu} - v_{\mu+\nu+1})$$

wird, wenn $\sum_0^\infty{}^\nu w_\nu$ überhaupt convergirt. Um Beispiele dieser Art zu gewinnen hat man also nur v_ν der Bedingung (34) gemäss zu wählen (z. B. $v_\nu = \frac{1}{(\nu+1)^2}$, $v_\nu = \frac{(-1)^\nu}{(\nu+2)\lg(\nu+2)}$).

Da $\lim_{n=\infty} n \cdot v_n$ auch nicht $= +\infty$ bezw. $= -\infty$ sein kann (weil sonst wiederum $\sum_0^\infty{}^\nu v_\nu$ divergiren müsste), so erkennt man zunächst aus Gl. (33), dass $\sum_0^\infty{}^\nu w_\nu$ in keinem Falle eigentlich divergiren kann.

Im übrigen bleibt nur noch die Möglichkeit offen, dass $\lim_{n=\infty}\inf n \cdot v_n$ und $\lim_{n=\infty}\sup n \cdot v_n$ verschieden ausfallen. In diesem Falle oscillirt dann die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu$ nach Gl. (33) in den Grenzen:

$$(36)\qquad \sum_0^\infty{}_\nu\, v_\nu - \lim_{n=\infty}\sup n \cdot v_n \quad \text{und:}\quad \sum_0^\infty{}_\nu\, v_\nu - \lim_{n=\infty}\inf n \cdot v_n.$$

(Beispiele. Man setze:

$$v_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu+1}, \quad \text{also:}\quad u_\mu^{(\nu)} = (-1)^{\mu+\nu}\left(\frac{1}{\mu+\nu+1} + \frac{1}{\mu+\nu+2}\right).$$

Alsdann wird:

$$\lim_{n=\infty}\inf n \cdot v_n = -1, \quad \lim_{n=\infty}\sup n \cdot v_n = +1, \quad \text{und da:}$$

$$\sum_0^\infty{}_\nu\, v_\nu = \sum_0^\infty{}_\nu\, \frac{(-1)^\nu}{\nu+1} = \lg 2,$$

so ergeben sich: $(\lg 2 - 1)$ und $(\lg 2 + 1)$ als Unbestimmtheitsgrenzen von $\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu$.

Setzt man dagegen:

$$v_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\sqrt{\nu+1}}, \quad \text{also:}\quad u_\mu^{(\nu)} = (-1)^{\mu+\nu}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu+\nu+1}} + \frac{1}{\sqrt{\mu+\nu+2}}\right),$$

so wird: $\lim_{n=\infty}\inf n \cdot v_n = -\infty$, $\lim_{n=\infty}\sup n \cdot v_n = +\infty$, und die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu$ oscillirt somit in den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$).

5. Es verdient ausdrücklich hervorgehoben zu werden, dass die bei der Formulirung des Satzes in Art. 3 gemachte Einschränkung, welche sich auf die Endlichkeit der Zeilen- und Colonnen-Summen bezieht, nicht etwa lediglich der Beweisführung zu Liebe eingeführt wurde: dieselbe bildet vielmehr eine wesentliche Voraussetzung für die Gültigkeit jenes Satzes, d. h. der letztere kann thatsächlich hinfällig werden, wenn die fragliche Bedingung nicht erfüllt ist.

Man kann dies in sehr einfacher Weise aus der folgenden Ueberlegung ersehen. Es sei $\sum_0^\infty {}^{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = S$ irgend eine convergente Doppelreihe, für welche die Beziehung besteht: $\sum_0^\infty {}^{\nu}\, w_\nu = S$. Man bilde nun aus dieser Doppelreihe eine neue, indem man die Terme der ersten Zeile, also die $u_\mu^{(0)}$ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots)$, durch $u_\mu^{(0)} + v_\mu$, die der zweiten, also die $u_\mu^{(1)}$, durch $u_\mu^{(1)} - v_\mu$ ersetzt, wo die v_μ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots)$ eine nach Belieben zu wählende Zahlenfolge bedeuten. Man erhält auf diese Weise das folgende Schema:

$$
(37)\quad \begin{cases}
(u_0^{(0)}+v_0)+(u_1^{(0)}+v_1)+\ldots+(u_{\nu-1}^{(0)}+v_{\nu-1})+(u_\nu^{(0)}+v_\nu)+\ldots \\
+(u_0^{(1)}-v_0)+(u_1^{(1)}-v_1)+\ldots+(u_{\nu-1}^{(1)}-v_{\nu-1})+(u_\nu^{(1)}-v_\nu)+\ldots \\
+\ u_0^{(2)} \qquad + u_1^{(2)} \qquad +\ldots+ u_{\nu-1}^{(2)} \qquad + u_\nu^{(2)} \qquad +\ldots \\
+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+\ u_0^{(\nu)} \qquad + u_1^{(\nu)} \qquad +\ldots+ u_{\nu-1}^{(\nu)} \qquad + u_\nu^{(\nu)} \qquad +\ldots \\
+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases}
$$

und erkennt unmittelbar, dass auch diese Doppelreihe gegen die Summe S convergirt.

Bezeichnet man sodann die Diagonal-Summen dieses Schema's mit w'_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$, so wird:

$$
(38)\quad \begin{cases}
w'_0 = u_0^{(0)} + v_0 \\
w'_\nu = u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu-1)} + \ldots + u_{\nu-2}^{(2)} + (u_{\nu-1}^{(1)} - v_{\nu-1}) + (u_\nu^{(0)} + v_\nu) \quad (\nu \geqq 1) \\
 = w_\nu - v_{\nu-1} + v_\nu
\end{cases}
$$

und daher:

$$
(39)\qquad \sum_0^n {}^{\nu}\, w'_\nu = \sum_0^n {}^{\nu}\, w_\nu + v_n.
$$

Ist nun $\lim_{n=\infty} v_n = v$ endlich und von Null verschieden, so wird nach Gl. (34):

$$
(40)\qquad \sum_0^\infty {}^{\nu}\, w'_\nu = S + v,
$$

d. h. die Reihe $\sum_0^\infty {}_\nu\, w'_\nu$ bleibt zwar convergent, ihre Summe ist aber verschieden von derjenigen der betreffenden Doppelreihe. (Beispiel: $v_\nu = 1$).

Ist dagegen $\lim_{n=\infty} v_n = +\infty$ oder $= -\infty$, so lehrt Gl. (34), dass die Reihe $\sum_0^\infty {}_\nu\, w'_\nu$ eigentlich divergent wird. (Beispiel: $v_\nu = \nu$).

Die Reihe $\sum_0^\infty {}_\nu\, w'_\nu$ verliert also hier thatsächlich jene Eigenschaften, welche ihr nach dem Satze des Art. 3 zukommen, falls die Zeilen- und Colonnen-Summen durchweg endlich bleiben.

§ 4. Absolut convergente Doppelreihen. — Identität zwischen absoluter und unbedingter Convergenz.

1. Die aus den Termen $u_\mu^{(\nu)} \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$ gebildete Doppelreihe heisst absolut convergent, wenn die Doppelreihe der $|u_\mu^{(\nu)}|$ convergirt.

Um vor allem nachzuweisen, dass eine in diesem Sinne absolut convergente Doppelreihe überhaupt convergirt, werde gesetzt:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \quad |u_0^{(0)}| + |u_1^{(0)}| + \ldots + |u_\mu^{(0)}| \\ + |u_0^{(1)}| + |u_1^{(1)}| + \ldots + |u_\mu^{(1)}| \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + |u_0^{(\nu)}| + |u_1^{(\nu)}| + \ldots + |u_\mu^{(\nu)}| \end{array} \right\} = \bar{S}_\mu^{(\nu)},$$

während $S_\mu^{(\nu)}$ wiederum die entsprechende Summe der $u_\mu^{(\nu)}$ bezeichnen mag. Da allgemein:

$$\left|\sum u_\mu^{(\nu)}\right| \leq \sum \left|u_\mu^{(\nu)}\right|$$

(wobei sich die Summation links und rechts über die nämlichen Werthe von μ, ν zu erstrecken hat), so hat man:

$$(2) \qquad \left| S_{m+\varrho}^{(n+0)} - S_m^{(n)} \right| \leq \bar{S}_{m+\varrho}^{(n+0)} - \bar{S}_m^{(n)},$$

sodass gleichzeitig mit $\lim_{m=\infty, n=\infty} \bar{S}_m^{(n)}$ stets auch $\lim_{m=\infty, n=\infty} S_m^{(n)}$ einen bestimmten Werth besitzt, also mit der Doppelreihe der $|u_\mu^{(\nu)}|$ stets auch diejenige der $u_\mu^{(\nu)}$ convergirt.

2. Solche absolut convergente zeigen ein ganz analoges Verhalten, wie convergente Doppelreihen mit positiven Gliedern. Insbesondere gilt der Satz:

Ist die Doppelreihe der $u_\mu^{(\nu)}$ **absolut** convergent und:

$$(3) \qquad \sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = S,$$

so convergirt auch jede einzelne Zeile (Colonne) und die Reihe der Zeilen-Summen (Colonnen-Summen) **absolut,** und man hat:

$$(4) \quad \sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)} = S \quad \text{(Reihe der Zeilen-Summen)}$$

$$(5) \quad \sum_0^\infty{}_\mu \sum_0^\infty{}_\nu\, u_\mu^{(\nu)} = S \quad \text{(Reihe der Colonnen-Summen).}$$

Ebenso convergirt die Reihe der Diagonalen **absolut** und zwar auch dann, wenn man die einzelnen Terme $u_\mu^{(\nu)}$ als Reihenglieder auffasst, und man hat:

$$(6) \quad \sum_0^\infty{}_\nu \left(u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu-1)} + \ldots + u_\nu^{(0)}\right) = S \quad \text{(Reihe der Diagonalen).}$$

Beweis. Da nach Voraussetzung die Doppelreihe der $|u_\mu^{(\nu)}|$ convergirt, so convergirt in dem Schema der $|u_\mu^{(\nu)}|$ jede Zeile und Colonne, die Reihe der Zeilen- und der Colonnen-Summen und die Reihe der Diagonalen. In Folge dessen ist aber in dem Schema der $u_\mu^{(\nu)}$ jede Zeile und Colonne, die Reihe der Zeilen- uud der Colonnen-Summen und die Reihe der Diagonalen **absolut** convergent (auch wenn man durchweg die einzelnen Terme $u_\mu^{(\nu)}$ als Reihenglieder auffasst).

Es handelt sich also nur noch darum zu zeigen, dass die betreffenden Reihen sämmtlich die Summe S besitzen. Für die Reihe der Diagonalen (Gl. (6)) folgt dies aber unmittelbar aus dem Satze in Art. 3 des vorigen Paragraphen.

Die Gültigkeit der Gleichungen (4) und (5) ergiebt sich dann schliesslich, indem man einen bekannten Satz[1]) über absolut convergente einfach-unendliche Reihen auf die Reihe (6) anwendet, nämlich: Vertheilt man die Glieder einer absolut convergenten Reihe mit der Summe S in unendlich viele Reihen, so ist jede derselben (absolut) convergent und die aus ihren Summen gebildete Reihe convergirt gleichfalls gegen die Summe S.

3. Der im vorigen Artikel bewiesene Satz lässt sich ohne weiteres in folgender Weise umkehren bezw. verallgemeinern:

Von den **vier** Gleichungen:

$$(7)\quad \begin{cases} \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu,\nu}\, u_{\mu}^{(\nu)} = S, \quad \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\, u_{\mu}^{(\nu)} = S, \quad \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu} \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\, u_{\mu}^{(\nu)} = S, \\ \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \left(u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu-1)} + \ldots + u_{\nu}^{(0)}\right) = S \end{cases}$$

zieht **jede** einzelne **die drei anderen** nach sich, wenn die in der **Voraussetzung** auftretende Reihe bei Vertauschung der $u_{\mu}^{(\nu)}$ mit ihren absoluten Beträgen convergent bleibt.

Aus der letzteren Annahme folgt nämlich (nach dem Satze am Schlusse von § 3, Art. 1), dass die Doppelreihe der $|u_{\mu}^{(\nu)}|$ convergent, also diejenige der $u_{\mu}^{(\nu)}$ absolut convergent ist. Sodann ergiebt sich aber alles weitere aus dem Satze des vorigen Artikels.

In diesem Satze ist offenbar der folgende von Cauchy herrührende[2]), als Theil enthalten, nämlich:

---

[1]) s. z. B. Stolz, Allg. Arithmetik, Bd. 1, S. 242.

[2]) Analyse algébrique, p. 541.

Convergiren alle **Zahlen** des Schema's:

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} \quad u_0^{(0)} + u_1^{(0)} + \ldots + u_\mu^{(0)} + \ldots \\ + u_0^{(1)} + u_1^{(1)} + \ldots + u_\mu^{(0)} + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu)} + \ldots + u_\mu^{(\nu)} + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

und bilden die **Zeilen-Summen** eine convergente Reihe mit der Summe S, so gilt das Gleiche von den einzelnen **Colonnen** und der Reihe der **Colonnen-Summen**, falls die vorausgesetzten Convergenz-Eigenschaften bei Vertauschung der $u_\mu^{(\nu)}$ mit ihren absoluten Beträgen erhalten bleiben.

4. Eine convergente Doppelreihe heisst **unbedingt** convergent, wenn jede durch Umordnung der Glieder daraus hervorgehende Doppelreihe gegen dieselbe Summe convergirt, wie die ursprüngliche. Dabei betrachten wir die Doppelreihe $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, v_\mu^{(\nu)}$ dann und nur dann als durch „Umordnung" aus der Doppelreihe $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)}$ hervorgegangen, wenn jedem Terme $u_\mu^{(\nu)}$ ein ihm gleicher $v_\varrho^{(\sigma)}$ entspricht und umgekehrt. Es muss also jeder Term, der in dem Schema:

$$\begin{array}{cccc} u_0^{(0)} & u_1^{(0)} & u_2^{(0)} & \ldots \\ u_0^{(1)} & u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & \ldots \\ u_0^{(2)} & u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

an einer bestimmten endlichen Stelle erscheint, auch in dem Schema:

$$\begin{array}{cccc} v_0^{(0)} & v_1^{(0)} & v_2^{(0)} & \ldots \\ v_0^{(1)} & v_1^{(1)} & v_2^{(1)} & \ldots \\ v_0^{(2)} & v_1^{(2)} & v_2^{(2)} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

eine bestimmt endliche Stelle innehaben und umgekehrt.

Alsdann gilt der Satz:

Jede **absolut** convergente Doppelreihe ist **unbedingt** convergent.

Beweis. Es werde das allgemeine Glied der ursprünglichen Doppelreihe mit $u_\mu^{(\nu)}$, ihre Summe mit S, dasjenige der umgeordneten mit $v_\mu^{(\nu)}$ bezeichnet. Dann folgt zunächst, dass auch die Doppelreihe der $v_\mu^{(\nu)}$ convergirt und zwar absolut. Denn setzt man etwa: $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu} |u_\mu^{(\nu)}| = \bar{S}$, so muss jede begrenzte Doppelsumme, welche aus den Termen $|v_\mu^{(\nu)}|$ gebildet wird, unterhalb $\bar{S}$ bleiben, sodass also $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu} |v_\mu^{(\nu)}|$ convergirt und $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu} v_\mu^{(\nu)}$ absolut convergirt. Bezeichnet man die Summe der letzteren Doppelreihe mit T, so wird nach dem Satze des Art. 2 (Gl. (6)):

$$
(9) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_0^\infty{}_\nu \left(u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu-1)} + \ldots + u_\nu^{(0)}\right) = S \\ &\sum_0^\infty{}_\nu \left(v_0^{(\nu)} + v_1^{(\nu-1)} + \ldots + v_\nu^{(0)}\right) = T \end{aligned} \right.
$$

Jede dieser einfach-unendlichen Reihen ist absolut convergent, auch wenn man die einzelnen Terme $u_\mu^{(\nu)}$ bezw. $v_\mu^{(\nu)}$ als Reihenglieder auffasst. Die zweite stellt dann aber lediglich eine Umordnung der ersten dar, und somit ergiebt sich:

$$
(10) \qquad T = S,
$$

womit die ausgesprochene Behauptung bewiesen ist.

5. Um auch die Umkehrung des letzten Satzes beweisen zu können, schicken wir die folgende Bemerkung voraus. Eine einfach-unendliche Zahlenfolge:

$$
u_1, \; u_2, \; u_3, \; \ldots \ldots
$$

lässt sich auf unendlich viele Arten als zweifach-unendliche Folge anordnen, am einfachsten etwa in folgender Weise:

man theile jene Folge in Gruppen, welche der Reihe nach aus $1, 3, 5, \ldots (2\nu + 1), \ldots$ Termen bestehen, sodass also die ersten ν Gruppen zusammen $(\nu + 1)^2$ Terme enthalten, und ordne sodann diese Gruppe zu einem unbegrenzt fortsetzbaren quadratischen Schema, wie folgt:

$$
(10) \quad \left\{ \begin{array}{ll|llllll}
(1) & \rightarrow & u_1 & u_4 & u_9 & \cdot\ \cdot & u_{(\nu+1)^2} & \cdot\ \cdot \\
 & & & \uparrow & \uparrow & \cdot\ \cdot & \uparrow & \cdot\ \cdot \\
(2) & \rightarrow & u_2 \rightarrow & u_3 & u_8 & \cdot\ \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot \\
 & & & & \uparrow & \cdot\ \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot \\
(3) & \rightarrow & u_5 \rightarrow & u_6 \rightarrow & u_7 & \cdot\ \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot\ \cdot \\
 & & & & & & \uparrow & \cdot\ \cdot \\
(\nu+1) & \rightarrow & u_{\nu^2+1} \rightarrow & u_{\nu^2+2} \rightarrow & u_{\nu^2+3} \rightarrow & \cdot\ \cdot & u_{\nu^2+\nu+1} & \cdot\ \cdot \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array} \right.
$$

Bezeichnet man jetzt mit $s_\mu^{(\nu)}$ die Summe aller derjenigen Terme, welche den ersten ν Zeilen und μ Colonnen dieses Schema's angehören, so hat man speciell:

$$
(11) \qquad s_n^{(n)} = \sum_1^{n^2}{}_{\nu}\, \mu_\nu
$$

Wenn nun $\lim\limits_{n=\infty} s_n^{(n)}$ einen bestimmten Werth besitzt, so folgt daraus freilich noch nicht das gleiche für $\lim\limits_{m=\infty,\, n=\infty} s_m^{(n)}$: d. h. man kann hieraus noch keinen Schluss auf die Convergenz derjenigen Doppelreihe ziehen, welche durch das Schema (10) definirt wird.

Wenn dagegen $\lim\limits_{n=\infty} s_n^{(n)} = \pm\infty$ ist, oder wenn $\lim\limits_{n=\infty} \inf s_n^{(n)}$ und $\lim\limits_{n=\infty} \sup s_n^{(n)}$ verschieden ausfallen, so folgt mit Sicherheit, dass kein bestimmter $\lim\limits_{m=\infty,\, n=\infty} s_m^{(n)}$ existirt, und dass somit die Doppelreihe (10) unter keinen Umständen convergiren kann.

6. Mit Benützung dieser Bemerkung und des nämlichen Grundgedankens, welchen Riemann beim Beweise eines bekannten Satzes über die bedingte Convergenz einer nicht-absolut convergenten (einfachen) Reihe verwendet hat, können wir jetzt den folgenden Satz beweisen:

Eine convergente Doppelreihe, welche **nicht absolut** convergirt, lässt sich stets durch Umordnung **divergent** machen. Sie kann also **keinesfalls unbedingt** convergiren.

Beweis. Bezeichnet man wiederum das allgemeine Glied der betrachteten Doppelreihe mit $u_\mu^{(\nu)}$, so lässt sich die Gesammtheit dieser Glieder durch Anordnung nach „Diagonalen" in Form der einfach-unendlichen Reihe anschreiben:

$$(12) \quad u_0^{(0)} + u_0^{(1)} + u_1^{(0)} + \ldots + u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu-1)} + \ldots + u_\nu^{(0)} + \ldots$$

Alsdann folgt zunächst aus der Voraussetzung, dass diese Reihe sowohl positive, als negative Glieder in unbegrenzter Anzahl enthalten muss, und dass die Reihe der positiven und diejenige der negativen Terme einzeln divergiren: denn in jedem anderen Falle würde die vorgelegte Doppelreihe, wie leicht zu sehen, absolut convergiren oder eigentlich divergiren. Es werde die Reihe der in (12) enthaltenen positiven Glieder mit:

$$a_1, \; a_2, \; a_3, \; \ldots \qquad (A),$$

die der negativen mit:

$$-b_1, \; -b_2, \; -b_3, \; \ldots \qquad (B)$$

bezeichnet. Nun entnehme man zunächst der Reihe (A) so viele positive Glieder, dass ihre Summe $\geqq 1$ ausfüllt, und füge nöthigenfalls noch so viele ebensolche Glieder hinzu, dass ihre Gesammt-Anzahl eine Quadratzahl: n_1^2 wird. Ordnet man dann diese n_1^2 Glieder nach dem zuvor angegebenen Verfahren zu einem quadratischen Schema, so gilt also für dasselbe die Beziehung:

$$(13) \qquad s_{n_1}^{(n_1)} \geqq 1.$$

Jetzt füge man zu der Summe $s_{n_1}^{(n_1)}$ so viele negative Glieder aus der Reihe (B), dass die Gesammt-Summe $\leqq -1$ wird, und nöthigenfalls weitere negative Glieder, bis die Gesammt-Anzahl wiederum eine Quadratzahl: n_2^2 wird (wo also $n_2 \geqq n_1 + 1$). Durch entsprechende Anreihung dieser Terme kann man das quadratische Schema zu einem solchen von n_2^2 Gliedern vergrössern und hat sodann:

$$s_{n_2}^{(n_2)} \leqq -1. \tag{14}$$

In analoger Weise bringe man dasselbe durch Hinzufügung von positiven Termen auf n_3^2 Glieder, sodass:

$$s_{n_3}^{(n_3)} \geqq 2, \tag{15}$$

alsdann durch Hinzufügung von negativen Termen auf n_4^2 Glieder, so dass:

$$s_{n_4}^{(n_4)} \leqq -2. \tag{16}$$

Dieses Verfahren lässt sich in der Weise fortsetzen, dass nach $(2\nu - 1)$ solchen Operationen ein quadratisches Schema von $n_{2\nu-1}^2$ Gliedern mit der Summe resultirt:

$$s_{n_{2\nu-1}}^{(n_{2\nu-1})} \geqq \nu, \tag{17}$$

nach der nächsten ($(2\nu)^{\text{ten}}$) Operation ein solches von $n_{2\nu}^2$ Gliedern mit der Summe:

$$s_{n_{2\nu}}^{(n_{2\nu})} \leqq -\nu. \tag{18}$$

Bei unbegrenzter Fortsetzung dieser Methode entsteht also aus den Termen $u_\mu^{(\nu)}$ eine Doppelreihe, deren Summe in den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ oscillirt.

7. Aus dem eben bewiesenen Satze geht aber ohne weiteres der folgende hervor:

Jede **unbedingt** convergente Doppelreihe ist auch **absolut** convergent.

Und es ergiebt sich sodann mit Berücksichtigung von Art. 2:

Ist die Doppelreihe der $u_\mu^{(\nu)}$ **unbedingt** convergent, so convergirt auch jede **Zeile (Colonne),** desgleichen die aus den **Zeilen-Summen (Colonnen-Summen)** gebildete Reihe, und die Summe der letzteren ist gleich der Summe der Doppelreihe, d. h. man hat:

$$(19) \qquad \sum_{\mu,\nu} u_\mu^{(\nu)} = \sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu u_\mu^{(\nu)} = \sum_0^\infty{}_\mu \sum_0^\infty{}_\nu u_\mu^{(\nu)}.$$

Absolute und unbedingte Convergenz erweisen sich also schliesslich als völlig gleichwerthig.

8. Eine Doppelreihe, welche convergirt, ohne **absolut** zu convergiren, ist also nur **bedingt** convergent: sie kann, wie der Beweis in Art. 6 zeigt, durch blosse Umordnung der Terme stets in eine divergente Doppelreihe verwandelt werden. Zu den nur bedingt convergirenden Doppelreihen gehören z. B. eo ipso alle diejenigen, bei denen irgend eine Zeile oder Colonne divergirt; ferner die in § 3, Art. 4 betrachteten, bei denen die Reihe der Diagonalen divergirt: denn bei einer unbedingt, als absolut convergenten Doppelreihe, muss ja die Reihe der Diagonalen gleichfalls convergiren (s. Art. 2). Andere Beispiele bedingt convergenter Doppelreihen giebt Herr Stolz in dem oben citirten Aufsatze.[1])

Man bemerke, dass auch bei einer nur bedingt convergirenden Doppelreihe, der Ausdruck $\lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ bei jedem beliebigen simultanen Grenzübergange $\lim \mu = \infty$, $\lim \nu = \infty$ eine einzige bestimmte Zahl vorstellt, und dass dieser Grenzwerth bezw. seine Existenz nur dadurch alterirt werden kann, dass die Terme $a_\mu^{(\nu)}$ von vornherein in eine andere Anordnung gebracht werden.

Es erschien mir nützlich, diesen Punkt nochmals ausdrücklich hervorzuheben, da über den Begriff der bedingten Convergenz einer Doppelreihe noch keineswegs durchweg vollständige Klarheit herrscht.

---

[1]) a. a. O. p. 160. 161.

So kommt z. B. C. Jordan in der neuen Auflage seines Cours d'analyse[1]) auf Grund einer, wie mir scheint, durchaus unzulänglichen Definition der Convergenz einer Doppelreihe zu dem paradoxen Ergebnisse, dass es überhaupt ausschliesslich **absolut** convergente Doppelreihen giebt,[2]) und er erblickt darin einen fundamentalen Unterschied zwischen den einfach- und den mehrfah-unendlichen Reihen.[3])

Auf der anderen Seite hat man den Begriff der bedingten Convergenz und damit überhaupt denjenigen der Convergenz einer Doppelreihe auch häufig zu weit gefasst, indem man eine Doppelreihe schon als (bedingt) convergent bezeichnete, wenn $S_\mu^{(\nu)}$ bei irgend einem speciellen Grenzübergange (etwa für $\mu = \varphi(\varrho)$, $\nu = \psi(\varrho)$ und $\lim_{\varrho=\infty} \varphi(\varrho) = \infty$, $\lim_{\varrho=\infty} \psi(\varrho) = \infty$) einen bestimmten Grenzwerth besitzt.[4]) Diese an und für sich offenbar zulässige Erweiterung des Convergenz-Begriffes einer Doppelreihe erweist sich schon aus dem Grunde als wenig empfehlenswerth, weil bei derselben die Möglichkeit, eine Doppelreihe durch ein einfaches Symbol von der Form $\sum_0^\infty {}_{\mu,\nu}\, a_\mu^{(\nu)}$ zu bezeichnen, ausgeschlossen erscheint und somit eine der wesentlichsten Analogien zwischen einer Doppelreihe und einer einfachen Reihe verloren gehen würde. Im übrigen handelt es sich in dem angedeuteten Falle lediglich um die Existenz eines **ein**fachen Grenzwerthes von der Form:

---

[1]) Paris 1893—96.

[2]) a. a. O. T. I. p. 302.

[3]) T. II. p. 88. Ueberträgt man die viel zu enge Jordan'sche Definition der Convergenz einer Doppelreihe mutatis mutandis auf einfache Reihen, so gelangt man vielmehr naturgemäss zu dem Schlusse, dass auch eine einfache Reihe nicht anders als absolut convergiren kann!

[4]) vgl. z. B. Eisenstein, Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen. — Crelle's Journal, Bd. 35, p. 172 ff.

$$\lim_{\varrho=\infty} \sum_0^{\gamma(\varrho)}{}_\nu \sum_0^{\varphi(\varrho)}{}_\mu\, a_\mu^{(\nu)},$$

also schliesslich gar nicht um die Convergenz einer Doppelreihe, sondern nur um diejenige einer aus den Termen $a_\mu^{(\nu)}$ in bestimmter Ordnung zu bildenden einfach-unendlichen Reihe.

§ 5. Convergenz- und Divergenz-Kriterien für Doppelreihen mit positiven Gliedern.

1. Nach dem bisher gesagten erfordert die Feststellung der unbedingten Convergenz einer beliebigen Doppelreihe lediglich die Beurtheilung der Convergenz oder Divergenz einer aus lauter Termen $a_\mu^{(\nu)} \geqq 0$ gebildeten Doppelreihe. Hierzu könnte man die letztere nach Diagonalen ordnen und auf diese Weise die fragliche Untersuchung auf diejenige der einfach-unendlichen Reihe: $\sum_0^\infty{}_\nu (a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu-1)} + \ldots + a_\nu^{(0)})$ zurückführen (dabei würde es noch freistehen, entweder die Diagonal-Summen $(a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu-1)} + \ldots + a_\nu^{(0)})$ oder die einzelnen $a_\mu^{(\nu)}$ als Glieder dieser Reihe aufzufassen).

In der Praxis gestaltet sich aber dieses Verfahren nicht nur verhältnissmässig umständlich, sondern es ist zumeist überhaupt nicht möglich, jener Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu (a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu-1)} + \ldots + a_\nu^{(0)})$ mit Hülfe der gewöhnlichen Convergenz- und Divergenz-Kriterien beizukommen. Hiernach erscheint es wünschenswerth, Kriterien zu besitzen, welche gestatten, unmittelbar aus der Beschaffenheit der Reihenglieder $a_\mu^{(\nu)}$ auf die Convergenz oder Divergenz der Doppelreihe zu schliessen.

Bezeichnet man mit $c_\mu^{(\nu)} \geqq 0$ bezw. $d_\mu^{(\nu)} \geqq 0$ das allgemeine Glied einer bereits als convergent bezw. divergent erkannten Doppelreihe, so ist leicht zu ersehen, dass eine beliebig vorgelegte Doppelreihe $\sum_{\mu,\nu} a_\mu^{(\nu)}$ (wo: $a_\mu^{(\nu)} \geqq 0$) allemal

$$(1)\begin{cases}\text{convergirt, wenn: } a_\mu^{(\nu)} \leqq G \cdot c_\mu^{(\nu)} \\ \text{divergirt, wenn: } a_\mu^{(\nu)} \geqq g \cdot d_\mu^{(\nu)}\end{cases} \text{für: } \begin{pmatrix}\mu \geqq m, \nu = 0,1,2,\ldots \\ \nu \geqq n, \mu = 0,1,2,\ldots\end{pmatrix}$$

wo m, n irgend zwei feste ganze Zahlen (incl. Null), g und G zwei beliebige positive Zahlen bedeuten. Denn, setzt man:

$$(2)\qquad \sum_0^n{}_\nu \sum_0^m{}_\mu\, a_\mu^{(\nu)} = s_m^{(n)},$$

so ist im ersten Falle:

$$(3a)\qquad s_{m+\varrho}^{(n+\sigma)} - s_m^{(n)} \leqq G \cdot \left\{ \sum_0^{n+\sigma}{}_\nu \sum_0^{m+\varrho}{}_\mu\, c_\mu^{(\nu)} - \sum_0^n{}_\nu \sum_0^m{}_\mu\, c_\mu^{(\nu)} \right\},$$

im zweiten:

$$(3b)\qquad s_{m+\varrho}^{(n+\sigma)} - s_m^{(n)} \geqq g \cdot \left\{ \sum_0^{n+\sigma}{}_\nu \sum_0^{m+\varrho}{}_\mu\, c_\mu^{(\nu)} - \sum_0^n{}_\nu \sum_0^m{}_\mu\, c_\mu^{(\nu)} \right\},$$

woraus die Richtigkeit der obigen Behauptung ohne weiteres hervorgeht.

2. Es kommt somit lediglich darauf an, die nöthigen $c_\mu^{(\nu)}$ bezw. $d_\mu^{(\nu)}$ zur Verfügung zu haben. Um sich solche in beliebiger Anzahl zu verschaffen, könnte man davon ausgehen, dass sich das allgemeine Glied $u_\mu^{(\nu)}$ jeder beliebigen Doppelreihe in die Form setzen lässt (§ 2, Gl. (8)):

$$(4)\qquad u_\mu^{(\nu)} = (S_\mu^{(\nu)} - S_\mu^{(\nu-1)}) - (S_{\mu-1}^{(\nu)} - S_{\mu-1}^{(\nu-1)})$$

und dass hierbei die $u_\mu^{(\nu)}$ durchweg positiv ausfallen, wenn:

1) $S_\mu^{(\nu)}$ mit μ, ν monoton zunimmt;

2) $S_\mu^{(\nu)} - S_\mu^{(\nu-1)} > S_{\mu-1}^{(\nu)} - S_{\mu-1}^{(\nu-1)}$,

(d. h. es müssen auch die Differenzen $(S_\mu^{(\nu)} - S_\mu^{(\nu-1)})$ bei wachsenden Werthen von μ monoton zunehmen).

Wird im übrigen $S_\mu^{(\nu)}$ so angenommen, dass $\lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ einen bestimmten Werth hat, so ist dann $u_\mu^{(\nu)}$ das allgemeine Glied einer convergenten Doppelreihe, dagegen dasjenige einer divergenten, wenn $\lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)} = \infty$.

Da es sich indessen hier nicht darum handelt, die allgemeinsten Formen der aus Ungl. (1) resultirenden Convergenz- und Divergenz-Kriterien aufzustellen, sondern lediglich darum, brauchbare Kriterien von einiger Allgemeinheit zu gewinnen, so erscheint es einfacher, mit Benützung bekannter Sätze aus der Convergenz-Theorie der einfach-unendlichen Reihen einen der folgenden beiden Wege einzuschlagen: nämlich entweder aus einfach-unendlichen Reihen von bekannter Convergenz bezw. Divergenz durch Multiplication Doppelreihen mit gleichfalls unmittelbar zu erkennender Convergenz bezw. Divergenz zu bilden; oder jene einfach-unendlichen Reihen durch passende Methoden in Doppelreihen umzuformen.

3. Die erste der eben angedeuteten Methoden beruht auf der Identität:

$$(5)\qquad \sum_0^m{}^{\mu}\, b_\mu \cdot \sum_0^n{}^{\nu}\, b'_\nu = \sum_0^m{}^{\nu} \sum_0^n{}^{\mu}\, b_\mu \cdot b'_\nu = \sum_0^{\mu,\nu}{}^{\mu,\nu}\, b_\mu \cdot b'_\nu$$

Versteht man hier unter b_μ, b'_ν irgend welche positive Zahlen, so hat man also:

$$(6)\qquad \lim_{m=\infty,\, n=\infty} \sum_0^{m,n}{}^{\mu,\nu}\, b_\mu \cdot b'_\nu = \sum_0^\infty{}^{\mu}\, b_\mu \cdot \sum_0^\infty{}^{\nu}\, b'_\nu,$$

und daraus folgt, dass die Doppelreihe mit dem allgemeinen Gliede $(b_\mu \cdot b'_\nu)$ convergirt, wenn die Reihen $\sum_0^\infty{}^{\mu}\, b_\mu$, $\sum_0^\infty{}^{\nu}\, b'_\nu$ beide convergiren; dass dieselbe dagegen divergirt, wenn mindestens eine jener beiden Reihen divergirt.

Bezeichnet man also mit c_ν das allgemeine Glied einer convergenten, mit d_ν dasjenige einer divergenten einfach-unendlichen Reihe (mit positiven Gliedern), so ergiebt sich mit Berücksichtigung von Ungl. (1), dass eine beliebig vorgelegte Doppelreihe $\sum_0^\infty{}^{\mu,\nu}\, a_\mu^{(\nu)}$ (mit nicht-negativen Gliedern) allemal

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{ll}\text{convergirt, wenn: } a_\mu^{(\nu)} \leqq G \cdot c_\mu \cdot c_\nu \\ \text{divergirt, wenn: } a_\mu^\nu \geqq g \cdot c_\mu \cdot d_\nu \text{ oder: } \geqq g \cdot d_\mu \cdot c_\nu\end{array}\right\}$$

$$\text{für: } \begin{pmatrix}\mu \geqq m, \ \nu = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu \geqq n, \ \mu = 0, 1, 2, \ldots\end{pmatrix}$$

Oder anders geschrieben, wenn man $c_\mu = C_\mu^{-1}$, $d_\nu = D_\nu^{-1}$ setzt: Die Doppelreihe der $a_\mu^{(\nu)}$

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{ll}\text{convergirt, wenn: } C_\mu \cdot C_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq G \\ \text{divergirt, wenn: } C_\mu \cdot D_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} \geqq g \text{ oder: } D_\mu \cdot C_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} \geqq g\end{array}\right\}$$

$$\text{für: } \begin{pmatrix}\mu \geqq m, \ \nu = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu \geqq n, \ \mu = 0, 1, 2, \ldots\end{pmatrix}$$

Um zunächst das vorstehende Convergenz-Kriterium noch auf eine andere Form zu bringen, zerlegen wir die betreffende Bedingung in die folgenden drei Theil-Bedingungen:

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{ll} C_\mu \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq \dfrac{G}{C_\nu} & \text{für: } \mu \geqq m, \ \nu < n, \\ C_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq \dfrac{G}{C_\mu} & \quad " \quad \mu < m, \ \nu \geqq n, \\ C_\mu \cdot C_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq G & \quad " \quad \mu \geqq m, \ \nu \geqq n. \end{array}\right.$$

Da man hier offenbar m, n auch durch jedes beliebige Zahlenpaar $m' > m$, $n' > n$ ersetzen darf, so ziehen diese drei Ungleichungen stets die folgenden nach sich:

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{lll} \text{(a)} & \lim\limits_{\mu=\infty} C_\mu \cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty\,^{1)} & \text{für jedes endliche } \nu, \\ \text{(b)} & \lim\limits_{\nu=\infty} C_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty & \text{für jedes endliche } \mu, \\ \text{(c)} & \lim\limits_{\mu=\infty, \nu=\infty} C_\mu \cdot C_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty. & \end{array}\right.$$

---

[1]) Abgekürzte Schreibweise für:

$$\limsup_{\mu=\infty} C_\mu \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq A,$$

wo A eine endliche Zahl bedeutet.

Umgekehrt würde aus diesen letzteren Ungleichungen zunächst folgen, dass:

$$(11)\left\{\begin{array}{lll} C_\mu \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq g^{(\nu)} & \text{etwa für:} & \mu \geqq m_1,\ \nu = 0, 1, 2, \ldots, \\ C_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq g_\mu & \quad " \quad " & \nu \geqq n_1,\ \mu = 0, 1, 2, \ldots, \\ C_\mu \cdot C_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq g & \quad " \quad " & \mu \geqq m_2,\ \nu \geqq n_2, \end{array}\right.$$

wo $g^{(\nu)}$, g_μ, g bestimmte positive Zahlen bedeuten. Bezeichnet man nun mit m bezw. n die grössere der beiden Zahlen m_1 und m_2, bezw. n_1 und n_2, so folgt a fortiori:

$$(12)\left\{\begin{array}{ll} C_\mu \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq \dfrac{g^{(\nu)} \cdot C_\nu}{C_\nu} & \text{für: } \mu \geqq m,\ \nu < n, \\ C_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq \dfrac{g_\mu \cdot C_\mu}{C_\mu} & \quad " \quad \mu < m,\ \nu \geqq n, \\ C_\mu \cdot C_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq g & \quad " \quad \mu \geqq m,\ \nu \geqq n, \end{array}\right.$$

und diese Ungleichungen gehen unmittelbar in die Bedingungen (9) über, wenn man mit G die grösste der Zahlen $g^{(\nu)} \cdot C_\nu$ $(\nu = 0, 1, \ldots n-1)$, $g_\mu \cdot C_\mu$ $(\mu = 0, 1, \ldots m-1)$ und g bezeichnet.

Hienach erweisen sich auch die Bedingungen (10) als hinreichend für die Convergenz der Doppelreihe $\sum_0^\infty {}_{\mu,\nu}\, a_\mu^{(\nu)}$.

Dieselbe ist also beispielsweise convergent, wenn bei irgend einem positiven Werthe von ϱ:

$$(13)\left\{\begin{array}{ll} \lim\limits_{\mu=\infty} \mu^{1+\varrho} \cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty & \text{für jedes endliche } \nu, \\ \lim\limits_{\nu=\infty} \nu^{1+\varrho} \cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty & \text{für jedes endliche } \mu, \\ \lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} (\mu\nu)^{1+\varrho} \cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty. & \end{array}\right.$$

Beachtet man, dass die Bedingungen (10a) und (10b) offenbar nichts anderes enthalten als die Convergenz jeder einzelnen Zeile und Colonne, und dass andererseits die Convergenz jeder Zeile und Colonne eine nothwendige Bedingung für die Convergenz einer Doppelreihe mit nicht-

negativen Gliedern bildet, so kann man dem Kriterium (10) auch die folgende Form geben:

Erfüllt die Doppelreihe $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, a_\mu^{(\nu)}$ (mit nicht-negativen Termen) die **nothwendige** Convergenz-Bedingung, dass jede einzelne Zeile und Colonne convergirt, so ist für deren Convergenz **hinreichend,** wenn:

$$\lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} C_\mu \cdot C_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty. \tag{14}$$

4. Während die auf diesem Wege gewonnenen Convergenz-Kriterien durch passende Wahl der C_μ sich beliebig verschärfen lassen und die analoge Leistungsfähigkeit besitzen, wie die entsprechenden Kriterien für einfach-unendliche Reihen, so erweisen sich die aus Ungl. (7) bezw. (8) resultirenden Divergenz-Kriterien bei näherer Betrachtung als völlig unzulänglich. Die zum Vergleiche herangezogenen Doppelreihen:

$$(15)\left\{\begin{array}{ll} c_0 d_0 + c_1 d_0 + \ldots + c_\mu d_0 + \ldots & c_0 d_0 + c_0 d_1 + \ldots + c_0 d_\mu + \ldots \\ + c_0 d_1 + c_1 d_1 + \ldots + c_\mu d_1 + \ldots & + c_1 d_0 + c_1 d_1 + \ldots + c_1 d_\mu + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + c_0 d_\nu + c_1 d_\nu + \ldots + c_\mu d_\nu + \ldots & + c_\nu d_0 + c_\nu d_1 + \ldots + c_\nu d_\mu + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots & + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

besitzen nämlich offenbar die Eigenschaft, dass alle Colonnen **oder** alle Zeilen divergente Reihen bilden.[1]) Nun ist es aber für die Divergenz einer Doppelreihe mit nicht-negativen Termen schon vollständig hinreichend, wenn auch nur eine einzige Zeile oder Colonne divergirt, wenn also:

$$(16)\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{\mu=\infty} D_\mu \cdot a_\mu^{(\nu)} > 0 \text{ für irgend einen bestimmten Werth } \nu \\ \text{oder:} \\ \lim\limits_{\nu=\infty} D_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} > 0 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \mu. \end{array}\right.$$

---

[1]) Bei einer Doppelreihe mit dem allgemeinen Gliede $d_\mu \cdot d_\nu$ würden sogar alle Zeilen **und** Colonnen divergiren.

Diese Art von Divergenz ist aber im Grunde genommen gar keine Eigenschaft, welche für eine Doppelreihe als solche charakteristisch ist, und zu ihrer etwaigen Feststellung genügen die zur Untersuchung einfach-unendlichen Reihen dienlichen Hülfsmittel.

Der einer Doppelreihe specifisch eigenthümliche Fall von Divergenz tritt vielmehr dann ein, wenn die Doppelreihe divergirt, während alle möglichen Zeilen und Colonnen convergente Reihen bilden. Um sich zunächst von der wirklichen Existenz solcher divergenten Doppelreihen zu überzeugen, betrachte man z. B. die folgende:

$$(17)\quad \begin{cases} \quad(d_0-d_1) \;+(d_1-d_2) \quad +\cdots+(d_\mu-d_{\mu+1}) \quad +\cdots \\ +(d_1-d_2) \;+(d_2-d_3) \quad +\cdots+(d_{\mu+1}-d_{\mu+2}) \;+\cdots \\ +\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +(d_\nu-d_{\nu+1})+(d_{\nu+1}-d_{\nu+2})+\cdots+(d_{\mu+\nu}-d_{\mu+\nu+1})+\cdots \\ +\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

wo $d_\nu \geqq d_{\nu+1}$, $\lim\limits_{\nu=\infty} d_\nu = 0$. Hier besitzen die einzelnen Zeilen und Colonnen der Reihe nach die Summen $d_0, d_1, d_2, \ldots$, während die Doppelreihe gleichzeitig mit der Reihe $\sum\limits_0^\infty{}_\nu\, d_\nu$ divergirt.

Alle divergenten Doppelreihen dieser Art werden offenbar durch kein Kriterium von der Form (16) getroffen. Um hier möglicherweise-wirksame Divergenz-Kriterien zu erhalten, ist es vor allem erforderlich, Vergleichs-Doppelreihen herzustellen, welche selbst den fraglichen Divergenz-Charakter besitzen.

5. Solche Vergleichs-Doppelreihen mit übrigens beliebig-langsamer Divergenz könnte man sich offenbar bei passender Wahl der d_ν auf Grund des Schema's (17) verschaffen. Für den fraglichen Zweck erscheint es indessen noch einfacher, den folgenden Weg vorzuschlagen.

Es bedeute (b_ν) eine beliebige positive Zahlenfolge, so liefert das Schema:

$$(18)\left\{\begin{array}{l} \frac{b_0}{1} + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{3} + \ldots + \frac{b_\mu}{\mu+1} + \ldots \\ + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{3} + \frac{b_3}{4} + \ldots + \frac{b_{\mu+1}}{\mu+2} + \ldots \\ + \frac{b_2}{3} + \frac{b_3}{4} + \frac{b_4}{5} + \ldots + \frac{b_{\mu+2}}{\mu+3} + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{b_\nu}{\nu+1} + \frac{b_{\nu+1}}{\nu+2} + \frac{b_{\nu+2}}{\nu+3} + \ldots + \frac{b_{\mu+\nu}}{\mu+\nu+1} + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

als Diagonal-Summen der Reihe nach die Zahlen: $b_0, b_1, b_2, \ldots$, so dass also die durch das Schema (18) definirte Doppelreihe gleichzeitig mit der Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu\, b_\nu$ convergirt bezw. divergirt. Anders ausgesprochen:

Von den beiden Doppelreihen: $\sum_0^\infty{}^{\mu,\nu} \frac{c_{\mu+\nu}}{\mu+\nu+1}$, $\sum_0^\infty{}^{\mu,\nu} \frac{d_{\mu+\nu}}{\mu+\nu+1}$ convergirt die erste gegen die Summe: $\sum_0^\infty{}^\nu\, c_\nu$, während die zweite divergirt.

Dabei wird offenbar in dem zweiten Falle jede einzelne Zeile und Colonne noch convergiren, wenn nur die d_ν so angenommen werden, dass $\frac{d_\nu}{\nu+1}$ convergirt.

(Beispiel. Man hat für $\varrho > 0$:

$$\sum_0^\infty{}^{\mu,\nu} \frac{1}{(\mu+\nu+1)^{2+\varrho}} = \sum_0^\infty{}^\nu \frac{1}{(\nu+1)^{1+\varrho}} \text{ (convergent)},$$

während $\sum_0^\infty{}^{\mu,\nu} \frac{1}{(\mu+\nu+1)^2}$ divergirt).

6. Das eben gewonnene Resultat könnte selbstverständlich auch zur Bildung neuer Formen von Convergenz-Kriterien dienen. Da dieselben aber, wie leicht erkannt wird, gegenüber den in Art. 3 abgeleiteten keine besondere Vortheile bieten, so mag hier davon abgesehen werden.

Bezüglich der Divergenz bemerke man zunächst, dass offenbar die Doppelreihe mit dem allgemeinen Gliede $\frac{d_{\mu+\nu}}{\mu+\nu}$ a fortiori divergirt und dass dieselbe auch nach Weglassung der ersten n Zeilen und m Colonnen divergent bleibt. Denn summirt man das Schema:

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{d_{m+n}}{m+n} + \frac{d_{m+n+1}}{m+n+1} + \ldots + \frac{d_{m+n+\nu}}{m+n+\nu} + \ldots \\ + \frac{d_{m+n+1}}{m+n+1} + \frac{d_{m+n+2}}{m+n+2} + \ldots + \frac{d_{m+n+\nu+1}}{m+n+\nu+1} + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{d_{m+n+\nu}}{m+n+\nu} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

nach Diagonalen, so resultirt die Reihe:

$$(20)\quad \frac{1}{m+n}\cdot d_{m+n} + \frac{2}{m+n+1}\cdot d_{m+n+1} + \ldots + \frac{\nu+1}{m+n+\nu}\cdot d_{m+n+\nu} + \ldots,$$

welche offenbar divergirt, da $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{\nu+1}{m+n+\nu} = 1$.

Hieraus folgt aber, dass die Doppelreihe $\sum\limits_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, a_\mu^{(\nu)}$ sicher divergirt, wenn:

$$(21)\qquad a_\mu^{(\nu)} \geqq g \cdot \frac{d_{\mu+\nu}}{\mu+\nu} \quad \text{für: } \mu \geqq m,\ \nu \geqq n,$$

oder, anders geschrieben:

$$(22)\qquad (\mu+\nu)\cdot D_{\mu+\nu}\cdot a_\mu^{(\nu)} \geqq g \quad \text{für: } \mu \geqq m,\ \nu \geqq n.$$

(wo m, n zwei beliebige positive Zahlen bedeuten). Und diese Bedingung ist sicher erfüllt, wenn:

$$\lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} (\mu+\nu)\cdot D_{\mu+\nu}\cdot a_\mu^{(\nu)} > 0. \tag{23}$$

Man hat also z. B. Divergenz, wenn

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} (\mu+\nu)^2\cdot a_\mu^{(\nu)} > 0 \\ \text{oder: } \lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} (\mu+\nu)^2\cdot \lg(\mu+\nu)\cdot a_\mu^{(\nu)} > 0 \quad \text{u. s. f.} \end{array}\right. \tag{24}$$

7. Als Beispiel für die Anwendung der gewonnenen Regeln wollen wir die Doppelreihe mit dem allgemeinen Gliede:

$$a_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{(a\mu^2+2b\mu\nu+c\nu^2)^\sigma} \quad \begin{pmatrix} \mu=0,1,2,\ldots, & a_0^{(0)}=0 \\ \nu=0,1,2,\ldots, & \end{pmatrix} \tag{25}$$

untersuchen, wo $(a\mu^2+2b\mu\nu+c\nu^2)$ eine sog. positive quadratische Form mit negativer Determinante sein soll, d. h. wo:

(26) $a>0$, $c>0$, $b^2-ac=-\varDelta<0$ (b beliebig, eventuell auch $=0$).

Da sodann:

$$\begin{aligned} a\mu^2+2b\mu\nu+c\nu^2 &= \frac{1}{a}\left\{(a^2\cdot\mu^2+2ab\cdot\mu\nu+b^2\cdot\nu^2)+(ac-b^2)\nu^2\right\} \\ &= \frac{1}{a}\left\{(a\mu+b\nu)^2+\varDelta\cdot\nu^2\right\}, \end{aligned} \tag{27}$$

so fällt dieser Ausdruck nach Ausschluss des einen Werthepaares ($\mu=0$, $\nu=0$) stets wesentlich positiv aus, sodass die betreffende Doppelreihe aus lauter wohl definirten positiven Termen besteht.

Bedeutet nun A eine positive Zahl, die von keiner der drei Zahlen a, $|b|$, c überstiegen wird, so ist:

$$a\mu^2+2b\mu\nu+c\nu^2 \leqq A(\mu+\nu)^2 \tag{28}$$

und daher:

$$a_\mu^{(\nu)} \geqq \frac{1}{A}\cdot\frac{1}{(\mu+\nu)^{2\sigma}} \tag{29}$$

und:

$$(30) \qquad (\mu+\nu)^2 \cdot a_\mu^{(\nu)} \geqq \frac{1}{\Delta} \cdot (\mu+\nu)^{2(1-\sigma)},$$

woraus sofort die Divergenz der fraglichen Doppelreihe für $\sigma \leqq 1$ hervorgeht (s. Ungl. (24)).

Andererseits hat man neben Gl. (27) die folgende analog gebildete:

$$(31) \qquad a\mu^2 + 2b\nu\mu + c\nu^2 = \frac{1}{c}\left\{(b\mu + c\nu)^2 + \Delta \cdot \mu^2\right\},$$

also:

$$(32) \qquad a\mu^2 + 2b\mu\nu + c\nu^2 \begin{cases} \geqq \frac{\Delta}{a} \cdot \nu^2 \\ \geqq \frac{\Delta}{c} \cdot \mu^2 \end{cases}$$

und daher:

$$(33) \qquad a_\mu^{(\nu)} \begin{cases} \leqq \left(\frac{a}{\Delta}\right)^\sigma \cdot \frac{1}{\nu^{2\sigma}} \text{ für jedes } \mu \text{ und } \nu \geqq 1, \\ \leqq \left(\frac{c}{\Delta}\right)^\sigma \cdot \frac{1}{\mu^{2\sigma}} \text{ für jedes } \nu \text{ und } \mu \geqq 1. \end{cases}$$

Diese Ungleichungen lehren zunächst, dass jede Zeile und jede Colonne der betrachteten Doppelreihe schon convergirt, wenn nur $\sigma > \frac{1}{2}$.

Schliesst man sodann für den Augenblick die Werthe $\mu = 0$, $\nu = 0$ von der Betrachtung aus, so folgt durch Multiplication der beiden Ungleichungen (33):

$$(34) \qquad a_\mu^{(\nu)} \leqq \left(\frac{\sqrt{ac}}{\Delta}\right)^\sigma \cdot \frac{1}{(\mu\nu)^\sigma} \quad (\mu \geqq 1,\ \nu \geqq 1).$$

und hieraus ergiebt sich nach Ungl. (7) $\left(\text{für: } c_\nu = \frac{1}{\nu^\sigma}\right)$ die Convergenz der Doppelreihe $\sum_1^\infty {}_{\mu,\nu}\, a_\mu^{(\nu)}$, sobald $\sigma > 1$ ist. Fügt man zu derselben noch die (schon für $\sigma > \frac{1}{2}$) convergente Zeile und Colonne: $\sum_0^\infty {}_\mu\, a_\mu^{(0)}$, $\sum_1^\infty {}_\nu\, a_0^{(\nu)}$, so erkennt man schliess-

lich, dass die vorgelegte Doppelreihe $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, a_\mu^{(\nu)}$ gleichfalls für $\sigma > 1$ convergirt.

8. Statt die Reihen-Glieder $a_\mu^{(\nu)}$ direkt mit denjenigen einer bereits als convergent bezw. divergent erkannten Doppelreihe $\sum c_\mu^{(\nu)}$ bezw. $\sum d_\mu^{(\nu)}$ zu vergleichen, kann man auch, analog wie bei der Kriterien-Bildung für einfach-unendliche Reihen, die Quotienten $\frac{a_\mu^{(\nu)}}{a_{\mu+1}^{(\nu)}}, \frac{a_\mu^{(\nu)}}{a_\mu^{(\nu+1)}}$ mit den entsprechenden Quotienten der $c_\mu^{(\nu)}$ bezw. $d_\mu^{(\nu)}$ vergleichen und auf diese Weise auch Convergenz- und Divergenz-Kriterien zweiter Art herstellen. Dieselben erscheinen jedoch von untergeordneter Wichtigkeit, weshalb hier nicht näher darauf eingegangen werden soll.[1])

[1]) Das einfachste derselben, welches dem Cauchy'schen Fundamental-Kriterium entspricht, findet sich in der oben citirten, soeben publicirten Arbeit von Herrn Biermann: a. a. O. p. 123.

In meinem Aufsatze „Ueber die sogenannte Grenze und die Grenzgebiete zwischen Convergenz und Divergenz", welcher im vorigen Bande dieser Sitzungsberichte abgedruckt ist, findet sich die Angabe (a. a. O. p. 605, Fussnote), dass Du Bois Reymond die in Aussicht gestellte genauere Discussion seiner Function $\tau(a)$ meines Wissens nicht geliefert habe. Da ich inzwischen bemerkt habe, dass dies thatsächlich doch der Fall gewesen ist (in dem Aufsatze: Ueber die Paradoxen des Infinitärcalcüls, Math. Ann. XXI p. 158), so werde ich demnächst auf den fraglichen Gegenstand nochmals zurückkommen.

Mit besten Grüßen!

Ueber die Du Bois Reymond'sche Convergenz-Grenze und eine besondere Form der Convergenz-Bedingung für unendliche Reihen.

Von

Alfred Pringsheim.

Aus den Sitzungsberichten der mathematisch-physikalischen Classe der k. bayer. Akad. d. Wiss. Bd. XXVII. 1897. Heft II.

München 1897.

Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub.



Ueber die Du Bois Reymond'sche Convergenz-Grenze und eine besondere Form der Convergenz-Bedingung für unendliche Reihen.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 17. Juni.*)

Wie ich schon in einer Note am Schlusse meiner Abhandlung über unendliche Doppelreihen erwähnte[1]), hat Du Bois Reymond in seinen „Paradoxen des Infinitär-Calcüls“[2]) den Versuch gemacht, die Einführung seiner Function $\tau(a)$ (welche die Grenze zwischen der Convergenz und Divergenz des Integrals $\int_0^a \frac{t(a)}{a}$ bilden soll, je nachdem $t(a) < \tau(a)$ oder $t(a) > \tau(a)$) in ausführlicherer Weise zu rechtfertigen. Obschon nun durch diese Auseinandersetzungen die von mir bei früherer Gelegenheit[3]) gegen die Zulässigkeit einer solchen Function $\tau(a)$ erhobenen Einwendungen weit eher bekräftigt, als erschüttert werden, so erscheint es mir doch zweckmässig, zur weiteren Klärung dieser für die Principien der Functionenlehre immerhin wichtigen und interessanten Frage auf die Hauptpunkte jenes Rechtfertigungs-Versuches etwas genauer einzugehen und daran einige allgemeine Bemerkungen über die

---

1) Sitz.-Ber. 1897, S. 152.

2) Math. Ann. Bd. 11, S. 158 ff.

3) Sitz.-Ber. 1896, S. 605 ff.

Unzulänglichkeit gewisser Du Bois Reymond'scher Grund-Anschauungen zu knüpfen.

1.

Zunächst zeigt Du Bois Reymond in ganz correcter Weise und ähnlich, wie ich es gleichfalls a. a. O. kurz angedeutet habe, dass die Annahme, es existire eine solche Function $\tau(\alpha)$, auf unlösbare Widersprüche führt. Anstatt nun aber hieraus den einzig möglichen logischen Schluss zu ziehen, dass also jene Annahme a limine abzuweisen sei, folgert er wiederum nur soviel, dass die fragliche Grenze zwischen Convergenz und Divergenz durch keine bekannte Function d. h. „durch keine genügend gekennzeichnete Abhängigkeit" darstellbar sein könne. Sodann aber fährt er folgendermaassen fort:[1])

„Gleichwohl wird es Niemanden geben, der, vorausgesetzt dass er von den hier auseinandergesetzten Dingen noch nichts weiss, aber geübte geometrische Vorstellungen besitzt, nicht alle Zwischenstufen zwischen dem Nullwerden von

$$\frac{1}{\lg\frac{1}{\alpha}\cdots\lg_n\frac{1}{\alpha}} \quad \textit{und} \quad \frac{1}{\lg\frac{1}{\alpha}\cdots\left(\lg_n\frac{1}{\alpha}\right)^{1+\mu}}$$

für gedanklich vorhanden und gleichberechtigt hielte. Aber auch die genaue Kenntniss der obigen Ergebnisse vorausgesetzt, hätte es, meiner Ueberzeugung nach, nicht den geringsten Sinn anzunehmen, dass es keine Grenze zwischen Convergenz und Divergenz gebe, oder richtiger, eine solche Vorstellung würde unsern eingewurzelten Vorstellungen zuwider laufen.

Wie also diesen Widerspruch zwischen den Ergebnissen der analytischen Untersuchung und der angeborenen Grössenvorstellung versöhnen?"

Ich muss gestehen, dass diese letzten Sätze auf mich ungefähr so wirken, als seien sie in einer völlig fremden Sprache geschrieben. Und ich kann daraus nur soviel ent-

---

[1]) a. a. O. S. 164.

nehmen, dass die „eingewurzelten“ oder gar „angeborenen“ Grössenvorstellungen verschiedener Mathematiker offenbar grundverschieden sein müssen. Wenn ich nun aber auf Grund meiner „eingewurzelten“ Grössenvorstellungen mit ganz dem entsprechenden Maasse von apodiktischer Ueberzeugung lediglich den Satz niederschreiben wollte: „Es hat nicht den geringsten Sinn, die Existenz einer Grenze zwischen Convergenz und Divergenz anzunehmen“, so würde hierdurch die Erkenntniss der Wahrheit um keinen Schritt gefördert werden. Ich will also versuchen, dem Gedankengange, welcher der Du Bois Reymond'schen Behauptung zu Grunde liegt, etwas genauer nachzugehen, und hierzu liefert der erste der oben citirten Sätze den genügenden Anhalt.

Darnach soll also ein mit der Natur des vorliegenden Problems nicht genauer vertrauter, aber mit geübten geometrischen Vorstellungen ausgerüsteter Beurtheiler „alle“ Zwischenstufen des Nullwerdens zwischen zwei bestimmten für gedanklich vorhanden und gleichberechtigt halten; mit anderen Worten, er soll auf Grund seiner geometrischen Vorstellungen unfehlbar zu der Anschauung gelangen, dass die verschiedenen Ordnungstypen des Nullwerdens eine **stetige** lineare Mannigfaltigkeit bilden.

Nun lässt sich aber leicht zeigen, dass der Versuch, die geometrische Vorstellung eines Linear-Continuums auf die Mannigfaltigkeit jener Nulltypen[1]) zu übertragen, von vornherein vollständig scheitert, und dass daher im Munde jenes geometrisch-denkenden Beurtheilers die Existenz „aller“ möglichen Zwischenstufen des Nullwerdens lediglich eine Redensart ohne Inhalt bedeuten würde.

---

[1]) Ich gebrauche den Ausdruck Null- bezw. Unendlichkeits-Typus hier und im folgenden stets zur Bezeichnung einer Function, welche eine bestimmte Art des Null- bezw. Unendlichwerdens charakterisirt; nicht aber im Sinne des Du Bois Reymond'schen Ausdruckes „Infinitär-Typus“ (s. z. B. den Aufsatz: Sur la grandeur relative des infinis des fonctions. — Annali di Matematica, Serie II, T. IV, p. 338.

Denn, lässt man nur in dem Ausdrucke x^μ den Exponenten μ successive das ganze stetige Gebiet der positiven Zahlen durchlaufen, so entspricht jedem Punkte μ der positiven Zahlen-Linie eine bestimmte Function x^μ, also auch ein bestimmter Typus des Nullwerdens — und umgekehrt. Um sich also nur die Gesammtheit dieser Nulltypen als geordnete lineare Mannigfaltigkeit vorzustellen, um dieselben gewissermaassen auf einer geraden Linie unterzubringen, besitzt die geometrische Phantasie kein anderes Mittel, als sich jeden Punkt dieser Geraden mit einem solchen Nulltypus belegt zu denken. Wenn sodann rein-arithmetische Ueberlegungen zeigen, dass es für jeden einzelnen Werth μ unendlich viele Functionen, wie $x^\mu \cdot \left(\lg\frac{1}{x}\right)^{-\nu}$, $x^\mu \cdot \left(\lg\frac{1}{x}\right)^{-\nu}\left(\lg_2\frac{1}{x}\right)^{-\varrho}$, ... $(\nu > 0,\ \varrho > 0,\ \ldots)$ giebt, welche für $\lim x = 0$ stärker Null werden, als x^μ, aber schwächer als jedes $x^{\mu+\varepsilon}$, wie klein auch die positive Zahl ε angenommen werden mag, so ist für alle diese neuen Nulltypen auf der gedachten Geraden kein Platz vorhanden. Mit anderen Worten, es ist schlechterdings unmöglich, sich etwa eine angebliche „Gesammtheit“ von Nulltypen als geordnete lineare stetige Mannigfaltigkeit, also unter dem Bilde einer geraden Linie vorzustellen. Ohne diese Vorstellungs-Möglichkeit hat aber die Aussage: man halte **„alle“** Zwischenstufen des Nullwerdens zwischen zwei bestimmten für „gedanklich vorhanden und gleichberechtigt“ nicht den geringsten Sinn, und ein einigermaassen scharfsinniger geometrischer Beurtheiler wird sich sehr wohl hüten, dieses von Du Bois Reymond als selbstverständlich präsumirte Urtheil abzugeben.

„Gedanklich vorhanden“ sind eben nur alle diejenigen Nulltypen, welche durch irgend welche Functionen wirklich definirt sind. Solcher Functionen giebt es nun aber thatsächlich stetige unendliche Mannigfaltigkeiten von unendlich hoher Ordnung, z. B.

$$(1) \qquad x^{\nu}\cdot\left(\lg_1\frac{1}{x}\right)^{\nu_1}\cdot\left(\lg_2\frac{1}{x}\right)^{\nu_2}\cdots = \varphi_{\nu\,\nu_1\,\nu_2}\cdots(x)$$

wo:

$$(2) \quad 0 \leqq \nu < \infty\,,\ -\infty < \nu_1 < +\infty\,,\ -\infty < \nu_2 < +\infty\,,\ \ldots$$

mit der Beschränkung, dass:

$$(2a) \qquad \begin{cases} \nu_1 \geqq 0\,, \text{ falls } \nu = 0, \\ \nu_2 \geqq 0\,, \text{ falls } \nu = 0,\ \nu_1 = 0 \text{ etc.} \end{cases}$$

Bezeichnet man mit $(m, m_1, m_2, \ldots)$ und $(n, n_1, n_2, \ldots)$ irgend zwei den obigen Bedingungen genügenden Systeme reeller Zahlen, so schreibt man nach Du Bois Reymond's Vorgange:

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{l} \varphi_{m\,m_1\,m_2}\cdots(x) \prec \varphi_{n\,n_1\,n_2}\cdots(x) \\ \varphi_{n\,n_1\,n_2}\cdots(x) \succ \varphi_{m\,m_1\,m_2}\cdots(x) \end{array}\right\}$$

in Worten: $\varphi_{m\,m_1\,m_2}\ldots(x)$ ist „infinitär kleiner" als $\varphi_{n\,n_1\,n_2}\ldots(x)$, bezw. $\varphi_{n\,n_1\,n_2}\ldots(x)$ ist „infinitär grösser" als $\varphi_{m\,m_1\,m_2}\ldots(x)$, wenn:

$$(4) \qquad \lim_{x=0}\frac{\varphi_{m\,m_1\,m_2}\cdots(x)}{\varphi_{n\,n_1\,n_2}\cdots(x)} = 0\,.$$

Man bemerke nun vor allem, dass diese letztere Bedingung in Wahrheit unendlich viele Bedingungen von der Form:

$$(5) \qquad \frac{\varphi_{m\,m_1\,m_2}\cdots(x)}{\varphi_{n\,n_1\,n_2}\cdots(x)} < \varepsilon \text{ für } x < \delta$$

repräsentirt. Nur dadurch, dass man eine solche unendliche Menge von Bedingungen zusammenfasst und für ihr gleichzeitiges Bestehen ein bestimmtes Zeichen (3) einführt, werden die Terme der unendlich-vieldimensionalen Mannigfaltigkeit (1) in dem Sinne mit einander vergleichbar, dass in der That zwischen je zwei ganz beliebig aus ihr herausgegriffenen Termen ausnahmslos eine Beziehung von der Form (3) besteht. Wird nun auch auf diese Weise für die $\varphi_{\nu\,\nu_1\,\nu_2}\ldots(x)$ ein eindeutig bestimmtes Ordnungs-Princip definirt, welches demjenigen der reellen Zahlen möglichst analog ist, so gewinnt hierdurch die stetige unendlich-

vieldimensionale Mannigfaltigkeit der $\varphi_{\nu\ \nu_1\ \nu_2} \ldots (x)$ keineswegs alle Eigenschaften einer stetigen linearen Mannigfaltigkeit.

Dergleichen Ordnungs-Gesetze lassen sich für jede mehrdimensionale Mannigfaltigkeit auf unendlich viele Arten definiren, ohne dass hierdurch der eigentliche Charakter ihrer Mehrdimensionalität beseitigt werden kann.

Um den Sinn dieser letzten Bemerkung deutlicher zu machen, will ich den einfachen Fall einer zweidimensionalen stetigen Mannigfaltigkeit etwas genauer betrachten. Eine solche bilden z. B. alle möglichen reellen Zahlenpaare (μ, ν) oder, geometrisch gesprochen, die Punkte einer Ebene. Wird nun durch das Symbol:

$$(6) \qquad (\mu_1, \nu_1) < (\mu_2, \nu_2)$$

ausgedrückt, dass in jeder Folge von Termen (μ, ν) der Term (μ_1, ν_1) dem Terme (μ_2, ν_2) voranzugehen hat, so lässt sich die Existenz einer Beziehung von der Form (6) für jedes beliebig gewählte Paar (μ_1, ν_1), (μ_2, ν_2) in folgender Weise eindeutig festlegen. Es seien $f(\mu, \nu)$, $g(\mu, \nu)$ zwei eindeutige reelle Functionen (die eventuell auch nur von je einer der beiden Veränderlichen μ, ν abzuhängen brauchen z. B. $f(\mu, \nu) = \mu$, $g(\mu, \nu) = \nu$) mit der einzigen Einschränkung, dass das gleichzeitige Bestehen der beiden Gleichungen:

$$(7) \qquad f(\mu_1, \nu_1) = f(\mu_2, \nu_2), \quad g(\mu_1, \nu_1) = g(\mu_2, \nu_2)$$

ausschliesslich dann möglich sein soll, wenn:

$$(8) \qquad \mu_1 = \mu_2, \quad \nu_1 = \nu_2.$$

Alsdann soll die Beziehung (6) dadurch definirt sein, dass

$$(9) \qquad \begin{cases} \text{entweder: } f(\mu_1, \nu_1) < f(\mu_2, \nu_2) \\ \text{oder: } \quad f(\mu_1, \nu_1) = f(\mu_2, \nu_2), \; g(\mu_1, \nu_1) < g(\mu_2, \nu_2). \end{cases}$$[1]

---

[1] Man könnte die durch Gl. (7) und (8) den Functionen f und g auferlegte Beschränkung auch fallen lassen. Nur müsste dann zu den beiden Festsetzungen (9) eine dritte hinzukommen, welche sich auf das Eintreten des Falles (7) zu beziehen hätte.

Man erkennt ohne weiteres, dass in der That auf Grund dieser zwei Festsetzungen jede endliche Anzahl von Termen (μ, ν) im Sinne der Ungleichung (6) (also in „monoton zunehmender" oder auch umgekehrt in „monoton abnehmender" Folge) vollständig eindeutig geordnet werden kann. Auch lassen sich, wenn $(\mu_1, \nu_1) < (\mu_2, \nu_2)$, aus der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit der (μ, ν) unendlich viele abzählbare monoton zunehmende Mengen herausheben, welche mit (μ_1, ν_1) beginnend die Grenze (μ_2, ν_2) haben; desgleichen unendlich viele monoton zunehmende, stetige lineare Mengen, welche von (μ_1, ν_1) und (μ_2, ν_2) begrenzt werden. Dagegen lässt sich nicht umgekehrt jede aus der Mannigfaltigkeit der (μ, ν) herausgehobene stetige lineare Menge als geordnete (d. h. monoton zu- oder abnehmende) lineare Menge auffassen. Und am allerwenigsten bilden alle möglichen der Bedingung:

$$(\mu_1, \nu_1) < (\mu, \nu) < (\mu_2, \nu_2)$$

genügenden Terme (μ, ν) eine einzige lineare stetige und geordnete Menge, wie mit aller Strenge aus dem bekannten Satze [1]) hervorgeht, dass eine zweidimensionale stetige Mannigfaltigkeit nicht stetig und eindeutig umkehrbar auf eine lineare abgebildet werden kann.

In ganz analoger Weise lassen sich für jede n-dimensionale oder auch unendlich-vieldimensionale stetige Mannigfaltigkeit mit Hülfe von n bezw. unendlich vielen Bedingungen beliebig viele eindeutige Ordnungs-Gesetze aufstellen. Und der sogenannte „infinitäre Grössen-Begriff" ist lediglich ein derartiger zusammengesetzter Ordnungs-Begriff, durch dessen Einführung die Mannigfaltigkeit der Null- bezw. Unendlichkeits-Typen keineswegs

---

[1]) Lüroth, Erlanger Berichte 1878. — G. Cantor, Ueber einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten. Göttinger Nachr. 1879, S. 127. — Netto, Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. Journal f. Math. Bd. 86, S. 263.

die Eigenschaften einer unendlich-vieldimensionalen Mannigfaltigkeit vollständig verliert.

Aus der Nichtbeachtung dieses letzteren Umstandes entspringen in Wahrheit alle jene angeblichen „Paradoxen“ des Du Bois Reymond'schen „Infinitär-Calcüls“, welche eben einzig und allein darin bestehen, dass gewisse aus den gewöhnlichen Grössen-Beziehungen zwischen reellen Zahlen abstrahirte Gesetze und Anschauungen nicht ohne weiteres auf die Objecte jener „infinitären“ Grössenbeziehungen (d. h. die Null- bezw. Unendlichkeits-Typen) übertragbar sind. Wirkliche Analogien mit der linearen Mannigfaltigkeit der reellen Zahlen können nämlich nur da erwartet werden, wo lediglich eine lineare, geordnete und stetige oder aus einer solchen entnommene unstetige Menge derartiger Objecte in Betracht kommt.[1]) Sie erscheinen hingegen a priori da ausgeschlossen, wo die Mehr-Dimensionalität der betreffenden Mannigfaltigkeiten in's Gewicht fällt. Und ich muss es, nach dem Gesagten, als auf einem fundamentalen Irrthume beruhend bezeichnen, wenn Du Bois Reymond in seiner Allgemeinen Functionen-Theorie[2]) bezüglich der „infinitären Pantachie“, d. h. der Gesammtheit der Unendlichkeits-Typen, die Aussage macht: „*Idealistisch ist sie ein infinitäres Continuum, ähnlich dem Zahlen-Continuum, welches man ebenfalls, wenn auch minder einfach* (?) *als Punktvielheit auf einer Linie auffassen kann.*“

---

[1]) S. z. B. den oben citirten Aufsatz in den Annali de Matematica, Serie II, T. IV, p. 338. — Im übrigen tritt auch hier schon als fundamentaler Unterschied gegenüber der Menge der reellen Zahlen der Umstand hervor, dass das bekannte Axiom des Archimedes nicht mehr gilt. Vgl. Stolz, Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes. Math. Ann. Bd. XXII, S. 505—507 Fussnoten. — Derartige dem Axiome des Archimedes nicht genügende Mannigfaltigkeiten sind neuerdings von Bettazzi genauer untersucht worden: Teoria delle grandezze, Pisa 1890. p. 47—58.

[2]) Tübingen 1882, S. 283.

2.

Im übrigen handelt es sich ja in dem vorliegenden Falle gar nicht um die Entscheidung der (lediglich von Du Bois Reymond ganz unnöthiger Weise herbeigezogenen) allgemeinen Frage, ob man „alle möglichen" Stufen des Nullwerdens als eine lineare stetige Mannigfaltigkeit ansehen kann, sondern um die wesentlich speciellere, ob zwei ganz bestimmt vorgeschriebene Folgen (also abzählbare Mengen) von Ordnungs-Typen einer gemeinsamen Grenze zustreben; noch genauer gesagt, ob die beiden Functionen-Folgen:

$$(10)\quad \varphi_\nu(x) = \frac{1}{\lg\frac{1}{x}\lg_2\frac{1}{x}\ldots\lg_\nu\frac{1}{x}},\quad \varphi_{\nu,\varrho}(x) = \frac{1}{\lg\frac{1}{x}\lg_2\frac{1}{x}\ldots\left(\lg_\nu\frac{1}{x}\right)^{1+\varrho}}$$

eine einzige bestimmte Grenz-Function definiren, wenn ν ganzzahlig in's Unendliche wächst, während ϱ eine beliebig klein anzunehmende, aber feste positive Zahl bedeutet.

Diese Frage dürfte nun freilich der von Du Bois Reymond zu Hülfe gerufene geometrische Beurtheiler in dem folgenden Sinne bejahen: „Die beiden unendlichen Curven-Schaaren:

$$(11)\qquad y = \varphi_\nu(x),\ y = \varphi_{\nu,\varrho}(x)\ \ (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

deren Ordinaten für hinlänglich kleine Werthe von x der Bedingung genügen:

$$(12)\qquad \varphi_{\nu,\varrho}(x) < \varphi_{\nu+1,\varrho}(x) < \varphi_{\nu+1}(x) < \varphi_\nu(x),$$

nähern sich für $\lim \nu = \infty$ einer bestimmten Grenz-Curve."

Und er hätte, wie sogleich mit Hülfe der nothwendigen analytischen Ueberlegungen gezeigt werden soll, hiermit vollständig Recht. Nur entspricht das wirkliche Resultat keineswegs der auf den ersten Blick nahe liegenden Vorstellung zweier Curven-Schaaren, die sich, wie Ungl. (12) zu lehren scheint, von verschiedenen Seiten einander unbegrenzt nähern und auf diese Weise eine gewisse Grenz-Curve ein-

schliessen. Vielmehr wird das Intervall, für welches Ungl. (12) gilt, mit unbegrenzt wachsenden Werthen von ν auch unbegrenzt verkleinert, d. h. die betreffenden Curven durchsetzen sich bei wachsender Ordnungszahl in immer grösserer Nähe des Nullpunktes, und die Grenz-Curve wird von ihnen nicht **ein-**, sondern **aus**geschlossen. Als die fragliche Grenz-Curve erscheint hierbei der positive Theil der Ordinaten-Axe, also gerade die einzige Curve, deren Gleichung nicht auf die Form $y = \tau(x)$ gebracht werden kann. Mit anderen Worten, gerade die Existenz einer ganz bestimmten Grenz-Curve für die beiden Curven-Schaaren $y = \varphi_\nu(x)$ und $y = \varphi_{\nu,\varrho}(x)$ lässt unmittelbar erkennen, dass die Existenz einer Grenz-Function $\tau(x)$ für die $\varphi_\nu(x)$ und $\varphi_{\nu,\varrho}(x)$ definitiv ausgeschlossen erscheint, und man gelangt also auf diesem von Du Bois Reymond ausdrücklich zur Unterstützung seiner Behauptung vorgezeichneten Wege nur von neuem zu der Ueberzeugung ihrer Unhaltbarkeit.

Um dieses angedeutete Resultat wirklich abzuleiten, werde gesetzt:

$$(13^a) \quad e_0 = 1,\; e_1 = e,\; e_2 = e^{e_1},\; e_3 = e^{e_2}, \ldots e_\nu = e^{e_{\nu-1}}, \ldots$$

so dass also:

$$(13^b) \quad \lg_1 e_\nu = e_{\nu-1},\; \lg_2 e_\nu = e_{\nu-2}, \ldots \lg_\nu e_\nu = 1,\; \lg_{\nu+1} e_\nu = 0.$$

Hieraus folgt zunächst, dass allgemein $\varphi_{\nu+1}(x)$ und $\varphi_{\nu+1,\varrho}(x)$ für $x = \frac{1}{e_\nu}$ unendlich gross werden. Da sodann:

$$(14) \qquad \frac{\varphi_{\nu+1}(x)}{\varphi_{\nu+1,\varrho}(x)} = \left(\lg_{\nu+1}\frac{1}{x}\right)^\varrho, \quad \frac{\varphi_\nu(x)}{\varphi_{\nu+1}(x)} = \lg_{\nu+1}\frac{1}{x},$$

und:

$$(15) \qquad \lg_{\nu+1}\frac{1}{x} \begin{cases} < 1 \text{ für } x > \frac{1}{e_{\nu+1}} \\ > 1 \text{ für } x < \frac{1}{e_{\nu+1}}, \end{cases}$$

so hat man:

(16) $$\varphi_{\nu+1,\varrho}(x) > \varphi_{\nu+1}(x) > \varphi_\nu(x) \text{ für } x > \frac{1}{e_{\nu+1}},$$

und:

(17) $$\varphi_{\nu+1,\varrho}(x) < \varphi_{\nu+1}(x) < \varphi_\nu(x) \text{ für } x < \frac{1}{e_{\nu+1}}.$$

Erst bei der Stelle $x = \frac{1}{e_{\nu+1}}$, welche mit wachsendem ν der Nullstelle immer näher rückt, findet also jenes Durchsetzen der betreffenden Curven statt, welches ihre endgültige Reihenfolge bestimmt.

Um die Gestalt der fraglichen Curven etwas genauer festzustellen, bilde man zunächst aus:

$$\varphi_n(x) = \prod_1^n{}^\nu \frac{1}{\lg_\nu \frac{1}{x}}$$

durch Differentiation:

$$\varphi_n'(x) = \varphi_n(x) \cdot \sum_1^n{}^\nu \lg_\nu \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\lg_\nu \frac{1}{x}} \right)$$

$$= \varphi_n(x) \cdot \sum_1^n{}^\nu \frac{1}{x \lg \frac{1}{x} \dots \lg_\nu \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{1}{x} \varphi_n(x) \cdot \sum_1^n{}^\nu \varphi_\nu(x),$$

also schliesslich:

(18) $$\varphi_n'(x) = \frac{1}{x} \cdot \varphi_n(x) \cdot \Phi_n(x), \quad \text{wo:} \quad \Phi_n(x) = \sum_1^n{}^\nu \varphi_\nu(x).$$

Da sodann:

$$\varphi_{n,\varrho}(x) = \varphi_n(x) \cdot \frac{1}{\left(\lg_n \frac{1}{x}\right)^\varrho},$$

so folgt mit Berücksichtigung von Gl. (18):

$$\varphi_{n,\varrho}'(x) = \frac{1}{x} \cdot \varphi_n(x) \cdot \Phi_n(x) \cdot \frac{1}{\left(\lg_n \frac{1}{x}\right)^\varrho} + \varrho \cdot \frac{1}{x \cdot \lg \frac{1}{x} \dots \left(\lg_n \frac{1}{x}\right)^{1+\varrho}} \cdot \varphi_n(x)$$

oder:

$$(19)\quad \varphi'_{n,\varrho}(x) = \frac{1}{x}\cdot\varphi_{n,\varrho}(x)\cdot\Phi_{n,\varrho}(x), \text{ wo: } \Phi_{n,\varrho}(x) = \Phi_n(x) + \varrho\cdot\varphi_n(x).$$

Hieraus ergiebt sich durch nochmalige Differentiation zunächst:

$$(20)\quad \varphi''_{n,\varrho}(x) = -\frac{1}{x^2}\cdot\varphi_{n,\varrho}(x)\cdot\Phi_{n,\varrho}(x) + \frac{1}{x^2}\cdot\varphi_{n,\varrho}(x)\cdot\Phi^2_{n,\varrho}(x) + \frac{1}{x}\cdot\varphi_{n,\varrho}\cdot\Phi'_{n,\varrho}(x),$$

wo nach Gl. (16) und (15):

$$\Phi'_{n,\varrho}(x) = \sum_1^n{}^{\nu}\varphi'_\nu(x) + \varrho\cdot\varphi'_n(x) = \frac{1}{x}\cdot\sum_1^n{}^{\nu}\varphi_\nu(x)\cdot\Phi_\nu(x) + \varrho\cdot\frac{1}{x}\varphi_n(x)\cdot\Phi_n(x).$$

Man hat nun:

$$\sum_1^n{}^{\nu}\varphi_\nu(x)\cdot\Phi_\nu(x) = \sum_1^n{}^{\nu}\varphi_\nu(x)\sum_1^\nu{}^{\mu}\varphi_\mu(x) = \sum_1^n{}^{\nu}\varphi_\nu(x)\cdot\sum_\nu^n{}^{\mu}\varphi_\mu(x)$$

also:

$$2\sum_1^n{}^{\nu}\varphi_\nu(x)\cdot\Phi_\nu(x) = \sum_1^n{}^{\nu}\cdot\varphi_\nu(x)\cdot\sum_1^n{}^{\mu}\varphi_\mu(x) + \sum_1^n{}^{\nu}\varphi^2_\nu(x)$$
$$= \Phi^2_n(x) + \sum_1^n{}^{\nu}\varphi^2_\nu(x),$$

und daher:

$$\sum_1^n{}^{\nu}\varphi_\nu(x)\cdot\Phi_\nu(x) + \varrho\cdot\varphi_n(x)\cdot\Phi_n(x)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left\{\Phi_n(x) + \varrho\cdot\varphi_n(x)\right\}^2 + \tfrac{1}{2}\left\{\sum_1^n{}^{\nu}\varphi^2_\nu(x) - \varrho^2\cdot\varphi^2_n(x)\right\},$$

sodass Gl. (20) schliesslich in die folgende übergeht:

$$(21)\quad \varphi''_{n,\varrho}(x) = -\frac{1}{x^2}\cdot\varphi_{n,\varrho}(x)\cdot\Phi_{n,\varrho}(x)\cdot\left\{1 - \tfrac{3}{2}\cdot\Phi_{n,\varrho}(x) - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\sum_1^n{}^{\nu}\varphi^2_\nu(x) - \varrho^2\cdot\varphi^2_n(x)}{\Phi_{n,\varrho}(x)}\right\}$$

Hieraus folgt noch, wenn man speciell $\varrho = 0$ setzt:

(22) $$\varphi_n''(x) = -\frac{1}{x^2}\cdot\varphi_n(x)\cdot\Phi_n(x)\cdot\left\{1 - \tfrac{3}{2}\,\Phi_n(x) - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\sum_1^n{}^{\nu}\,\varphi_\nu^2(x)}{\Phi_n(x)}\right\}.$$

Die Gleichungen (15), (16) und (18), (19) lehren, dass die Curven $y = \varphi_\nu(x)$ und $y = \varphi_{\nu,\varrho}(x)$, oder, was auf dasselbe herauskommt, die Curven $y = \varphi_{\nu,\varrho}(x)$ für $\varrho = 0$ und $\varrho > 0$, bei beliebigen Werthen der ganzen Zahl ν den gleichen sehr einfachen Charakter besitzen. Die Ordinaten haben für $x = 0$ den Werth 0 und nehmen, wie Gl. (15), (16) zeigt, mit wachsendem x monoton zu, bis sie für $x = \frac{1}{e_{\nu-1}}$ unendlich gross werden (s. Gl. (10)): die Linie $x = \frac{1}{e_{\nu-1}}$ ist dann die Asymptote der beiden Curven $y = \varphi_\nu(x)$ und $y = \varphi_{\nu,\varrho}(x)$, während sämmtliche Curven die Ordinaten-Axe im Nullpunkte tangiren. Aus Gl. (18), (19) ersieht man, dass die zunächst concav, schliesslich convex gegen die Abscissen-Axe verlaufenden Curven zwischen der Nullstelle $x = 0$ und der Unendlichkeits-Stelle $x = \frac{1}{e_{\nu-1}}$ je einen einzigen Inflexions-Punkt besitzen. Da im übrigen die Asymptote $x = \frac{1}{e_{\nu-1}}$ für $\lim \nu = \infty$ mit der Ordinaten-Axe zusammenfällt, so bildet deren positiver Theil in der That die fragliche Grenz-Curve.

Dieses Ergebniss kann sogar in dem Sinne gedeutet werden, dass jene Grenz-Curve *cum grano salis* die wahre Grenze zwischen Convergenz und Divergenz definirt. Wenn man nämlich sagt, dass von den beiden Integralen:

$$\text{(I)} \quad \int_0^a \frac{\varphi_{\nu,\varrho}(x)}{x}\cdot dx, \qquad \text{(II)} \quad \int_0^a \frac{\varphi_\nu(x)}{x}\cdot dx$$

das erste convergirt, das zweite divergirt, so ist über die wahre Bedeutung dieser Aussage folgendes zu bemerken:

1) Die obere Integrations-Grenze a ist keineswegs in dem Sinne als constant anzusehen, dass es eine Zahl $a > 0$ giebt,

welche für jeden noch so grossen Werth von ν die Convergenz des Integrals (I) gewährleistet. Vielmehr muss $a < \frac{1}{e_{\nu-1}}$ angenommen werden, wenn das Integral (I) convergiren soll; und andererseits bleibt das Integral (II) divergent, auch wenn a in der angedeuteten Weise verkleinert wird.

2) Jene Integrale sind sogenannte „uneigentliche", d. h. sie haben lediglich die Bedeutung einer abgekürzten Schreibweise für:

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi_{\nu,\varrho}(x)}{x} \cdot dx, \quad \lim_{\varepsilon=0} \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi_{\nu}(x)}{x} \cdot dx, \quad \text{wo: } 0 < \varepsilon < a.$$

Da nun auf Grund der sub 1) angestellten Betrachtung für $\lim \nu = \infty$ geradezu $a = 0$ gesetzt werden muss, so kann man nicht etwa sagen, dass sich jene beiden Integrale zugleich mit der Länge des Integrations-Intervalls auf den Werth 0 reduciren, sie hören vielmehr ganz unzweideutig auf, überhaupt zu existiren, und in diesem Sinne sind sie in der That weder convergent, noch divergent.[1]) Zugleich ergiebt

[1]) Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, dass diese Schlüsse keine Aenderung erleiden, wenn man etwa, um das Unendlichwerden der Functionen $\varphi_{\nu,\varrho}(x)$, $\varphi_{\nu}(x)$ für $x = \frac{1}{e_{\nu-1}}$ gänzlich zu eliminiren, dieselben durch andere Functionen $\psi_{\nu,\varrho}(x)$, $\psi_{\nu}(x)$ ersetzt, sodass:

$$\psi_{\nu,\varrho}(x) = \varphi_{\nu,\varrho}(x)$$
$$\psi_{\nu}(x) = \varphi_{\nu}(x)$$

nur für das Intervall: $0 \overline{\overline{<}} x \overline{\overline{<}} \frac{1}{e_{\nu-2}}$, während über $x = \frac{1}{e_{\nu-2}}$ hinaus $\psi_{\nu,\varrho}(x)$ und $\psi_{\nu}(x)$ als willkürliche, endliche und stetige Functionen gedacht werden können. Denn zerlegt man die betreffenden Integrale in folgender Weise:

$$\int_0^a = \int_0^{\frac{1}{e_{\nu-2}}} + \int_{\frac{1}{e_{\nu-2}}}^a$$

so gelten für das erste Theil-Integral genau wieder die im Texte gemachten Bemerkungen.

sich als immerhin einigermaassen werthvolles Resultat dieser vielleicht manchem Leser ziemlich zwecklos erscheinenden Untersuchung eine neue Bestätigung der erfreulichen Thatsache: Die Sprache der Analysis ist von so erstaunlicher Vollkommenheit, dass sie auch auf die verfänglichsten Fragen stets die richtige Antwort giebt, wenn man sie nur richtig anzuwenden versteht.

3.

Anstatt durch ähnliche Betrachtungen, wie sie im vorigen Artikel angestellt wurden, Aufschluss über die wahre Natur jener praesumirten Grenze zwischen Convergenz und Divergenz zu gewinnen, nimmt Du Bois Reymond seine Zuflucht zur Heranziehung einer Analogie, welche ich — ohne diese Auseinandersetzung zu kennen — schon in meinem ersten Aufsatze[1]) als sehr naheliegend, aber durchaus unzutreffend bezeichnet habe, nämlich die (scheinbare) Analogie zwischen jenen „undefinirbaren" Null- bezw. Unendlichkeits-Typen und den Irrationalzahlen. Um diese Analogie näher zu begründen sagt er (a. a. O. p. 165) zunächst folgendes:

„*Wenn wir nun in der gemeinen Zahlenfolge, trotzdem die Folge der rationalen Zahlen unbegrenzt dicht ist, hier durch analytische Betrachtungen, dort durch geometrische Constructionen, dahin geführt werden, Grössen als vorhanden anzunehmen, welche durch Zahlen nicht ausdrückbar sind, wie $\sqrt{2}$ oder π dergleichen sind, was Wunder wenn auch in der infinitären Grössenfolge unsere Gedankenverbindungen zu der Annahme einer Art des Wachsthumes uns hinleiten, die man durch analytische Operationen nie wird darstellen können?*"

Also: Wir werden in der gemeinen Zahlenfolge dahin geführt (*sic!*), Grössen als vorhanden anzusehen, welche durch Zahlen nicht ausdrückbar sind, wie z. B. $\sqrt{2}$ und π.

---

1) a. a. O. S. 606 ff.

Obschon ich nicht recht verstehe, wie überhaupt irgendwelche „Grössen" in die „gemeine Zahlenfolge" hineingerathen, zumal solche, die „durch Zahlen nicht ausdrückbar sind", so glaube ich diesem etwas merkwürdigen Satze mit Sicherheit soviel entnehmen zu können, dass speciell $\sqrt{2}$ nach Du Bois Reymond's Terminologie „durch Zahlen nicht ausdrückbar" ist, und möchte dies zum besseren Verständnisse des nun folgenden Satzes ausdrücklich hervorheben. Dieser lautet:

„*Kurzum ich meine, die ideelle Grenze zwischen Convergenz und Divergenz ist ein* irrationales Unendlich, *welches sich zu den convergenten und divergenten unendlichen Operationen ganz ähnlich verhält, wie die Länge der Kreisperipherie zu den von aussen und von innen sich ihr nähernden geschlossenen Linien von numerisch darstellbarer Länge.*"

Du Bois Reymond erblickt also die fragliche Analogie nicht, wie ich seiner ersten Bemerkung ähnlichen Inhalts entnehmen zu müssen glaubte[1]), in der räumlichen Beziehung zwischen den geometrischen Figuren des Kreises und der eingeschriebenen oder umschriebenen Polygone, sondern in der analytischen Beziehung zwischen der Länge der Kreisperipherie und derjenigen der sich ihr nähernden „geschlossenen Linien von numerisch darstellbarer Länge."

So einfach das klingen mag, so gehört doch immerhin einiger Scharfsinn und guter Wille dazu, um nur zunächst genau zu verstehen, was mit diesen „geschlossenen Linien von numerisch darstellbarer Länge" gemeint sein mag.

Eine bestimmte Länge kommt nach der üblichen — und von Du Bois Reymond acceptirten[2]) — Ansicht zunächst nur einer geradlinigen Strecke zu. Für den analytischen Längenbegriff einer krummen Linie stellt Du Bois Reymond in seinen Erläuterungen zu den Anfangs-

---

[1]) cf. S. B. 1897, S. 606.

[2]) s. die Note: „Ueber den Begriff der Länge einer Curve." — Acta math., T. VI, p. 167.

gründen der Variations-Rechnung[1]) die folgende Definition auf: „Diese Länge ist die Grenze einer Summe nach bestimmtem Gesetz in's Unbegrenzte sich vermehrender und dabei angemessen sich verkürzender wirklich vorgestellter Längen."

Hieraus geht zunächst hervor, dass unter den oben bezeichneten „Linien" (mit numerisch darstellbarer Länge) jedenfalls gerade Linien, also unter den „geschlossenen" Linien gewöhnliche Polygone gemeint sind. Was sind nun aber Polygone mit „numerisch darstellbarer Länge"? „Numerisch darstellbar" kann doch garnichts anderes bedeuten, als: „durch Zahlen ausdrückbar." Da nun Du Bois Reymond in dem unmittelbar zuvor citirten Satze ohne jede Einschränkung ausspricht, dass z. B. $\sqrt{2}$ „durch Zahlen nicht ausdrückbar" sei, so hätte man offenbar unter „numerisch darstellbar" soviel wie „rational" zu verstehen.

Auf der anderen Seite erscheint es mir aber, soweit meine elementar-geometrischen und algebraischen Kenntnisse reichen, völlig unerfindlich, wie es möglich sein soll, eine asymptotische Annäherung an die Kreisperipherie durch eine unbegrenzte Reihe von Polygonen mit rationalem Umfange herzustellen. Und da ich nicht glauben kann, dass Du Bois Reymond hierüber anderer Meinung war, so bleibt nur die weitere Annahme übrig, dass unter den geschlossenen Linien mit numerisch darstellbarer Länge in dem vorliegenden Falle gerade solche mit irrationaler Gesammtlänge zu verstehen sind — eine Annahme, die freilich im Hinblick auf die unmittelbar zuvor proklamirte numerische Nicht-Darstellbarkeit von $\sqrt{2}$ kein besonders günstiges Licht auf die Consequenz und Correctheit der Du Bois Reymond'schen Ausdrucksweise wirft, zumal es sich doch hier um die Erörterung ziemlich schwieriger Principienfragen und die Einführung eines ganz neuen, von vornherein äusserst fragwürdigen Begriffes handelt.

[1]) Math. Ann. Bd. XV, S. 285.

Steht nun aber einmal die Irrationalität jener Polygone ausser Frage, so ist nicht mehr recht ersichtlich, in wiefern der obige Vergleich dazu dienen soll, die angebliche Beziehung des „irrationalen Unendlich“ zu dem „rationalen“ deutlicher zu machen. Denn erstens erscheint die Zahl π als Grenze einer Zahlenfolge, deren Terme selbst schon irrational sind; zweitens aber ist die Irrationalität von π selbst in gewissem Sinne rein zufällig, d. h. durch die Natur des betreffenden Problems in keiner Weise gefordert. Wählt man nämlich statt des Kreises, der doch in dem obigen Vergleiche lediglich generell den Typus eines eigentlichen d. h. in jedem Punkte mit einer Tangente versehenen Curvenstückes repräsentirt, eine passende andere Curve, z. B. die vom Kreise mit dem Radius 1 erzeugte Cycloide, so liefert der fragliche Grenz-Process die ganze rationale Zahl 8. Mit anderen Worten: der sogenannte analytische Längen-Begriff ist ein rein numerischer Grenz-Begriff, dessen Inhalt sich in keiner Weise mit der Erzeugung des Irrationalen aus dem Rationalen deckt.

Geht man dagegen auf die ursprüngliche geometrische Bedeutung des Längen-Begriffes zurück, so erscheint derselbe, auch wenn es sich um krumme Linien handelt, immerhin als etwas in unserer Vorstellung a priori vollständig vorhandenes, von jeder Grenz-Vorstellung durchaus unabhängiges: man stellt sich eben unter der Länge eines (eigentlichen) Curvenbogens diejenige geradlinige Strecke vor, in welche er durch Biegung oder Abwickelung übergeführt werden kann. Und die Einführung jenes analytischen Längen-Begriffes erscheint lediglich als ein der empirischen Anschauung angepasstes Hülfsmittel zur numerischen Berechnung der geometrischen Länge.

Bei dieser geometrischen Auffassung des Längen-Begriffes wird dann aber der fragliche Vergleich mit dem „irrationalen Unendlich“ erst vollends unverständlich.

Halten wir uns nun schliesslich an die scheinbare Analogie des „irrationalen Unendlich“ mit der gewöhnlichen

Irrationalzahl, so führt eine genauere Betrachtung des wahren Sachverhalts zu dem Ergebnisse, dass auch hier ein brauchbares tertium comparationis in Wahrheit nicht vorhanden ist. Bei der Einführung der Irrationalzahlen handelt es sich darum, die Lücken[1]) einer unstetigen linearen Mannigfaltigkeit durch Schöpfung einer neuen Zahl-Classe auszufüllen. Und die Schöpfung dieser neuen Zahl-Classe erweist sich als durchführbar, da sich die erforderlichen Eigenschaften ihrer Individuen, sowie deren Beziehungen zu einander und zu den bereits vorhandenen (rationalen) Zahlen eindeutig und widerspruchslos definiren lassen. Im vorliegenden Falle ist dagegen von vornherein eine unendlich-vieldimensionale stetige Mannigfaltigkeit vorhanden, und man erkennt weder das Bedürfniss, noch die Möglichkeit, dieselbe durch Einschaltung neu zu schaffender Individuen noch zu „verdichten." Diese Möglichkeit erscheint aber geradezu ausgeschlossen, da der Versuch, jenes „irrationale Unendlich" zu definiren, wie gezeigt wurde, auf logische Widersprüche führt.

Im übrigen ist der tiefere Grund dieses ganzen Du Bois Reymond'schen Irrthums, wie ich schon in meiner ersten Mittheilung hervorhob[2]) und wie seine „Allgemeine Functionentheorie" beweist, darin zu suchen, dass Du Bois Reymond überhaupt zu keiner mathematisch befriedigenden Auffassung des allgemeinen Zahlbegriffes gelangt ist.

Auch wenn man, wie Du Bois Reymond, die (positiven) Zahlen als Zeichen für bestimmte Quantitäten ansieht, so sind sie doch, geradeso wie die Heine-Cantor'schen rein formalen Zahlen, in erster Linie **Zeichen,** deren Beziehungen und Verknüpfungs-Regeln eindeutig und widerspruchslos definirt werden müssen. Es scheint mir für die Begründung der Lehre von den Irrationalzahlen (im Du Bois Reymond'schen Sinne) ziemlich gleichgültig zu sein,

---

[1]) Genauer gesagt: „Schnitte" = „Lücken zweiter Art" — cf. Stolz, Allg. Arithmetik, Bd. I, S. 81.

[2]) a. a. O. S. 606, Fussnote.

ob man die Existenz „lineärer“ Grenzwerthe und hierdurch definirter irrationaler Quantitäten mit dem Du Bois Reymond'schen „Empiristen“ lediglich als eine durch unsere Anschauung näherungsweise bestätigte Fiction oder, mehr idealistisch,[1]) als ein Axiom ansieht. Die Berechtigung, die diesen „irrationalen Quantitäten“ zuzuordnenden Zeichen als **Zahlen** in die Arithmetik einzuführen, beruht doch schliesslich einzig und allein auf der Möglichkeit, die Rechnungs-Operationen für diese neuen Zeichen auf Grund der für rationale Zahlen geltenden Rechnungsregeln formal zu definiren.[2]) Die Auffassung der Zahlen als Quantitäts-Zeichen versagt nun aber vollständig bezüglich der negativen Zahlen, ohne deren Anwendung die allgemeine Arithmetik[3]) sich bisher nicht behelfen konnte und wohl schwerlich auch in Zukunft sich behelfen wird.

---

[1]) Ich sage ausdrücklich nicht: im Sinne des Du Bois Reymond'schen „Idealisten.“ Denn dieser betrachtet die Existenz des Grenzwerthes als eine beweisbare Thatsache. Dass dieser Beweis misslingt, ist selbstverständlich und wird auch von Du Bois Reymond hervorgehoben. Im übrigen wäre es wohl, um dieses negative Resultat zu erreichen, kaum nothwendig gewesen, jenem Idealisten, der keineswegs als abschreckendes Beispiel eines philosophirenden Schwätzers, sondern als ein durchaus ernst zu nehmender Mathematiker eingeführt wird (Allg. Funct.-Theorie, S. 12 und 152), vollkommene Absurditäten, wie die folgende, in den Mund zu legen: *„Die Anzahl sämmtlicher Zahlen ist unendlich. Die Anzahlen werden gemessen durch die ganzen Zahlen: also (!) giebt es unendlich viele ganze Zahlen“* (a. a. O. S. 77). Dagegen *„giebt es der rationalen Zahlen eine unbegrenzt grosse und keine unendliche Menge“* (S. 79).

[2]) vgl. z. B. Illigens, Zur Definition der Irrationalzahlen. Math. Ann. Bd. 35, S. 454. Der Standpunkt des Herrn Illigens bezüglich der Einführung der Irrationalzahlen deckt sich im übrigen genau mit dem oben charakterisirten des „Empiristen,“ und Herr Illigens befindet sich in einem principiellen Irrthume, wenn er meint, seine Definitionsweise der Irrationalzahlen sei eine rein arithmetische. Rein arithmetische Quantitäten sind eine leere Redensart, und auch die blosse „Fiction“ irrationaler Quantitäten ist untrennbar mit der Vorstellung einer stetigen „lineären“ Grösse verknüpft.

[3]) Ich verstehe unter allgemeiner Arithmetik die Zahlen-

Die Begriffe „grösser" und „kleiner" drücken bei der Uebertragung auf negative Zahlen nicht mehr Quantitäts-Unterschiede, sondern lediglich eine bestimmte Succession

---

lehre im weitesten Sinne, insbesondere also auch die Algebra und Analysis (Functionen-Theorie), keineswegs also jenen speciellen Begriff, den Kronecker (Journal für Math. Bd. 100, S. 491) damit verbindet (nämlich: „die arithmetische Theorie ganzer Grössen eines beliebigen natürlichen Rationalitätsbereichs") und den er bei anderer Gelegenheit als eigentliche Arithmetik bezeichnet (Journal f. Math. Bd. 101, S. 345). Wenn also Kronecker an der zuletzt erwähnten Stelle die Bemerkung macht, man könne aus der eigentlichen Arithmetik „alle ihr fremden Begriffe, den der negativen, der gebrochenen und der algebraischen Zahlen ausscheiden," so wird die im Texte gemachte Aussage hierdurch zunächst in keiner Weise getroffen. Im übrigen besteht doch diese angebliche „Ausscheidung" der negativen und der gebrochenen Zahlen lediglich in einer ebenso scharfsinnigen, wie unbequemen Umschreibung der betreffenden Zahlbegriffe, durch welche deren Gebrauch, bezw. derjenige der entsprechenden Zahlzeichen auch für die eigentliche Arithmetik keineswegs entbehrlich wird. Und dass Kronecker selbst sie nicht entbehren konnte, zeigt auf's deutlichste die nun unmittelbar folgende „Ausscheidung" der algebraischen Zahlen (a. a. O. S. 347 ff.). Darnach besagt die „sogenannte" Existenz algebraischer Zahlen nichts anderes, als dass eine ganze ganzzahlige Function innerhalb gewisser, arithmetisch definirbarer, von zwei gebrochenen Rationalzahlen begrenzter Intervalle ihr Vorzeichen wechsele. Man versuche nur einmal, diesen Satz zunächst so zu formuliren und darauf auch so zu beweisen, dass die Begriffe der gebrochenen und der negativen Zahlen nach dem Kronecker'schen Verfahren vollständig „ausgeschieden" werden! Wenn nun aber Kronecker in diesem Aufsatze „Ueber den Zahlbegriff" sogar so weit geht, es für möglich und einzig erstrebenswerth zu halten, dass auch die Arithmetik im weitesten Sinne alle „Modificationen und Erweiterungen des Zahlbegriffes (ausser demjenigen der natürlichen Zahl) wieder abstreife" (a. a. O. S. 339), und wenn er darin die wahre „Arithmetisirung" der betreffenden Disciplinen erblickt, so fehlt mir hierfür jedes Verständniss.

Nach meinem Dafürhalten besteht doch gerade das Wesen der arithmetischen Disciplinen darin, dass sie es ermöglichen, ganze Gedankenreihen, selbst solche von äusserst verwickelter Natur, durch eine verhältnissmässig geringe Anzahl bestimmter Begriffs-

in der geordneten Zahlenreihe aus. Die Multiplication negativer Zahlen kann garnicht anders als rein formal[1]) auf Grund des Princips der Permanenz formaler Gesetze erklärt

zeichen darzustellen. Eine Beseitigung der als Frucht der Geistesarbeit von Generationen mühsam erworbenen und erprobten Begriffe und Zeichen würde nach meiner Ansicht nicht einer „Arithmetisirung," sondern einer völligen Vernichtung jener Disciplinen gleichkommen. Nicht darin, dass man die negativen, gebrochenen und irrationalen Zahlen wieder „abstreift," sondern dass man aus ihren Definitionen alle fremdartigen, insbesondere geometrischen Vorstellungen ausscheidet, scheint mir das wünschenswerthe Maass von „Arithmetisirung" zu liegen. Und dieses Ziel dürfte insbesondere durch die Bemühungen von Weierstrass, Cantor und Dedekind vollständig erreicht worden sein.

[1]) Auf der anderen Seite entbehrt die von Du Bois Reymond zur Bekämpfung der formalen Auffassungsweise des Zahlbegriffes vorgebrachte Behauptung (a. a. O. S. 51):

> *„Wie sehr der Formalismus bei den elementarsten arithmetischen Operationen uns im Stiche lässt, zeigt u. A. das Beispiel der Bruchmultiplikation"*

jeder Spur von Berechtigung. Aus den definirenden Gleichungen:

$$b \cdot \left(\frac{a}{b}\right) = a, \quad b' \cdot \left(\frac{a'}{b'}\right) = a'$$

folgt nämlich zunächst:

$$\left\{b \cdot \left(\frac{a}{b}\right)\right\} \cdot \left\{b' \cdot \left(\frac{a'}{b'}\right)\right\} = a\,a',$$

und daher, wenn der commutative und associative Charakter des Productes erhalten bleiben soll:

$$b\,b' \cdot \left\{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a'}{b'}\right)\right\} = a\,a'.$$

Da andererseits die Definitions-Gleichung besteht:

$$b\,b' \cdot \left(\frac{a\,a'}{b\,b'}\right) = a\,a',$$

so ergiebt sich schliesslich:

$$\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a'}{b'}\right) = \left(\frac{a\,a'}{b\,b'}\right).$$

Die obige Behauptung Du Bois Reymond's erscheint mir hiernach einfach unverständlich.

werden, u. s. f. Kurzum: die negativen Zahlen sind rein formale Zahlen, sie sind blosse Zeichen, welche zu den Zeichen der positiven Zahlen und unter einander in bestimmt definirten Beziehungen stehen.

Nun pflegen doch in arithmetischen Formeln positive und negative Zahlen als völlig gleichberechtigt neben einander aufzutreten; ja ein und dasselbe Zeichen kann zumeist ganz nach Belieben eine positive oder negative Zahl vorstellen. Wie man in einer solchen arithmetischen Formel noch eigentliche Quantitätszeichen und blosse Formalzahlen auseinanderhalten will, scheint mir völlig unerfindlich. Und, was Du Bois Reymond lediglich als eine Art Gewöhnung hinstellt (a. a. O. S. 50) nämlich:

> *„dass, wenn wir in eine numerische Ausrechnung oder in eine algebraische Untersuchung vertieft sind, es uns nicht einfällt, unter unseren Zahlen oder Buchstaben, welche unbestimmt gelassene Zahlen bedeuten, wirkliche Grössen beständig uns vorzustellen"* —

das ist in Wahrheit eine absolute und zwingende Nothwendigkeit. Soll also eine solche arithmetische Formel etwas besseres vorstellen, als die graphische Fixirung einer heillosen Begriffsverwirrung, so ist man schon in dem aller-elementarsten Stadium der Arithmetik (nämlich bei und nach der Einführung der ganzen negativen Zahlen) gezwungen, die Auffassung der Zahlen als Quantitätszeichen vollständig fallen zu lassen. In wieweit man bei der Einführung der positiven Zahlen (auch der gebrochenen und irrationalen) aus historischen und didaktischen Rücksichten den Quantitäts-Begriff zu Grunde legen will, ist schliesslich Geschmacks- und Ansichtssache. Eine einheitliche Auffassung der arithmetischen Operationen und ein consequenter Aufbau der allgemeinen Arithmetik ist aber auf diesem Wege nimmer zu erzielen.

Will man hierzu gelangen, so dürfte es am einfachsten erscheinen, schon die positiven ganzen Zahlen nicht als Quantitätszeichen zu definiren, sondern, nach dem Vorgange

von Helmholtz[1]) und Kronecker[2]) an den Begriff der Ordnungszahlen anknüpfend, als Zeichen, denen lediglich eine bestimmte Succession zukommt. Diese mit einem bestimmten Zeichen beginnende und unbegrenzt fortsetzbare Zeichen-Folge lässt sich dann auf Grund der für sie definirbaren Rechnungs-Operationen durch Einführung der Null, der negativen, gebrochenen und irrationalen[3]) Zahlen zu einem Zeichen-System ausgestalten, welches im Cantor'schen Sinne eine zweifach unbegrenzte, lineare, stetige Mannigfaltigkeit bildet. Es bietet alsdann keinerlei Schwierigkeit, a posteriori festzustellen, in wieweit die Individuen dieses Zeichen-Systems geeignet sind bestimmte Quantitäten (z. B. Anzahlen discreter Vielheiten, Längen) oder andere Objecte (z. B. Punkte, Strecken der Länge und Richtung nach) vorzustellen, und in welcher Weise die zwischen ihnen möglichen Beziehungen dazu dienen können, die Beziehungen solcher Objecte abzubilden.

Da Du Bois Reymond diese von ihm etwas geringschätzig als „literaler Formalismus" bezeichnete Auffassung der Arithmetik principiell verwirft und ihr nur allenfalls für praktische Lehrzwecke eine gewisse Berechtigung zuerkennen will,[4]) so scheint er garnicht bemerkt zu haben, dass sein ganzer Infinitär-Calcül durchaus auf einem solchen literalen Formalismus beruht, mit anderen Worten, dass dabei garnicht Quantitäts-Vergleichungen, sondern, wie in Art. 1 des näheren erörtert wurde, lediglich — bis zu einem gewissen Grade willkürlich definirte — Successionen in Frage kommen. Und er findet auf Grund seiner „einge-

---

[1]) „Zählen und Messen, erkenntnisstheoretisch betrachtet," Ges. Abh. Bd. III, S. 360.

[2]) In dem schon oben citirten Aufsatze: „Ueber den Zahlbegriff." A. a. O. S. 339.

[3]) Am einfachsten wohl nach Cantor (s. Heine, die Elemente der Functionenlehre. Journ. f. Math. Bd. 74, S. 174 ff. Cantor, Math. Ann. Bd. 5, S. 123 ff. Bd. 21, S. 567 ff.).

[4]) a. a. O. S. 55.

wurzelten Grössenvorstellungen“ da „Paradoxen“, wo in Wahrheit nur eine unzulässige Anwendung von Quantitäts-Vortellungen vorliegt.

4.

Ich möchte bei dieser Gelegenheit noch einen anderen Punkt besprechen, welcher gleichfalls geeignet ist, die Unklarheit der Du Bois Reymond'schen Grenz-Vorstellungen in Evidenz zu setzen. Auf S. 165 seiner Allgemeinen Functionentheorie heisst es im Hinblick auf das sogenannte „allgemeine Convergenz- und Divergenz-Princip“:[1]) *„So wenig Beachtung war ihm geschenkt worden, dass ich 1871 einen besonderen Fall des Princips (dass eine Reihe $u_1 + u_2 +$ etc. convergirt, wenn der Cauchy'sche Ausschnitt $u_m + u_{m+1} + \ldots + u_n$ bei in's Unbegrenzte zunehmenden m und n stets die Grenze Null hat) für eines Beweises bedürftig erklären musste.“*[2])

Hierzu will ich zunächst historisch bemerken, dass die fragliche Cauchy'sche Formulirung der Convergenz-Bedingung sich in den Exercices de Mathématiques, T. II, p. 221 vorfindet, und auch anderen Reihen-Theoretikern bereits Anlass zu kritischen Erörterungen gegeben hat. Sie lautet, wenn $u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = s_n$ gesetzt wird, in der Originalfassung: „Pour que la série soit convergente, il est nécessaire, et il suffit que la différence

$$s_{n+m} - s_n = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+m-1}$$

devienne infiniment petite, quand on attribue au nombre n une valeur infiniment grande, quel que soit d'ailleurs le nombre entier représenté par m.“[3]) Dabei ist der auf die Zahl m bezügliche Zusatz so zu verstehen, dass

---

[1]) Darunter versteht Du Bois Reymond das bekannte Kriterium für die Existenz bezw. Nicht-Existenz eines bestimmten Grenzwerthes; cf. Allg. Funct.-Th. S. 6.

[2]) Dabei wird auf S. 2 des Antrittsprogramms: „Neue Lehrsätze über die Summen unendlicher Reihen“ (Freiburg 1871) verwiesen.

[3]) Aehnlich übrigens bei Abel: Crelle's Journal, Bd. 1, S. 313. (1826).

m sowohl eine bestimmte, d. h. bei wachsendem n constante, beliebig gross anzunehmende Zahl vorstellen oder auch gleichzeitig mit n und zwar in ganz beliebiger Weise in's Unendliche wachsend gedacht werden kann.[1]) Dies geht freilich aus der von Cauchy gewählten Fassung allein nicht mit genügender Deutlichkeit hervor. Es folgt aber mit absoluter Sicherheit aus der Art und Weise, wie Cauchy auf den unmittelbar folgenden Seiten der betreffenden Abhandlung „Sur la convergence des séries" jene Convergenz-Bedingung anwendet. So erschliesst er aus derselben die Divergenz von $\sum \frac{1}{n}$, weil hier der fragliche $\lim_{n=\infty} (s_{n+m} - s_n)$ zwar für jedes noch so grosse endliche m verschwindet, dagegen unendlich gross wird, wenn m so unendlich wird, wie n oder ein endliches Multiplum von n (a. a. O. S. 225). Und er folgert ferner die Divergenz von $\sum \frac{1}{n \lg n}$ daraus, dass jener Grenzwerth, der noch verschwindet, wenn m so wie n in's Unendliche wächst, unendlich ausfällt, wenn $m = n(n+1)$ oder $n(n+1)^2$ etc.[2])

Lediglich der Nicht-Beachtung dieser den eigentlichen Sinn der Cauchy'schen Convergenz-Bedingung unzweideutig fixirenden Ausführungen ist es zuzuschreiben, dass Catalan in seinem „Traité élémentaire des séries" (Paris 1860) dieselbe schlechthin für falsch erklärt.[3]) Dabei versteht er jene Bedingung zunächst in der Weise, dass m lediglich jede

---

[1]) Es genügt sogar, ausschliesslich solche Werthe m in's Auge zu fassen, welche gleichzeitig mit n in beliebiger Weise unendlich werden — vgl. den Schluss dieses Artikels.

[2]) Beiläufig bemerkt wird wohl das auf die Reihe $\sum \frac{1}{n \lg n}$ bezügliche Resultat gewöhnlich Abel zugeschrieben. Die betreffende Mittheilung Abel's: Note sur le mémoire de Mr. Olivier: „Remarques sur les séries infinies etc." (Crelle's Journal, Bd. 3, S. 74) ist aber um ein Jahr später erschienen (1828), als der citirte Band der Exercices.

[3]) a. a. O. S. 4, Fussnote.

noch so grosse bestimmte Zahl bedeuten soll, und fügt hinzu, dass sie selbst dann nicht richtig ist, wenn man auch unendlich grosse Werthe von m zulässt. Da er sich aber hierbei ausdrücklich auf das Beispiel der Reihe $\sum \frac{1}{n \lg n}$ beruft,[1]) so geht daraus mit vollster Sicherheit hervor, dass er jene Cauchy'sche Abhandlung garnicht gelesen haben kann und aus diesem Grunde den Sinn der obigen Bedingung missverstanden hat.

Laurent in seiner „Théorie des séries" (Paris 1862) erwähnt (S. 6), dass Catalan jene Bedingung für unzureichend erklärt habe, und fährt dann fort: „Sans oser partager son opinion, je laisserai de côté ce théorème, qui n'est nullement indispensable dans la théorie des séries." Im übrigen steht er, wie einige weitere theils nichtssagende, theils geradezu falsche Bemerkungen beweisen, dieser Frage doch völlig rathlos gegenüber und findet sich damit schliesslich sehr einfach in der Weise ab, dass er sagt: „Marchons droit à notre but et tournons l'obstacle, qu'il serait trop difficile de renverser."

Wie weiter unten gezeigt werden soll, steht die Richtigkeit der Cauchy'schen Bedingung, wenn man nur ihren Inhalt von vornherein richtig auffasst, ausser Zweifel. Du Bois Reymond giebt derselben in dem oben citirten „Antrittsprogramm" (S. 1) die folgende Form:

> *U ist endlich und bestimmt oder U ist es nicht, jenachdem die Summe*
>
> $$u_m + u_{m+1} + \cdots + u_n$$
>
> *Null zur Grenze hat oder nicht, wenn m und n mit irgend welcher relativen Geschwindigkeit unendlich werden.* (Dabei ist: $U = \lim_{n=\infty} U_n$ und: $U_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$).

Nachdem dann kurz erwähnt ist, dass der auf die Diver-

[1]) a. a. O. S. 6.

genz von $\sum u_\nu$ bezügliche Theil dieser Aussage leicht erwiesen werden kann, heisst es weiter:

„*Nicht so leicht ist zu beweisen, dass, wenn* $u_m + u_{m+1} + \ldots + u_n$ *für* $m = \infty$, $n = \infty$ *stets verschwindet,* U *nicht auch unbestimmt oder unendlich werden könne. Wiewohl man das vorstehende Princip öfters anwendet, ist mir ein strenger Beweis dafür nicht bekannt, und ich werde es hier voraussetzen, diesen Beweis aber, der mir ohne den Begriff des bestimmten Integrals nicht scheint geführt werden zu können, an einer anderen Stelle nachtragen.*“

Dabei wird auf eine „demnächst zu veröffentlichende“ Schrift: Die Theorie der Convergenz und Divergenz bestimmter Integrale und unendlicher Reihen — hingewiesen.

Diese Schrift, welche Du Bois Reymond auch noch an einer anderen Stelle[1]) als demnächst bei B. G. Teubner erscheinend citirt, ist meines Wissens niemals erschienen: aus welchen Gründen, ist mir unbekannt. Aber auch anderwärts scheint der in Rede stehende Beweis nicht publicirt worden zu sein. Immerhin wäre ja in dieser Beziehung ein Irrthum von meiner Seite nicht ausgeschlossen, und ich bin sogar sehr geneigt, an einen solchen zu glauben, da kaum anzunehmen ist, dass ein Mathematiker, der einen für unbewiesen erkannten und für nicht leicht beweisbar erklärten Satz benützt und den Beweis dafür in Aussicht stellt, ganze 11 Jahre später sich ausdrücklich dieser That rühmen sollte, ohne den versprochenen Beweis nachgeliefert zu haben.

Im übrigen genügt die oben citirte, auf die Form dieses Beweises bezügliche Andeutung vollständig, um zu erkennen, dass Du Bois Reymond den eigentlichen Kern der vorliegenden Frage völlig missverstanden hat. Gewiss kann es in manchen Fällen bequemer erscheinen, Eigenschaften unendlicher Reihen als specielle Fälle von Integral-Eigenschaften abzuleiten; ja bei Reihen-Sätzen complicirter Natur kann

---

[1]) Annal. di Mat. S. II, T. IV, p. 338, Fussnote.

dieser Weg möglicherweise als der einzig brauchbare gelten, da die Einführung des Continuitäts- und Infinitesimalbegriffes die Anwendung eines übersichtlichen und wunderbar wirksamen Algorithmus gestattet, für welchen bei der Beschränkung auf discontinuirliche Mannigfaltigkeiten kein Ersatz vorhanden ist. Hier aber handelt es sich lediglich um die principielle Begründung eines einfachen, auf die Existenz des Grenzwerthes einer abzählbaren Menge bezüglichen Fundamental-Satzes. Und wenn jemand behauptet, dieser Satz lasse sich nur durch Anwendung des bestimmten Integrals begründen, so begeht er damit einen schweren logischen Fehler[1]) und zeigt nach meiner Ansicht unwiderleglich, dass er von vornherein mit falschen Grenz-Vorstellungen arbeitet. Um diese meine Ansicht vollends zu rechtfertigen, wird es schliesslich nur noch nöthig erscheinen, den sehr einfachen Beweis des fraglichen Satzes hier wirklich folgen zu lassen.

Bevor ich hierzu übergehe, erscheint es mir zweckmässig, zunächst den Unterschied zwischen der Cauchy'schen Formulirung der Convergenz-Bedingung und der sonst üblichen deutlich hervorzuheben. Diese letztere lautet mit Benützung der oben von Du Bois Reymond angewendeten Bezeichnungen folgendermaassen:

---

[1]) Denselben logischen Fehler begeht übrigens Du Bois Reymond an einer auf die besprochene unmittelbar folgenden Stelle (a. a. O. S. 2, Satz 3); auch: Zur Geschichte der trigonometrischen Reihen, S. 58, Fussnote), indem er die Beziehung:

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$$
$$= v_1 (u_1 + u_2 + \ldots + u_r + \vartheta u_{r+1}) + v_n ((1 - \vartheta) u_{r+1} + u_{r+2} + \cdots +_n)$$

als eine Folge „seines" Integral-Mittelwerthsatzes hinstellt. Dieselbe ist vielmehr eine ganz direkte Consequenz des bekannten Abel'schen Lemma's (Journ. f. Math. Bd. 1, S. 314) und steht zu dessen gewöhnlicher Form genau in demselben Verhältniss, wie die Du Bois Reymond'sche Form des Mittelwerthsatzes zu der von Bonnet aufgefundenen Fundamentalform, welche keineswegs, wie Du Bois Reymond prätendirt, lediglich einen besonderen Fall „seines" Mittelwerthsatzes darstellt (Zur Gesch. d. trig. R. S. 58).

Für die Convergenz der Reihe $\sum u_\nu$ ist nothwendig und hinreichend, dass:

$$(1) \qquad | U_{m_0+\varrho} - U_{m_0} | < \varepsilon \quad \text{für: } \varrho = 0, 1, 2, \ldots$$

d. h. jeder (beliebig kleinen) Zahl $\varepsilon > 0$ muss sich eine ganze Zahl m_0 so zuordnen lassen, dass Ungl. (1) für jeden ganzzahligen Werth von ϱ besteht.

Die Richtigkeit dieser Aussage bedarf keines Beweises, dieselbe deckt sich in Wahrheit vollständig mit der Definition der Convergenz, d. h. der Existenz eines bestimmten Grenzwerthes $\lim\limits_{n=\infty} U_n$. Denn die Ungleichung (1) enthält geradezu die Definition der Grenzwerth-Existenz im Cantor'schen Sinne, die nothwendige und hinreichende Bedingung derselben (das „allgemeine Convergenz-Princip") im Du Bois Reymond'schen Sinne.

Bedeuten dann m, n zwei beliebige ganze Zahlen $\geqq m_0$, so hat man nach (1):

$$| U_m - U_{m_0} | < \varepsilon, \quad | U_n - U_{m_0} | < \varepsilon$$

und daher:

$$(2) \qquad | U_n - U_m | < 2\varepsilon \quad \text{für: } \begin{cases} m \geqq m_0 \\ n \geqq m_0 \end{cases}.$$

Alsdann wird aber allemal:

$$(3) \qquad \lim_{m=\infty,\, n=\infty} | U_n - U_m | = 0,$$

ohne dass über die Art des Grenzüberganges von m und n irgendwelche besondere Fortsetzung getroffen zu werden braucht.

Also: Aus der üblichen Form (1) der Convergenz-Bedingung lässt sich stets die Existenz der Cauchy'schen Bedingung herleiten.

Aber auch das Umgekehrte kann ebenso einfach gezeigt werden. Angenommen nämlich es bestehe die Cauchy'sche Bedingung (3) in dem von Du Bois Reymond festgesetzten Sinne d. h. mit der Einschränkung $n \geqq m$, oder, um mich ganz

genau der Du Bois Reymond'schen Bezeichnungsweise anzuschliessen, es bestehe die Beziehung:

$$(4) \qquad \lim_{m=\infty,\, n=\infty} (u_m + u_{m+1} + \ldots + u_n) = 0,$$

wenn m und n mit irgend welcher relativen Geschwindigkeit unendlich werden, so setze man $n = m + p$, wo $p \geqq 0$ wegen $n \geqq m$. Alsdann folgt aus (4), dass:

$$(5) \qquad \lim_{m=\infty} (u_m + u_{m+1} + \ldots + u_{m+p}) = 0,$$

gleichgültig ob p als constant oder gleichzeitig mit m in's Unendliche wachsend angenommen wird. Die Bedingung (5) zerfällt also in Wahrheit in die folgenden zwei Bedingungen:

$$(5\text{a}) \qquad \lim_{m=\infty} (u_m + u_{m+1} + \ldots + u_{m+p}) = 0$$

für jedes einzelne $p = 0, 1, 2, \ldots,$ und:

$$(5\text{b}) \qquad \lim_{m=\infty,\, p=\infty} (u_m + u_{m+1} + \ldots + u_{m+p}) = 0.$$

Die Bedingung (5a) würde selbstverständlich für die Convergenz von $\sum u_\nu$ nicht genügen (sie ist nämlich allemal schon erfüllt, wenn nur $\lim\limits_{m=\infty} u_m = 0$).

Dagegen lässt sich zeigen, dass die Convergenz der Reihe schon aus der Bedingung (5b) allein folgt. Mit anderen Worten: Die Cauchy'sche Bedingung ist für die Convergenz der Reihe nicht nur hinreichend, sondern sie lässt sich sogar von vornherein noch durch eine formal etwas weniger verlangende ersetzen.[1])

---

[1]) Gerade um dies deutlich zu machen, habe ich den vorliegenden etwas umständlicheren Weg eingeschlagen. Andernfalls könnte man auf Grund der Definition des Grenzwerthes einer zweifach-unendlichen Zahlenfolge (s. z. B. meinen Aufsatz über Unendliche Doppelreihen, Sitz.-B. S. 103) aus Ungl. (3) ohne weiteres schliessen, dass:

$$|U_n - U_m| < \varepsilon$$

Die Gl. (5b) besagt nämlich: Jeder Zahl $\varepsilon > 0$ lassen sich zwei ganze Zahlen m_0, p_0 so zuordnen, dass:

$$|u_m + u_{m+1} + \dots + u_{m+p}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für: } m \geqq m_0,\ p \geqq p_0.$$

Alsdann wird aber:

$$|u_{m_0} + u_{m_0+1} + \dots + u_{m_0+p_0+\varrho}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für: } \varrho = 0, 1, 2, \dots,$$

also speciell:

$$|u_{m_0} + u_{m_0+1} + \dots + u_{m_0+p_0}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und daher durch Substraction:

$$|u_{m_0+p_0+1} + \dots + u_{m_0+p_0+\varrho}| < \varepsilon \text{ für: } \varrho = 1, 2, 3, \dots$$

oder, wenn man noch $m_0 + p_0 = n_0$ setzt:

(6) $|u_{n_0+1} + \dots + u_{n_0+\varrho}| = |U_{n_0+\varrho} - U_{n_0}| < \varepsilon$ für: $\varrho = 1, 2, 3, \dots,$

womit nach Ungl. (1) die Convergenz der betreffenden Reihe erwiesen ist.

---

etwa für $m \geqq m'$, $n \geqq n'$, und daher wenn m_0 die grössere der beiden Zahlen m', n' bedeutet:

$$|U_n - U_{m_0}| < \varepsilon \text{ für: } n \geqq m_0,$$

eine Ungleichung, deren Inhalt genau mit demjenigen der Convergenz-Bedingung (1) übereinstimmt.

10

Ueber zwei Abel'sche Sätze, die Stetigkeit von Reihensummen betreffend.

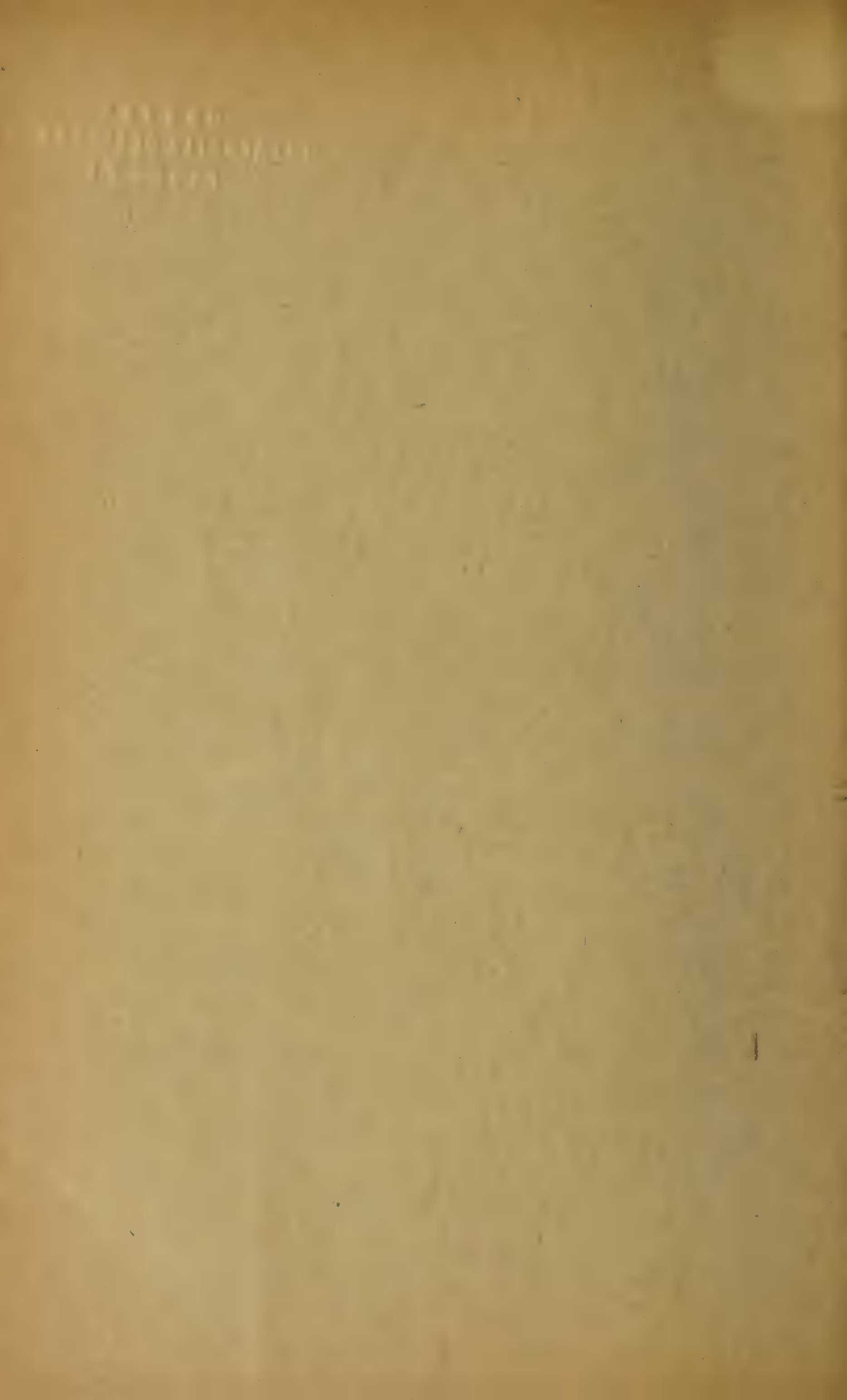
Von

Alfred Pringsheim.

Aus den Sitzungsberichten der mathematisch-physikalischen Classe der k. bayer. Akad. d. Wiss. Bd. XXVII. 1897. Heft II.

München 1897.

Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub.



Ueber zwei Abel'sche Sätze, die Stetigkeit von Reihensummen betreffend.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 10. Juli.*)

In seiner berühmten Abhandlung über die binomische Reihe hat Abel zwei wesentlich verschiedene, auf die Stetigkeit einer Potenzreihe bezügliche Sätze abgeleitet.[1]) In dem ersten[2]) dieser Sätze wird die Stetigkeit der Summe $S(x) = \sum_0^\infty {}^\nu\, a_\nu x^\nu$ als Function von x erwiesen; bei dem zweiten[3]) treten an die Stelle der constanten Coefficienten a_ν stetige Functionen einer reellen Veränderlichen y, und es handelt sich um die Stetigkeit einer Reihensumme von der Form $S(x, y) = \sum_0^\infty {}^\nu\, f_\nu(y) \cdot x^\nu$ bei constantem x und veränderlichem y.

Zweck der folgenden Mittheilung ist es, zunächst an den ersten dieser Sätze einige historische Bemerkungen zu knüpfen und hierauf eine von Herrn Stolz herrührende Verallgemeinerung desselben etwas anders zu formuliren und elementarer zu beweisen. Sodann sollen die gegen den zweiten Satz erhobenen Einwendungen, welche in Wahrheit nicht die Gültigkeit des Satzes selbst, sondern nur diejenige des Abel'schen

---

[1]) Crelle's Journal, Bd. I, S. 314, 315. — Oeuvres compl., Éd. Sylow et Lie, T. I p. 223, 224.

[2]) a. a. O. Lehrsatz IV.

[3]) a. a. O. Lehrsatz V.

Beweises in Frage stellen, sowie die zu seiner Rettung vorgeschlagenen Modificationen besprochen und durch den Nachweis ergänzt werden, dass der fragliche Satz in der von Abel gegebenen Fassung wirklich unrichtig ist.

1.

Der erste der genannten Sätze sagt aus, dass die für irgend einen positiven Werth $x = X$ als convergent vorausgesetzte Reihe $\sum_0^\infty {}_\nu\, a_\nu x^\nu$ für jeden kleineren positiven Werth x gleichfalls convergirt, und dass sodann ihre Summe $S(x)$ für $x \leqq X$ eine stetige Function von x darstellt.

Was den von Abel gelieferten Beweis besonders auszeichnet, ist der Umstand, dass dabei keineswegs die absolute Convergenz der Reihe für $x = X$ vorausgesetzt, noch von der für $x < X$ sicher vorhandenen absoluten Convergenz Gebrauch gemacht wird. Der Kern des Beweises besteht vielmehr darin, dass — nach heutiger Ausdrucksweise — die gleichmässige Convergenz der Reihe für das Intervall $0 \leqq x \leqq X$ (also insbesondere mit Einschluss der Grenze X) dargethan wird, sofern nur $\sum_0^\infty {}_\nu\, a_\nu X^\nu$ überhaupt (d. h. eventuell auch nur bedingt) convergirt.

Es mag uns heutzutage, wo der Begriff der gleichmässigen Convergenz ein allgemein geläufiger Elementar-Begriff geworden ist, kaum erklärlich erscheinen, dass dieser von Abel schon im Jahre 1827 publicirte, äusserst einfache und völlig einwurfsfreie Beweis lange Zeit überhaupt nicht verstanden oder doch schwer verständlich befunden wurde, und dass noch im Jahre 1862 ein so scharfsinniger Mathematiker wie Lionville ausdrücklich erklärt hat:[1]) er finde den fraglichen Beweis „schwer auseinanderzusetzen und sogar schwer zu verstehen,“ weshalb er Dirichlet zur Abfassung

---

[1]) Journal des Math., 2ième Série, T. 7, p. 253.

eines anderen Beweises veranlasst habe. In Wahrheit ist aber dieser an der betreffenden Stelle mitgetheilte Dirichlet'sche Beweis nicht nur merklich complicirter als der Abel'sche, sondern auch viel weniger geeignet, die wahre Grundlage der Stetigkeit einer Potenzreihe deutlich hervortreten zu lassen. Und ich kann es mir lediglich aus einem förmlichen Aberglauben gegen den Abel'schen Beweis erklären, dass man an dessen Stelle auch in manchen neueren, schon dem Zeitalter der gleichmässigen Convergenz angehörigen Lehrbüchern[1]) den schwierigeren und weniger prägnanten Dirichlet'schen Beweis findet.

Will man sich ein Bild davon machen, welch' mangelhaftes Verständniss die Abel'sche Abhandlung über die Binominialreihe und insbesondere seine Stetigkeits-Sätze noch bis in die Mitte des Jahrhunderts gefunden haben, so lese man die zum Theil geradezu absurden Einwendungen, welche Björling in seinen „Doctrinae serierum infinitarum exercitationes"[2]) dagegen erhoben hat.[3]) Ohne auf dieselben im einzelnen einzugehen, möchte ich wenigstens einen Punkt hier hervorheben. Bekanntlich ist Abel zur Aufstellung seiner Stetigkeitssätze für die specielle Classe der Potenzreihen durch die Erkenntniss veranlasst worden, dass der von Cauchy (Anal. algébr. p. 131) ausgesprochene allgemeine Stetigkeits-Satz nicht haltbar sei, wie das Beispiel der Reihe $\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \sin \nu x$ beweise.[4]) Dem gegenüber erhält Björling den Cauchy'schen Stetigkeits-Satz vollkommen aufrecht,[5]) und glaubt Ausnahmefälle, wie den eben genannten, durch Aufstellung des folgenden Principes erledigen zu können:

---

[1]) z. B. Briot et Bouquet, Théorie des fonctions elliptiques, 2ième éd. 1875, p. 86.. Thomae, Elementare Theorie der analytischen Functionen, 1880. S. 48.

[2]) Nova Acta Upsal. T. XIII (1847).

[3]) a. a. O. S. 62. 66. 156.

[4]) s. Fussnote zu Lehrsatz V. a. a. O. S. 316 bezw. 224.

[5]) a. a. O. S. 63.

Wenn eine Reihe $\sum f_\nu(x)$ auch für einen gewissen Werth X und für jeden einzelnen Werth $x < X$ convergirt, so folge daraus noch keineswegs, dass sie auch in unendlicher Nähe der Stelle X convergiren müsse (!). Gerade aus der Unstetigkeit der oben genannten Reihe für $x = 0$ gehe aber unzweideutig hervor, dass dieselbe in unendlicher Nähe von $x = 0$ nicht mehr convergire, da für eine in irgend einem Intervalle wirklich „in einem Zuge“ d. h. ausnahmslos convergirende Reihe *(series uno tenore convergens)* die Gültigkeit des Cauchy'schen Stetigkeits-Satzes ausser Frage stehe. Selbstverständlich beruht dieser Fehlschluss (genau wie bei Cauchy) auf der Supposition, dass eine in irgend einem Intervalle ausnahmslos convergirende Reihe eo ipso jene Eigenschaft besitzen müsse, die wir heute als gleichmässige Convergenz bezeichnen, während auf der anderen Seite das (von Björling völlig unverstandene) Verdienst Abel's gerade darin besteht, dass er für die specielle Classe der Potenzreihen die Existenz dieser Eigenschaft wirklich bewiesen hat. —

Der in Rede stehende Abel'sche Satz lässt sich bekanntlich ohne weiteres auf den Fall einer complexen Veränderlichen x in der Weise übertragen,[1]) dass daraus die Stetigkeit der Reihensumme bezw. die gleichmässige Convergenz der Reihe hervorgeht für alle Stellen x irgend eines Radius $\overline{0X}$, mit Einschluss des Peripherie-Punktes X (natürlich wieder unter der Voraussetzung, dass für $x = X$ die Convergenz der Reihe feststeht). Herr Stolz hat sodann diesen Satz durch Hinzufügung des Nachweises erweitert, dass die gleichmässige Convergenz erhalten bleibt für alle Stellen eines Strahles $\overline{x_0 X}$, falls x_0 einen beliebigen Punkt im Innern des Convergenz-Kreises bedeutet.[2])

Da der Beweis des Herrn Stolz die Darstellung der complexen Zahlen durch trigonometrische Functionen erfordert,

---

[1]) s. z. B. Briot et Bouquet a. a. O.

[2]) Zeitschr. f. Math. Bd. XX, S. 370. — Bd. XXIX, S. 127. — Vorles. über allg. Arithmetik, Bd. II, S. 157.

und es mir andererseits wünschenswerth erscheint, derartige den Elementen der Functionenlehre angehörige Sätze nach dem Vorgange von Weierstrass, soweit als möglich, ohne Anwendung dieses transscendenten Hülfsmittels zu begründen, so möchte ich mir erlauben, einen rein elementaren Beweis des betreffenden Satzes hier mitzutheilen. Dabei halte ich es für zweckmässig, dem letzteren die folgende Fassung zu geben:

Convergirt die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ für irgend einen Peripherie-Punkt X ihres Convergenz-Kreises, so convergirt sie **gleichmässig** für alle Stellen x im Innern und auf der Begrenzung jedes Dreiecks $x_0 X x_1$, wo x_0, x_1 zwei beliebige Punkte im Innern des Convergenz-Kreises bedeuten.

Um den Beweis des Satzes etwas zu vereinfachen, bemerke man, dass durch die Substitution:

$$(1) \qquad x = X \cdot x' \quad (\text{also: } x' = \frac{x}{X},\ x'_{x=X} = 1)$$

die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ in eine solche von der Form: $\sum (a_\nu X^\nu) \cdot x'^\nu = \sum a'_\nu \cdot x'^\nu$ übergeht, welche den Convergenz-Radius 1 besitzt und für die Stelle $x = 1$ noch convergirt. Da sodann vermöge der linearen Relation (1) jeder im Innern des ursprünglichen Kreises verlaufenden Geraden $\overline{xX}$ eine im Innern des Einheitskreises verlaufende Gerade $\overline{x'1}$ entspricht und umgekehrt, so genügt es offenbar, statt des oben ausgesprochenen Satzes den folgenden zu beweisen:

Ist die Reihe $\sum a_\nu$ convergent (wenn auch nur **bedingt**), so convergirt $\sum a_\nu x^\nu$ **gleichmässig** für alle Stellen x im Innern und auf der Begrenzung jedes Dreiecks $x_0 1 x_1$, wo: $|x_0| < 1$, $|x_1| < 1$.

Beweis. Zieht man vom Punkte E, welcher den Werth $x = 1$ repräsentiren soll, eine beliebige Sehne $\overline{EB}$ und fällt von B ein Loth $\overline{BA}$ auf die reelle Axe $\overline{OE}$, so mag gesetzt werden:

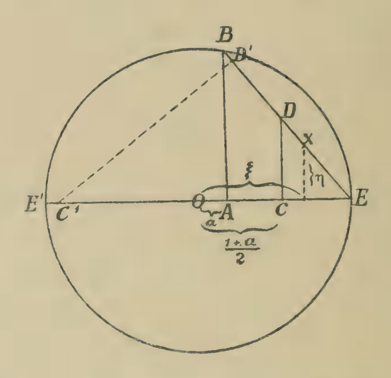
$$(2) \qquad \overline{OA} = a, \quad \text{also: } \overline{BA} = \sqrt{1 - a^2}.$$

Die Coordinaten ξ, η eines jeden auf $\overline{EB}$ gelegenen Punktes $x = \xi + \eta i$ genügen alsdann der Bedingung:

$$\frac{\eta}{1-\xi} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AE}} = \frac{\sqrt{1-a^2}}{1-a} = \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}$$

sodass also:

$$(3) \qquad \eta = p \cdot (1-\xi), \quad \text{wo: } p = \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}.$$



Bezeichnet also ϑ eine dem Intervalle $0 < \vartheta \leqq 1$ angehörige Zahl, so werden die beiden Beziehungen:

$$(4) \qquad \begin{cases} a \leqq \xi \leqq 1 \\ \eta = \vartheta \cdot p \cdot (1-\xi) \end{cases}$$

die Coordinaten aller möglichen Punkte $x = \xi + \eta i$ definiren, welche der Begrenzung oder dem Innern des Dreiecks BAE angehören.

Es werde nun vorläufig ξ noch in der Weise eingeschränkt, dass:

$$(5) \qquad \xi \geqq \frac{1+a}{2} \; (= \overline{OC})$$

und daher:

$$(6) \qquad 1 - \xi \leqq \frac{1-a}{2}, \quad 1 + \xi \geqq \frac{3+a}{2}.$$

Dann soll zunächst bewiesen werden, dass $\sum a_\nu x^\nu$ für alle Stellen des in der Figur mit DCE bezeichneten rechtwinkligen

Dreiecks einschliesslich der Begrenzung gleichmässig convergirt.

In Folge der Convergenz von $\sum a_\nu$ lässt sich einem beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n so zuordnen, dass:

$$\left| R_n^{(n+k)} \right| = \left| \sum_n^{n+k} {}^\nu a_\nu \right| < \varepsilon \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Andererseits findet man mit Hülfe der Abel'schen Transformation:

$$\begin{aligned} \sum_n^{n+k} {}^\nu a_\nu x^\nu &= \sum_n^{n+k-1} {}^\nu R_n^{(\nu)} (x^\nu - x^{\nu+1}) + R_n^{(n+k)} \cdot x^{n+k} \\ &= x^n (1-x) \left\{ \sum_0^{k-1} {}^\nu R_n^{(n+\nu)} \cdot x^\nu + R_n^{(n+k)} \cdot \frac{x^k}{1-x} \right\} \end{aligned}$$

und daher mit Berücksichtigung von Ungl. (7):

$$\left| \sum_n^{n+k} {}^\nu a_\nu x^\nu \right| < \varepsilon \cdot |x|^n \cdot |1-x| \cdot \left\{ \frac{1-|x|^k}{1-|x|} + \frac{|x|^k}{|1-x|} \right\}.$$

Da aber $|x| \leqq 1$ und: $|1-x| \geqq |1-|x|| = 1-|x|$, so kann man im Nenner des letzten Gliedes $|1-x|$ durch $1-|x|$ ersetzen, sodass sich ergiebt:

$$\left| \sum_n^{n+k} {}^\nu a_\nu x^\nu \right| < \varepsilon \cdot \frac{|1-x|}{1-|x|} \tag{8}$$

Man hat aber, wenn $x = \xi + \eta i$ dem oben bezeichneten Bereiche angehört, mit Benützung der Beziehungen (3), (4) und (6):

$$\begin{aligned} \frac{|1-x|}{1-|x|} = (1+|x|) \cdot \frac{|1-x|}{1-|x|^2} &\leqq 2 \cdot \frac{\sqrt{(1-\xi)^2 + \eta^2}}{1-(\xi^2+\eta^2)} \\ &\leqq 2 \cdot \frac{(1-\xi) \cdot \sqrt{1+\vartheta^2 p^2}}{1-\xi^2 - \vartheta^2 p^2 (1-\xi)^2} \quad \text{(s. Gl. (4))} \\ &\leqq 2 \cdot \frac{\sqrt{1+p^2}}{1+\xi - p^2(1-\xi)} \end{aligned}$$

$$\leq 2 \cdot \frac{\sqrt{\frac{2}{1-a}}}{\frac{3+a}{2} - \frac{1+a}{1-a} \cdot \frac{1-a}{2}} \quad \text{(s. Gl. (3), Ungl. (6)).}$$

$$\leq \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{1-a}},$$

sodass Ungl. (8) schliesslich in die folgende übergeht:

$$(9) \qquad \left| \sum_{n}^{n+k} {}^{\nu} a_\nu x^\nu \right| < \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{1-a}} \cdot \varepsilon \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

gültig für jeden Werth x, welcher der Begrenzung oder dem Innern des Dreiecks DCE angehört: die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ convergirt also für diesen Bereich gleichmässig. Da sie im übrigen für jeden einschliesslich seiner Grenze ganz innerhalb des Einheitskreises gelegenen Bereich eo ipso (absolut und) gleichmässig convergirt, so folgt ohne weiteres die Gleichmässigkeit der Convergenz auch für jedes Dreieck, das aus DCE durch passende Verschiebung der Eckpunkte C, D (z. B. bis nach C', D') entsteht. Und da die analoge Beweisführung auch für jedes Dreieck gilt, dessen Spitze dem unteren Halbkreise angehört (während die Grundlinie wieder einen Theil des Diameters EE' bildet), so ergiebt sich schliesslich die Richtigkeit des ausgesprochenen Satzes in dem ursprünglich behaupteten Umfange. —

Als Folgerungen des eben bewiesenen Satzes ergeben sich unmittelbar die folgenden Sätze:

Convergirt die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ für die Stelle X auf dem Convergenz-Kreise, so convergirt sie **gleichmässig** auf jedem innerhalb des Kreises verlaufenden Curvenstücke $\widehat{x_0 X}$, welches den Convergenz-Kreis **nicht tangirt.**[1])

[1]) Picard, Traité d'Analyse, T. II, p. 73. Der dort gegebene Beweis stimmt mit demjenigen des Herrn Stolz überein.

Convergirt die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ für alle Stellen, welche einen zusammenhängenden Bogen des Convergenz-Kreises ausmachen, so convergirt sie **gleichmässig** auf jeder gebrochenen Linie, die sich der inneren Seite dieses Bogens beliebig nahe anschmiegt.

Dagegen scheint es nicht möglich zu sein, auf diesem Wege irgend etwas bestimmtes über die Gleichmässigkeit oder Ungleichmässigkeit der Convergenz auf dem Kreisbogen selbst auszusagen: man ist in dieser Hinsicht auf diejenigen Hülfsmittel angewiesen, welche durch die Integral-Darstellung der Reihen-Coefficienten geliefert werden.

2.

Der zweite der Abel'schen Sätze würde mit Anwendung der in der Einleitung dieses Aufsatzes gebrauchten Bezeichnungen folgendermaassen lauten:

Sind die Functionen $f_\nu(y)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ stetig für $a \leqq y \leqq b$ und convergirt die Reihe

$$S(x, y) = \sum_0^\infty {}^\nu f_\nu(y) \cdot x^\nu$$

für einen gewissen Werth $x = X > 0$ und $a \leqq y \leqq b$, so ist dieselbe auch convergent für jedes positive $x < X$, $a \leqq y \leqq b$ und ihre Summe stellt eine in diesem Intervalle stetige Function von y dar.

Der betreffende Beweis beruht auf der Anwendung der Ungleichung:

$$(10) \quad \left| \sum_n^\infty {}^\nu f_\nu(y) \cdot x^\nu \right| = \left| \sum_n^\infty {}^\nu \left(\frac{x}{X}\right)^\nu \cdot f_\nu(y) X^\nu \right| < \left(\frac{x}{X}\right)^n \cdot F(X, y),$$

wo $F(X, y)$ die obere Grenze der Werthe:

$$|f_n(y) \cdot X^n|, \; |f_n(y) \cdot X^n + f_{n+1}(y) \cdot X^{n+1}|,$$
$$|f_n(y) X^n + f_{n+1}(y) X^{n+1} + f_{n+2}(y) \cdot X^{n+2}|, \ldots$$

bedeutet. Nun ist eine bestimmte obere Grenze dieser Ausdrücke wegen der vorausgesetzten Convergenz von $\sum_0^\infty{}^\nu f_\nu(y)\cdot X^\nu$ zwar für jedes einzelne y des Intervalls $a \leqq y \leqq b$, aber bei veränderlichem y nicht nothwendig für die Gesammtheit dieser y vorhanden. Der Beweis ist also unzulänglich und wird nur dann vollständig, wenn man die Forderung, dass $\left|\sum_n^{n+\varrho}{}^\nu f_\nu(y)\cdot X^\nu\right|$ für $\varrho = 0, 1, 2, \ldots$ und alle y des Intervalls $a \leqq y \leqq b$ stets unter einer festen positiven Zahl bleiben soll, ausdrücklich in die Voraussetzung aufnimmt. Hierzu ist hinreichend[1]) (aber keineswegs nothwendig[2]), wenn die Reihe $\sum_0^\infty{}^\nu f_\nu(y)\cdot X^\nu$ als gleichmässig convergent für $a \leqq y \leqq b$ vorausgesetzt wird.

Man kann aber vermöge einer einfachen Modification des Beweises diese Einschränkung auch durch die folgende, offenbar geringere ersetzen, dass die einzelne Terme $f_\nu(y)\cdot X^\nu$ für alle y des Intervalls $a \leqq y \leqq b$ numerisch unter einer festen positiven Zahl G bleiben. Man hat dann nur, wie Herr Sylow in einer Note zu dem fraglichen Satz bemerkt hat,[3]) statt von der Beziehung (10), von der folgenden auszugehen:

$$(11) \quad \left|\sum_n^\infty{}^\nu f_\nu(y)\cdot x^\nu\right| \leqq \sum_n^\infty{}^\nu \left|f_\nu(y)\cdot X^\nu\right|\cdot\left(\frac{x}{X}\right)^\nu < \left(\frac{x}{X}\right)^n\cdot G\cdot\frac{X}{X-x},$$

um zu erkennen, dass dieser Ausdruck für alle in Betracht kommenden Werthe von y lediglich durch Wahl von n beliebig klein gemacht werden kann.

Ich möchte dem hinzufügen, dass sich dieses Resultat noch in folgender Weise verallgemeinern lässt. Erstens braucht

---

[1]) Stolz, Allg. Arithmetik, Bd. I, S. 342, Note 29.

[2]) Auch bei einer ungleichmässig convergirenden Reihe können ja die Reste immerhin durchweg numerisch unter einer festen positiven Zahl bleiben.

[3]) Abel, Oeuvres compl., T. II, p. 303.

man, wie Ungl. (11) lehrt, die Convergenz der Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu f_\nu(y)\cdot X^\nu$ überhaupt garnicht vorauszusetzen, es genügt schon die blosse Endlichkeit der Terme $f_\nu(y)\cdot X^\nu$. Zweitens erscheint es aber sogar für die Gültigkeit des Satzes schon hinreichend, wenn nur $|\nu^{-p}\cdot f_\nu(y)\cdot X^\nu|$ für eine beliebig gross anzunehmende positive Zahl p unter einer endlichen Grenze bleibt. Denn man kann alsdann die Ungl. (11) durch die folgende ersetzen:

$$(12)\qquad \left|\sum_n^\infty{}_\nu f_\nu(y)\cdot X^\nu\right| \leqq \sum_n^\infty{}_\nu \left|\nu^{-p}\cdot f_\nu(y)\cdot X^\nu\right|\cdot\nu^p\cdot\left(\frac{x}{X}\right)^\nu$$
$$< n^p\cdot\left(\frac{x}{X}\right)^n\cdot G\cdot\sum_0^\infty{}_\nu(\nu+1)^p\cdot\left(\frac{x}{X}\right)^\nu.$$

Dabei besitzt offenbar der letzte Factor (als Summe einer convergenten Reihe) einen bestimmten endlichen Werth, während $n^p\cdot\left(\frac{x}{X}\right)^n$ durch Wahl von n beliebig klein gemacht werden kann. Man kann also den fraglichen Satz schliesslich durch den folgenden ersetzen:

Bleiben für irgend einen positiven Werth X und für alle dem Intervalle $a \leqq y \leqq b$ angehörigen Werthe y, nach Annahme einer beliebig grossen positiven Zahl p, die Terme $|\nu^{-p}\cdot f_\nu(y)\cdot X^\nu|$ unter einer festen positiven Zahl, so convergirt die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu f_\nu(y)\cdot x^\nu$ für jedes x, dessen absoluter Betrag unter X liegt; und ihre Summe ist im Intervalle $a \leqq y \leqq b$ eine stetige Function von y, wenn die einzelnen $f_\nu(y)$ für jeden endlichen Werth ν diese Eigenschaft besitzen.[1])

Diese Fassung des Satzes zeigt, dass im Falle $X \leqq 1$ ein Unendlichwerden von $\lim_{\nu=\infty} f_\nu(y)$ für gewisse oder auch alle

[1]) Der Satz in dieser Form gilt offenbar auch ohne weiteres für complexe Werthe von x und y: man hat nur an die Stelle des Intervalls (a, b) einen irgendwie begrenzten Bruch T zu setzen.

möglichen Werthe von y keinesfalls auszuschliessen ist: die Convergenz der geometrischen Progression x^ν ($|x| < 1$) ist eben eine so überaus starke, dass durch sie ein solches Unendlichwerden von $\lim\limits_{\nu=\infty} f_\nu(y)$ vollständig paralysirt wird.

Hiernach erscheint es aber keineswegs ganz unwahrscheinlich, dass bei der ursprünglichen (Abel'schen) Formulirung des fraglichen Satzes, wobei die Convergenz der Reihe $\sum\limits_0^\infty{}_\nu f_\nu(y) \cdot X^\nu$ (für $a \leqq y \leqq b$) zur Voraussetzung diente, eine etwaige Ungleichmässigkeit dieser Convergenz durch Verwandlung von X in einen numerisch kleineren Werth x gleichfalls allemal aufgehoben werden könnte. Mit anderen Worten, es wäre sehr wohl denkbar, dass trotz der Unzulänglichkeit des Abel'schen Beweises der betreffende Satz an sich vollkommen richtig sein könnte. Da es mir von Interesse zu sein schien, hierüber ausreichende Klarheit zu gewinnen, so habe ich das folgende Beispiel construirt, aus welchem in der That schliesslich die Unhaltbarkeit des Satzes in der von Abel gewählten zu allgemeinen Fassung hervorgeht.

Es bedeute m_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) eine unbegrenzte Folge positiver Zahlen, welche mit ν monoton zunehmen und so in's Unendliche wachsen, dass:

$$\lim \frac{m_{\nu+1}}{m_\nu} = \infty, \tag{13}$$

und es werde speciell:

$$m_0 = 0 \tag{14}$$

angenommen (Beispiele: $m_\nu = \nu \cdot e^{\nu^2}$, $e^{\nu^2} - 1$, $\nu^{\nu+1}$, $(\lg \nu + 1)^{\nu+1}$). Setzt man sodann:

$$f_\nu(y) = \frac{m_{\nu+1}\, y^2}{m_{\nu+1}\, y^2 + 1} - \frac{m_\nu\, y^2}{m_\nu\, y^2 + 1} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{15}$$

$$= \frac{(m_{\nu+1} - m_\nu)\, y^2}{m_{\nu+1} \cdot m_\nu \cdot y^4 + (m_{\nu+1} + m_\nu)\, y^2 + 1},$$

so erkennt man zunächst, dass die Reihe:

$$(16) \qquad S(x,y) = \sum_0^{\infty}{}_{\nu} f_{\nu}(y) \cdot x^{2\nu}$$

für jedes reelle y und jedes endliche x convergirt. Bringt man nämlich das allgemeine Glied dieser Reihe auf die Form:

$$(17) \qquad f_{\nu}(y) \cdot x^{2\nu} = \frac{\left(1 - \frac{m_{\nu}}{m_{\nu+1}}\right) \cdot y^2}{y^4 + \left(\frac{1}{m_{\nu+1}} + \frac{1}{m_{\nu}}\right) + \frac{1}{m_{\nu+1} \cdot m_{\nu}}} \cdot \frac{x^{2\nu}}{m_{\nu}},$$

so bildet der zweite Factor (wegen: $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{m_{\nu+1}}{m_{\nu}} = \infty$) das allgemeine Glied einer beständig convergirenden Potenzreihe in x, während der erste für $y = 0$ durchweg verschwindet, für $|y| > 0$ bei jedem endlichen Werthe von ν einen bestimmten endlichen Werth, für $\lim \nu = \infty$ den Grenzwerth $\frac{1}{y^2}$ besitzt.

Zugleich sind die $f_{\nu}(y)$ für jeden bestimmten Werth ν stetige Functionen von y im Intervalle $-\infty \leqq y \leqq +\infty$.[1])

Nichtsdestoweniger ist die Summe $S(x,y)$ für $y = 0$ unstetig, sobald x eine reelle Zahl bedeutet, deren absoluter Betrag $\geqq 1$ ist. Man hat nämlich für jeden endlichen Werth von x einerseits:

$$(18) \qquad S(x, 0) = 0.$$

Andererseits ergiebt sich, wenn man zunächst $x = \pm 1$ setzt:

$$(19) \qquad S_n(\pm 1, y) = \sum_0^n{}_{\nu} \left\{ \frac{m_{\nu+1}\, y^2}{m_{\nu+1}\, y^2 + 1} - \frac{m_{\nu}\, y^2}{m_{\nu}\, y^2 + 1} \right\}$$

$$= \frac{m_{n+1}\, y^2}{m_{n+1}\, y^2 + 1},$$

also:

$$(20) \qquad S(\pm 1, y) = \lim_{n=\infty} S_n(\pm 1, y) = 1 \quad (\text{für } |y| > 0).$$

[1]) Dies gilt sogar auch noch für $\lim \nu = \infty$, da $\lim\limits_{\nu=\infty} f_{\nu}(y) = 0$.

Nimmt man jetzt $|x| > 1$, so wird, da die $f_\nu(y)$ durchweg positiv sind:

(21) $$S(x, y) > S(1, y) \text{ d. h. } > 1,$$

und man erkennt somit durch Vergleichung der Resultate (20), (21) mit Gl. (18), dass $S(x, y)$ an der Stelle $y = 0$ unstetig ist, sobald man x einen beliebigen Werth $\geqq 1$ bezw. $\leqq -1$ beilegt.

Für $|x| < 1$ bleibt, beiläufig bemerkt, die Gleichmässigkeit der Convergenz und somit die Stetigkeit der Reihensumme $S(x, y)$ auch an der Stelle $y = 0$ erhalten. Denn die $f_\nu(y)$ bleiben für jeden Werth von ν und y numerisch kleiner als 1, es tritt also hier der oben ausgesprochene, modificirte Abel'sche Satz ohne weiteres in Kraft.

Nachtrag zu dem Aufsatze:

„Ueber die Du Bois Reymond'sche Convergenz-Grenze etc."

S.-B. p. 303—334.

Um bezüglich der auf S. 332 gemachten Bemerkung, dass die Bedingung:

(1) $$U_{m+\varrho} - U_m < \varepsilon \quad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots)$$

stets die Existenz eines bestimmten Grenzwerthes $\lim_{n=\infty} U_n$ involvire, jedes Missverständniss auszuschliessen, möchte ich zu dem dort gesagten noch folgendes hinzufügen.

Nur, wenn man die Cantor'sche Definition der Irrationalzahlen acceptirt, enthält die Bedingung (1) geradezu die Definition der Grenzwerth-Existenz und zwar in folgendem Sinne: Auf Grund von Ungl. (1) definirt die Folge der U_ν eine bestimmte Zahl U, mit welcher nach bestimmten Vorschriften gerechnet werden kann, sodass also insbesondere auch $|U - A|$ eine wohldefinirte Zahl vorstellt, gleichgültig ob A eine rationale Zahl oder eine solche vom Charakter U bedeutet. Da nun, wie leicht zu sehen:

(2) $|U - U_\nu|$ beliebig klein wird, etwa für $\nu \geqq n$,

so nennt man U auch den Grenzwerth der U_ν, in Zeichen:

$$U = \lim_{n=\infty} U_n.$$

Legt man dagegen irgend eine andere Definition der Irrationalzahlen zu Grunde, so bildet, wie ich es auf S. 332 ausdrückte, die Ungl. (1) lediglich die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines bestimmten Grenzwerthes, d. h. einer bestimmten Zahl U, welche der Bedingung (2) genügt. Das ist so zu verstehen, dass in diesem Falle die Existenz der Ungleichung (2) erst bewiesen werden muss, aber auch wirklich bewiesen werden kann. Dabei wird natürlich der betreffende Beweis je nach der gewählten Definitions-Form der Irrationalzahlen zu modificiren sein.

Den ersten correcten Beweis auf Grund seiner eigenen Definition hat Herr Dedekind am Schlusse seiner Schrift „Stetigkeit und irrationale Zahlen" (1872) publicirt.[1]) Herr Dini hat demselben eine etwas leichter fassliche Form gegeben.

Demnächst hat Herr Stolz, gelegentlich der Besprechung eines unzulänglichen Beweises von Bolzano, einen anderen, auf der Existenz der „Unbestimmtheits-Grenzen" beruhenden Beweis geliefert.[2]) Derselbe ist naturgemäss merklich einfacher und kürzer: nur muss man sich darüber klar sein, dass hierbei der Schwerpunkt des fraglichen Beweises in Wahrheit lediglich in den Nachweis für die Existenz der Unbestimmt-

---

[1]) Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali (1878), p. 27, Art. 22 — mit dem unwesentlichen Unterschiede, dass es sich dort um den allgemeineren Fall einer beliebigen (d. h. nicht nothwendig abzählbaren) Zahlenmenge handelt. Dieser Beweis ist auch in die deutsche Ausgabe (S. 33, § 22) aufgenommen, obschon er dort wegen des veränderten Ausgangspunktes (Annahme der Cantor'schen Definition) in der Hauptsache überflüssig ist.

[2]) B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung. Math. Ann. Bd. XVIII, S. 260 (1881).

heits-Grenzen verlegt ist,[1]) wozu wiederum noch die folgenden zwei Sätze erforderlich sind: 1) Jede Menge endlicher Zahlen besitzt eine bestimmte obere bezw. untere Grenze. 2) Jede monotone Folge endlich bleibender Zahlen besitzt einen bestimmten Grenzwerth. — Der Beweis dieser Sätze hängt dann wiederum wesentlich von der Wahl der Irrationalzahl-Definition ab.

Der Beweis, welchen Du Bois Reymond in seiner Functionen-Theorie[2]) für den in Rede stehenden Satz („das allgemeine Convergenz-Princip") giebt, ist eine einfache Modification des Dini'schen Beweises (der sich, beiläufig bemerkt, in analoger Weise auch leicht für die Weierstrass'sche Definitions-Form der Irrationalzahlen adaptiren lässt).

Herr Tannery, der in seiner Introduction à la théorie des fonctions (1886) zunächst von der Dedekind'schen Definition ausgeht, beweist den fraglichen Satz, indem er zeigt, dass jede Irrationalzahl im Cantor'schen Sinne auch eine solche nach Dedekind ist,[3]) mit anderen Worten, dass jede der Bedingung (1) genügende Zahlenfolge einen Dedekind'schen Schnitt definirt. Dieses letztere Princip liegt auch dem von Herrn C. Jordan in der zweiten Auflage seines Cours d'Analyse (1893) mitgetheilten, sehr präcis gefassten Beweise zu Grunde.[4])

---

[1]) Vgl. Du Bois Reymond, Antrittsprogramm S. 3. Uebrigens enthält der dort gegebene Beweis wiederum einen für die Unklarheit der Du Bois Reymond'schen Grenz-Vorstellungen charakteristischen Irrthum. Es wird dort behauptet und bewiesen (!), dass U_n für $\lim n = \infty$ die Werthe A, B der beiden Unbest.-Grenzen stets unendlich oft annehmen muss. Diese Behauptung hat aber entweder überhaupt keinen bestimmten Sinn, oder sie kann nur soviel bedeuten, dass U_n für noch so grosse endliche Werthe von n immer wieder einmal die Werthe A und B annimmt (in diesem Sinne dürfte sie auch gemeint sein, wie der vorgebliche Beweis — a. a. O. S. 4 — anzudeuten scheint). Dann ist sie aber offenbar falsch, wie ein einziger Blick auf das Beispiel $U_n = \sin n$ lehrt.

[2]) S. 260 (1882).

[3]) a. a. O. Art. 27.

[4]) a. a. O. Art. 9.

Herzlichen Gruss!

ÜBER DEN

ZAHL- UND GRENZBEGRIFF

IM UNTERRICHT

VON

ALFRED PRINGSHEIM

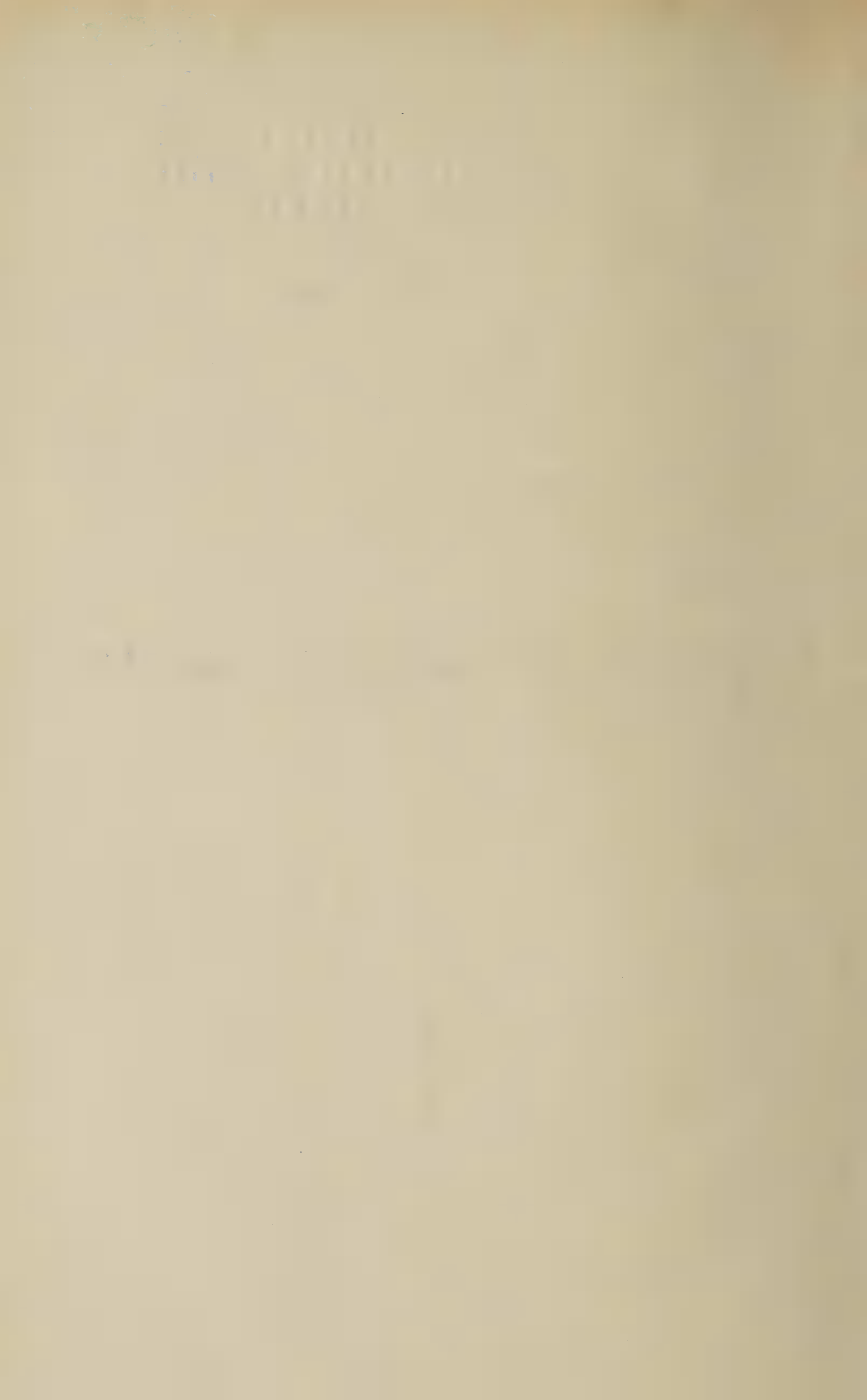
IN MÜNCHEN.

SONDERABDRUCK AUS DEM
VI. JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.
1898.



Über den Zahl- und Grenzbegriff im Unterricht.



Über den Zahl- und Grenzbegriff im Unterricht.

Von **Alfred Pringsheim** in München.

Dafs die ältere, auf angeblichen geometrischen Evidenzen beruhende Einführungsart des Irrationalen, sowie des damit unmittelbar zusammenhängenden Grenz- und Stetigkeitsbegriffes nicht mehr haltbar erscheint, und dafs die arithmetischen Theorien der Irrationalzahlen in der angedeuteten Richtung einen erheblichen Fortschritt bedeuten, ja, unseren heutigen Anschauungen entsprechend, wirklich geeignet sind, eine brauchbare Grundlage für den consequenten Aufbau der Analysis abzugeben, wird wohl von der übergrofsen Mehrzahl der wissenschaftlichen Mathematiker anerkannt: nicht blofs von den eigentlichen Anhängern der Weierstrafs'schen Richtung, den Zahlentheoretikern und Algebraikern, sondern auch von denjenigeu, welche mehr von der Seite der Geometrie her in die Functionentheorie eingedrungen sind und von der geometrischen Anschauung im weitesten Umfange Gebrauch machen.*)

Da jene Theorien in diesem Jahre gerade das 25jährige Jubiläum ihrer öffentlichen Wirksamkeit**) feiern und man also wohl hinlänglich Zeit gehabt hat, sich über ihren Wert und ihre Brauchbarkeit ein Urteil zu bilden, so erscheint es sicherlich angemessen, zu erwägen, ob und inwieweit dieselben geeignet sind, als Ausgangspunkt bei den üblichen Universitäts-Vorlesungen***) über Differential- und Integral-Rechnung zu dienen — ich meine

---

*) Vgl. F. Klein, Zur Nicht-Euklidischen Geometrie. Math. Ann., Bd. 37, S. 572. — M. Pasch, Einl. in die Diff.- und Integral-Rechnung. Leipzig 1882.

**) Das Jahr 1872 bildet in der That das gemeinsame Publications-Jahr für die Theorien von Weierstrafs, Cantor und Dedekind. Wenn auch Weierstrafs schon seit geraumer Zeit in seinen Vorlesungen über analytische Functionen davon Gebrauch gemacht haben soll, so finden sich doch die ersten gedruckten Andeutungen darüber bei Kossak, Die Elemente der Arithmetik (Progr. des Werderschen Gymn., Berlin 1872). — Weniger bekannt ist vielleicht, dafs auch Ch. Méray genau dieselbe Theorie, wie Herr Cantor, unabhängig von diesem aufgestellt und deren Grundzüge gleichfalls im Jahre 1872 publicirt hat: Précis d'Analyse infinitésimale, Art. 1—9.

***) Ich spreche hier nur von diesen, nicht von denjenigen an technischen Hochschulen.

damit ausdrücklich jene zur Einführung in die höhere Mathematik bestimmten Elementar-Vorlesungen, welche zumeist von Studirenden in den ersten Semestern besucht zu werden pflegen. Die vorliegende Frage ist bereits von Herrn Klein am Schlusse seines Vortrages „Über Arithmetisirung der Mathematik“ gestreift und in scharf verneinendem Sinne entschieden worden*) — mit der Motivirung, dafs der Lernende naturgemäfs im Kleinen immer denselben Entwickelungsgang durchlaufen werde, den die Wissenschaft im Grofsen gegangen ist. Ob es zweckmäfsig erscheint, das Häckel'sche Princip von der Übereinstimmung zwischen Phylogenie und Ontogenie in dieser uneingeschränkten Weise auf eine Frage des Unterrichts zu übertragen, will mir keineswegs einleuchten. Ich meine, wir sollen doch gerade aus der Entwickelungsgeschichte der Wissenschaft lernen, die von früheren Generationen begangenen Schlufsfehler oder Unzulänglichkeiten zu vermeiden — selbst dann, wenn dieselben auf die Richtigkeit der Endresultate keinen Einflufs ausgeübt haben. Und wie die heutigen Ärzte nicht mehr der Ansicht sind, dafs jeder gewisse Kinderkrankheiten durchmachen müsse, und man demgemäfs bestrebt ist, dieselben durch eine verständige Prophylaxe so viel als möglich fern zu halten, so sollten wir doch wohl auch darauf ausgehen, dem Anfänger die Kinderkrankheiten, welche die Wissenschaft bei ihrer Entwickelung durchgemacht hat, möglichst zu ersparen.

Wenn die Analytiker des vorigen Jahrhunderts, insbesondere Euler, eine ganze Anzahl durchaus richtiger und wertvoller Ergebnisse durch naive Anwendung eines an sich unberechtigten Formalismus aufgefunden haben, so wird doch heutzutage selbst in einer Anfangs-Vorlesung niemand mehr von dieser sehr bequemen, aber unzulänglichen Methode Gebrauch machen. Und, obschon die unserem Verstande anscheinend näher liegende Ansicht, dafs die Wärme eine Materie sei, Jahrhunderte lang die eigentlich herrschende war, so wird heute in den elementarsten Vorträgen, ja im Schulunterricht ausschliefslich die mechanische Auffassung gelehrt. Oder, um mit einem vielleicht trivial erscheinenden, aber darum nicht minder belehrenden Beispiele zu schliefsen: Jedermann sieht noch heute oder glaubt vielmehr zu sehen, dafs die Sonne sich um die Erde bewegt, gerade so wie Jahrtausende daran geglaubt haben. Und wenn er selbst über den Wechsel von Tag und Nacht, von Sommer und Winter nachdenkt, so wird er wohl zunächst zu einer Auffassung gelangen, welche dem überwundenen Ptolemäischen Weltsysteme entspricht. Wenn er aber einen Astronomen nach der Ursache und dem Zusammenhange jener Erscheinungen fragt, so wird ihn dieser ohne viele Umschweife zwingen, sich auf den Copernicanischen Standpunkt zu stellen.

*) Gött. Nachr. 1895, Heft 2, S. 9.

Diese Beispiele dürften genügend deutlich machen, daſs das von Herrn Klein angeführte Princip als Unterrichts-Grundsatz keineswegs stichhaltig erscheint und zum mindesten einer genauen Prüfung von Fall zu Fall bedarf. Und ich glaube, daſs das Resultat einer solchen Prüfung ganz anders, etwa folgendermaſsen lauten würde: Jeder Einzelne durchläuft im wesentlichen denselben Entwickelungsgang, wie die Wissenschaft selbst, solange ihm kein besserer Weg gezeigt wird. Ist aber ein solcher besserer Weg vorhanden, so ist es gerade die Pflicht und Aufgabe des Lehrenden, ihm denselben nicht nur zu weisen, sondern auch gangbar zu machen.

Nun kann man ja freilich von vorn herein der Ansicht sein, daſs die arithmetischen Theorien der Irrationalzahlen überhaupt keinen solchen besseren Weg zum Eindringen in die Analysis darbieten. Dann scheint zunächst jede weitere Discussion überflüssig. Immerhin ist selbst in diesem Falle eine Verständigung möglich, wenn man nämlich, wie es z. B. Herr Ascoli thut,*) an die Spitze der Analysis ausdrücklich das geometrische Axiom stellt: „Hat man eine unbegrenzte Reihe in einander liegender Strecken von schlieſslich beliebig klein werdender Länge, so giebt es stets einen und nur einen Punkt, der im Innern aller dieser Strecken liegt.“ Dieser Standpunkt ist zwar nicht der meinige, aber er ist wenigstens in seiner Art consequent, gestattet eine vollkommen scharfe Definition der Irrationalzahl und erscheint geeignet, verschwommene Grenz- und Stetigkeitsbegriffe zu vermeiden.

Indessen hat ja, wie bereits im Eingange erwähnt, die groſse Mehrzahl der Mathematiker, darunter auch Herr Klein, die arithmetischen Theorien der Irrationalzahlen als geeignetes Fundament der Analysis principiell acceptirt. Es sind also ausschlieſslich pädagogische Gründe, welche ihrer Einführung in Vorlesungen der fraglichen Art entgegenstehen sollen. Worin liegen nun aber die Kennzeichen einer falschen Pädagogik? Nach meinem Dafürhalten kann eine solche doch nur in folgendem bestehen: Entweder, man bringt den Schülern Kenntnisse bei, die für sie schädlich, oder zum mindesten überflüssig sind; oder, man mutet ihnen Dinge zu, die ihre Auffassungskraft übersteigen. Sehen wir uns also diese beiden Eventualitäten etwas genauer an.

Zunächst möchte ich dabei ausdrücklich hervorheben, daſs es sich hier keineswegs etwa darum handelt, das Gehirn des Schülers von vornherein mit besonderen functionentheoretischen Finessen zu belasten; vielmehr lediglich darum, ihm durch Beibringung eines vernünftigen Zahlbegriffes eine sichere logische Grundlage zu schaffen, ihm gewissermaſsen das Instrument, mit dem er beständig zu operiren

---

*) Sui fondamenti dell' algebra, Rendic. Ist. Lomb., Ser. II, I. 28 (1895), p. 1060.

hat, vor seinen Augen scharf und schartenfrei herzurichten. Nun besteht das Publicum der in Rede stehenden Vorlesungen*) abgesehen von einer verschwindenden Minorität von solchen, die sich ernstlich höheren mathematischen Studien zuwenden, in der Hauptsache aus künftigen Mittelschul-Lehrern, dann — in sehr viel geringerer Zahl — aus späteren Physikern und Astronomen. Dafs den letzteren, wenn sie auch die Mathematik nur als Hülfswissenschaft betreiben, ein mit sehr mäfsigem Zeitaufwand zu erwerbender Einblick in deren logische Grundlagen schädlich sein könne, wird wohl niemand im Ernste behaupten: ich für meine Person möchte ein gewisses Mafs derartiger Kenntnisse auch für den Naturforscher im Sinne einer allgemeinen wissenschaftlichen Ausbildung zum mindesten für sehr wünschenswert halten. Unbedingt notwendig erscheinen sie mir aber für die künftigen Mittelschul-Lehrer (welche, wie ich nochmals betone, das Haupt-Contingent in jenen Vorlesungen bilden). Ich glaube auch nicht zu irren, wenn ich annehme, dafs diese Ansicht in akademischen Kreisen ziemlich allgemein geteilt wird. Eine Meinungs-Differenz würde dann im wesentlichen nur darin bestehen, dafs man wohl zumeist daran festhält, jene logischen Fundamente, von denen hier die Rede ist, seien besser erst bei späterer Gelegenheit, etwa in einer Vorlesung über Functionentheorie, nachzuholen. Mir will es scheinen, dafs man sich da einer verhängnisvollen Täuschung hingiebt. Der Durchschnitts-Student,**) der einmal die Erfahrung gemacht hat, dafs man mit Hülfe einer gewissen, in den ersten Semestern äufserlich erworbenen technischen Fertigkeit trefflich existiren und allerlei amüsante Dinge treiben kann, hat in den folgenden Semestern nicht die geringste Neigung, sich mit solchen principiellen Gegenständen zu befassen: er erblickt darin lediglich eine eigensinnige Erschwerung des mathematischen Studiums und betrachtet dergleichen als eine Art Luxus-Artikel für eine geistig übermäfsig wohl situirte Minderheit. Und wenn er wirklich Gelegenheit nimmt, derartige Dinge zu hören (was bei uns in München noch garnicht einmal die allgemeine Regel ist), so gehen dieselben ziemlich spurlos an ihm vorüber, wenn er nicht lieber gar die nach seiner Meinung äufserst günstige Veranlassung benützt, einige Stunden munter zu schwänzen.

*) Ich spreche hier von Verhältnissen, wie sie zunächst in München bestehen, glaube aber, dafs dieselben an anderen Universitäten nicht wesentlich verschieden sein werden.

**) Nur von diesem kann natürlich hier die Rede sein. Dabei schwebt mir wiederum nur derjenige Typus vor, wie ich ihn im Laufe meiner 20jährigen Lehrthätigkeit zu München gründlich kennen zu lernen Gelegenheit hatte. Immerhin möchte ich annehmen, dafs der Durchschnitts-Student an anderen Universitäten kaum wesentlich anders geartet sein dürfte.

Hier kann nach meinem Dafürhalten nur dadurch Wandel geschaffen werden, dafs man gerade in den einleitenden Vorlesungen, also ehe der Student im Besitze eines nicht ganz redlich erworbenen analytischen Handwerkszeuges sich zu höheren Dingen berufen glaubt, auf eine strenge Einführung der arithmetischen Grundbegriffe hält. Ist eine solche Grundlage einmal vorhanden, so findet sich später auch das Interesse und das Bedürfnis, dieselbe weiter ausgebaut und verfeinert zu sehen.

Mit anderen Worten: ich halte diese Methode gerade für eminent pädagogisch. Sie wäre es freilich nicht, wenn die zweite der oben angedeuteten Eventualitäten einträte, d. h. wenn man damit dem Schüler das Anfangs-Studium der höheren Mathematik ungebührlich erschwerte, ja verleidete. Ich glaube, dafs diejenigen, welche diese Ansicht vertreten, teils die Auffassungskraft der Studirenden in Bezug auf arithmetische Begriffe unterschätzen, teils die Schwierigkeit überschätzen, den fraglichen Weg für den Anfänger „gangbar“ zu machen. Ein definitives Urteil hierüber wird wohl weniger auf Grund theoretisirender Erörterungen, als praktischer Erfahrungen gefällt werden können. Und da solche Erfahrungen in ausreichender Weise wohl kaum von denjenigen gesammelt werden können, welche principiell an der älteren geometrisirenden Einführungsart in die Analysis festhalten, so erscheint es vielleicht nicht unbescheiden, darauf hinzuweisen, dafs ich seit etwa 10 Jahren in meinen sich alle zwei Jahre wiederholenden, sehr gut besuchten Elementar-Vorlesungen über Infinitesimal-Rechnung mich der angedeuteten Methode mit durchaus gutem Erfolge bedient habe. Diesem Urteile mag ja immerhin ein gewisses Mafs von Subjectivität innewohnen: Thatsache ist, dafs meine Zuhörer jenen Vorträgen stets mit Interesse und, soweit ich controlliren konnte, auch mit Verständnis gefolgt sind, und dafs der in jeder Vorlesung ja unvermeidliche partielle „Abfall“ sich allemal lediglich in Dimensionen hielt, deren Geringfügigkeit mir die Überzeugung von der Verkehrtheit meiner Pädagogik bisher nicht beibringen konnte.

Um nun schliefslich etwas näher auf die von mir befolgte Methode einzugehen und in dieser Beziehung jedes Mifsverständnis auszuschliefsen, möchte ich vor allem hervorheben, dafs es sich dabei keineswegs um eine Behandlung der Analysis handelt, welche sich etwa im wesentlichen der von Herrn Lipschitz in seinem bekannten Lehrbuche gegebenen Darstellung anschliefst. Da dieses Buch besonders bei den Anhängern der Weierstrafs'schen Richtung in grofsem Ansehen steht, so mufs es jedenfalls aufserordentliche Vorzüge besitzen. Nichtsdestoweniger kann ich mich des Eindruckes nicht erwehren, dafs dasselbe einer arithmetisirenden Behandlungsweise der Elemente nicht allzuviele neue Freunde gewonnen zu haben scheint. Es ist hier nicht der Ort, dem Grunde dieser Er-

scheinung weiter nachzugehen. Aber das eine möchte ich doch, als mit dem Thema meines Vortrages in directem Zusammenhange stehend, ausdrücklich erwähnen, daſs ich gerade die Fassung der grundlegenden ersten drei Kapitel, welche von dem Zahl- und Grenzbegriffe handeln, für keine sehr glückliche halte. Da wird zunächst (§ 1) die (natürliche) Zahl als Anzahl gezählter Dinge definirt. Im § 10 erscheint dann die negative ganze Zahl als Inbegriff einer gewissen Anzahl von „wegzunehmenden Einheiten", mit anderen Worten als benannte Zahl. Dann kommen die Brüche (§ 11) als Multipla von gleichen Teilen einer plötzlich auftauchenden teilbaren Einheit (worunter ich mir doch schlieſslich immer nur eine meſsbare Gröſse vorstellen kann). Zuletzt erscheinen (§ 14) in Anknüpfung an die Wurzel-Ausziehung die Cantor'schen Fundamentalreihen. Dabei wird „*das Sachverhältnis*", daſs zwei unbegrenzte Reihen von Brüchen gewisse Eigenschaften besitzen, „durch den *Ausdruck* bezeichnet, daſs dieselben sich ein und derselben *Grenze* nähern" (S. 35, 36), und mit Bezug auf zwei etwas allgemeinere Reihen dieser Art wird in analoger Weise gesagt, daſs die Brüche der einen, wie der anderen Reihe „sich einem bestimmten *Grenzwerte* nähern" (S. 38). Sodann aber heiſst es ohne jede weitere Vermittelung: „Auf *diese* (?) beiden Grenzwerte sollen die Grundoperationen der Rechnung angewendet werden." Und nun ist volle sieben Seiten beständig von „diesen" Grenzwerten, wie von realen Objecten die Rede, es wird ausführlich gezeigt, wie man mit „ihnen" rechnen kann, bis endlich (S. 45) das erlösende Wort fällt: „Nach diesen Vorbereitungen bleibt noch übrig, daſs man für die Grenzwerte, dem sich die einzelnen Brüche nähern, ein *eigenes Zeichen* einführt." Was aber das reale Object sei, welches hinter diesem Zeichen steckt, oder vielmehr, daſs in Wahrheit eben dieses Zeichen selbst das einzige reale Object ist, welches durch jenen Ausdruck Grenzwert bezeichnet wird, das wird mit keiner Silbe angedeutet. Und was man sich nun gar als Inhalt einer arithmetischen Formel vorstellen soll, in der ein solches Conglomerat von disparaten Elementen (gezählten Vielheiten, benannten Zahlen, Vielfachen von Einheits-Teilen und völlig wesenlosen Grenzwerten) vereinigt auftritt, das bleibt in tiefstes Dunkel gehüllt.

Will man überhaupt zu einem brauchbaren allgemeinen Zahlbegriffe gelangen, so muſs doch vor allen Dingen ein Mittel gefunden werden, um:

1. alle möglichen als Zahlen bezeichneten Objecte,
2. die zwischen ihnen bestehenden sogenannten Gröſsen-Beziehungen unter einen gemeinsamen Gesichtspunkt zu bringen.

Das einfachste Mittel zur Lösung der ersten Aufgabe hat meines Wissens zuerst Heine in präciser Weise angegeben, indem

er den Satz aussprach*): „Ich nenne gewisse greifbare Zeichen Zahlen, sodaſs die Existenz dieser Zahlen also nicht in Frage steht.“ Ich zweifle nicht, daſs dieser Satz von vielen auſserordentlich trivial, die darin angedeutete Auffassung platt und formalistisch befunden wird. In dieser Hinsicht erscheint es mir tröstlich, daſs gerade ein so tiefer Denker und zumal ein Naturforscher wie Helmholtz sich ausdrücklich zu derselben Auffassung bekannt hat.**)

Das geeignete Mittel zur Lösung der zweiten Aufgabe erblicke ich darin, daſs man die Beziehungen „gröſser und „kleiner“ im allgemeinen lediglich als Ausdruck einer bestimmten Succession betrachtet: nur in besonderen, ausdrücklich dafür qualificirten Fällen dienen sie im Sinne des gewöhnlichen Sprachgebrauches dazu, durch Zählung oder Messung feststellbare Quantitäts-Verschiedenheiten anzuzeigen.***)

Ich definire also etwa die (reellen) Zahlen als ein unbegrenztes System von Zeichen, denen eine eindeutig bestimmte Succession zukommt, und mit denen nach bestimmten Vorschriften gerechnet werden kann.

Die im vorstehenden implicite ausgesprochene Trennung der Zahl von der Gröſse, genauer gesagt von der meſsbaren Gröſse, erscheint mir nicht nur im höheren Sinne principiell wichtig, sondern auch gerade für den Unterricht auſserordentlich zweckmäſsig. Wenn (nicht nur in älteren, sondern auch in neueren und neuesten Lehrbüchern der Analysis) bald gesagt wird, daſs Gröſsen durch Zahlen darstellbar seien, dann wiederum Zahlen ohne weiteres als Gröſsen bezeichnet werden und schlieſslich gar Gröſsen, weil sie mit beliebiger Annäherung durch rationale Zahlen darstellbar seien, Zahlen genannt werden,†) so scheint

*) Die Elemente der Functionen-Lehre, Journ. für Math., Band 74 (1872), S. 173.

**) „Ich betrachte die Arithmetik oder die Lehre von den reinen Zahlen als eine auf rein psychologische Thatsachen aufgebaute Methode, durch die die folgerichtige Anwendung eines Zeichensystems (nämlich der Zahlen) von unbegrenzter Ausdehnung und unbegrenzter Möglichkeit der Verfeinerung gelehrt wird.“ (Zählen und Messen, erkenntnistheoretisch betrachtet. Ges. Abh., Bd. III, S. 359).

***) Hierdurch wird nicht etwa dem Anfänger eine ganz neue und besondere Schwierigkeit zugemutet, vielmehr nur die wahre Bedeutung einer ihm längst vertrauten Gewohnheit deutlich hervorgehoben. Denn wenn ihm schon in der elementaren Arithmetik gelehrt wird, daſs z. B.

$$3 > -5, \qquad -4 < 0,$$

in Worten: „3 ist gröſser, als — 5“, „— 4 ist kleiner, als 0“ —, so werden diese Beziehungen durchaus in einem Sinne gebraucht, der mit Quantitäts-Vorstellungen und dem landläufigen Sprachgebrauche nicht das geringste gemein hat.

†) Ich könnte die Richtigkeit dieser vielleicht übertrieben klingenden Behauptungen durch Citate reichlich belegen, unterlasse dies jedoch, weil

mir hierin doch das Zeichen einer vollendeten Confusion zu liegen. Ich glaube, daſs gerade der leichtfertige und inconsequente Gebrauch des Wortes „Gröſse" in den Köpfen der Mathematiker (nicht bloſs der Anfänger) viel Unheil angerichtet hat, und sollte daher meinen, daſs es allgemein als ein wahrer Segen empfunden werden müſste, wenn dieser in seiner quallenhaften Unbestimmtheit geradezu gemeingefährliche terminus technicus aus dem Unterrichte möglichst verschwindet.

Bei der Einführung der Irrationalzahlen scheint es mir am passendsten, unmittelbar an diejenige formale Darstellungsart der letzteren anzuknüpfen, welche dem Anfänger von der Schule her schon bis zu einem gewissen Grade geläufig ist, und unter welcher er sich unwillkürlich eine solche irrationale Zahl allemal zu denken pflegt: an den „unendlichen" Decimalbruch. Während er aber damit lediglich den verschwommenen, ich möchte sagen: im wesentlichen negativen Begriff des nur annäherungsweise-darstellbaren (also eigentlich nicht-darstellbaren) zu verbinden pflegt, so erscheint hier der unbegrenzt fortsetzbare (d. h. in jeder einzelnen, noch so weit entfernten Decimalbruch-Stelle eindeutig bestimmte) Decimalbruch als ein neues Zahlzeichen, dem ein haarscharf bestimmter Platz innerhalb der Succession der rationalen Zahlen angewiesen werden kann. Ist erst dieser Standpunkt an irgend einem, zugleich das Bedürfnis derartiger Betrachtungen verdeutlichenden Beispiele (etwa der Auflösung der Gleichung $x^2 = 2$) gründlich durchgeführt, so bietet es nicht die geringste principielle Schwierigkeit, zu allgemeineren „convergenten Zahlenfolgen"*) übergehend, die allgemeine Definition der Irrationalzahlen und der mit ihnen auszuführenden Rechnungsoperationen nach dem von Herrn Cantor gelehrten Verfahren festzustellen, und zugleich auch auf den Fall zu übertragen, daſs es sich um convergente Zahlenfolgen handelt, deren Terme selbst wiederum Irrationalzahlen sind.

Erst wenn „die irrationale Zahl vermöge der ihr durch die Definitionen gegebenen Beschaffenheit eine ebenso bestimmte Realität in unserem Geiste erlangt hat, wie die rationale, selbst wie die ganze rationale Zahl",**) erscheint es mir überhaupt möglich, den Begriff des Grenzwertes in befriedigender Weise einzuführen, nämlich:

I. Definition. Wir sagen, die unbegrenzte Folge der (rationalen oder irrationalen) Zahlen a_ν besitzt einen bestimmten Grenzwert,

---

es mir nicht angemessen erscheint, da, wo so viele gesündigt, einzelne Namen herauszuheben.

*) Mit dieser, wie mir scheint, charakteristischeren Benennung pflege ich in meinen Vorlesungen die Cantor'schen „Fundamentalreihen" zu bezeichnen.

**) Cantor, Math. Ann., Bd. 21, S. 568, 569.

wenn eine Zahl A von der Beschaffenheit existirt, dafs $|A - a_\nu|$ für alle hinlänglich grofsen Werte von ν beliebig klein wird.

II. Hauptsatz. Die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür besteht darin, dafs $|a_{\nu+\varrho} - a_\nu|$ für einen hinlänglich grofsen Wert von ν und jeden Wert von ϱ beliebig klein wird.

Was ich mir unter dieser ja wohl allgemein üblichen Definition eines „bestimmten" Grenzwertes denken soll, wenn die Zahl A „nur annäherungsweise darstellbar" ist, erscheint mir völlig unerfindlich. Und ebenso wenig habe ich eine Ahnung, wie der unentbehrliche Hauptsatz II ohne den präcisen Begriff der Irrationalzahl bewiesen werden soll.

Ich habe hierbei ausdrücklich zunächst nur von dem Grenzwerte einer abzählbaren Zahlenmenge gesprochen. Es erscheint mir nämlich aufserordentlich wichtig, dafs der Anfänger zuvörderst an dieser einfachsten Form des Grenzwertes das Wesen und die Natur dieses für die gesamte Analysis fundamentalen Begriffes kennen lerne. Die, wie ich glaube, nicht seltene Gepflogenheit, in solchen einleitenden Vorlesungen gleich von den Grenzwerten stetiger Veränderlicher und ihrer Functionen zu reden, halte ich — wenn ich mich auch einmal dieses Ausdruckes bedienen darf — für einen entschiedenen pädagogischen Fehler.

Aus dem eben angedeuteten Grunde finde ich es zweckmäfsig, die Lehre vom Grenzwerte nicht nur durch die späterhin sich nützlich erweisende Einführung der Zahl e als $\lim\limits_{\nu=\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$ zu illustriren, sondern unmittelbar daran auch die Hauptsätze über die Convergenz unendlicher Reihen zu knüpfen, statt, wie zumeist üblich, sie erst bei Gelegenheit des Taylor'schen Lehrsatzes einzuschalten. Denn während sie dort lediglich als eine unliebsame Unterbrechung des eigentlichen Lehrganges erscheinen, so dienen sie hier in vorteilhaftester Weise dazu, den Begriff des Grenzwertes zu erläutern und zu befestigen. Zugleich giebt die Erscheinung der Divergenz Gelegenheit, den Begriff des „Unendlichen" in natürlichstem Zusammenhange einzuführen und zu erörtern.

Hiermit ist nun der Kreis derjenigen arithmetischen Grundlagen, welche mir für die Einführung in die höhere Analysis unbedingt notwendig scheinen, im wesentlichen abgeschlossen. Der zu ihrer Herleitung erforderliche, übrigens sehr mäfsige Zeitaufwand belohnt sich nach meinen Erfahrungen reichlich — nicht nur für die betreffende Einzel-Vorlesung, in der nunmehr mit ganz anderer Sicherheit vorwärts geschritten werden kann, sondern für das gesamte mathematische Studium. Denn, wie ich schon oben hervorhob, jene Grundlagen werden in der Mehrzahl der Fälle überhaupt

nicht mehr genügend nachgeholt, wenn der (nach meiner Meinung) dafür richtige Zeitpunkt versäumt wurde. Was aber etwa infolge des fraglichen Zeitaufwandes an geometrischen oder analytischen Anwendungen verloren geht, das läfst sich mit Leichtigkeit in Übungs-Stunden oder späteren Vorlesungen, ja mit Hülfe jedes beliebigen besseren Lehrbuches ergänzen.

Sind nun die arithmetischen Fundamente in dem besprochenen Umfange festgelegt, so mag die geometrische Anschauung in ihre Rechte treten. Man zeigt vor allem in der bekannten Weise, dafs jedem Punkte einer unbegrenzten Geraden stets eine und nur eine bestimmte (positive oder negative, rationale oder irrationale) Zahl zugeordnet werden kann. Dafs dann umgekehrt allen rationalen und gewissen irrationalen Zahlen (wie $\sqrt{2}$) bestimmte Punkte entsprechen, ist ebenso leicht ersichtlich; für jede beliebige Irrationalzahl gilt das analoge nur dann, wenn ein geeignetes geometrisches Axiom eingeführt wird,*) dem man verschiedene Fassungen geben kann: etwa die oben citirte, von Herrn Ascoli vorgeschlagene oder auch andere nicht minder einfache und anschauliche Formen, wie sie von Herrn Dedekind**) und Pasch***) angegeben worden sind. Wird jetzt ein solches Axiom†) ein für allemal acceptirt, so kann die gesamte Succession der reellen Zahlen der Succession der Punkte einer Geraden eindeutig-umkehrbar zugeordnet werden. Dadurch wird es ermöglicht, eine zwischen zwei beliebigen positiven Zahlen bestehende Beziehung von der Form $a \gtrless b$, welche bisher nur die Bedeutung einer bestimmten Succession hatte, als Beziehung zwischen Strecken, also als Gröfsen-Beziehung im eigentlichen Sinne zu deuten. Im übrigen enthält jenes Axiom den durch die Anschauung nicht erweislichen Teil jener Eigenschaft, welche wir als Stetigkeit der Geraden zu bezeichnen pflegen. Und hierdurch erscheint es dann hinlänglich motivirt, warum wir nunmehr auch die von uns geschaffene Succession der reellen Zahlen als eine stetige bezeichnen (ohne dafs es an dieser Stelle notwendig wäre, auf den arithmetischen Charakter einer solchen stetigen Mannigfaltigkeit des näheren einzugehen).

Ist auf diese Weise das Gebiet, in welchem sich die nunmehr einzuführende stetige Veränderliche und deren Functionen zu bewegen haben, arithmetisch wie geometrisch wohl definirt, so kann man fernerhin der Benützung geometrischer Anschauung

---

*) G. Cantor, Math. Ann., Bd. 5, S. 128.

**) Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig 1872, S. 18.

***) Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882, S. 125.

†) Ich pflege dasselbe lieber als eine zweckmäfsige, unserem unvollkommenen Anschauungsvermögen zu Hülfe kommende Hypothese zu bezeichnen.

den weitesten Spielraum lassen, ohne dafs es deshalb nötig wird, den Boden strenger arithmetischer Beweisführung jemals unter den Füfsen zu verlieren.

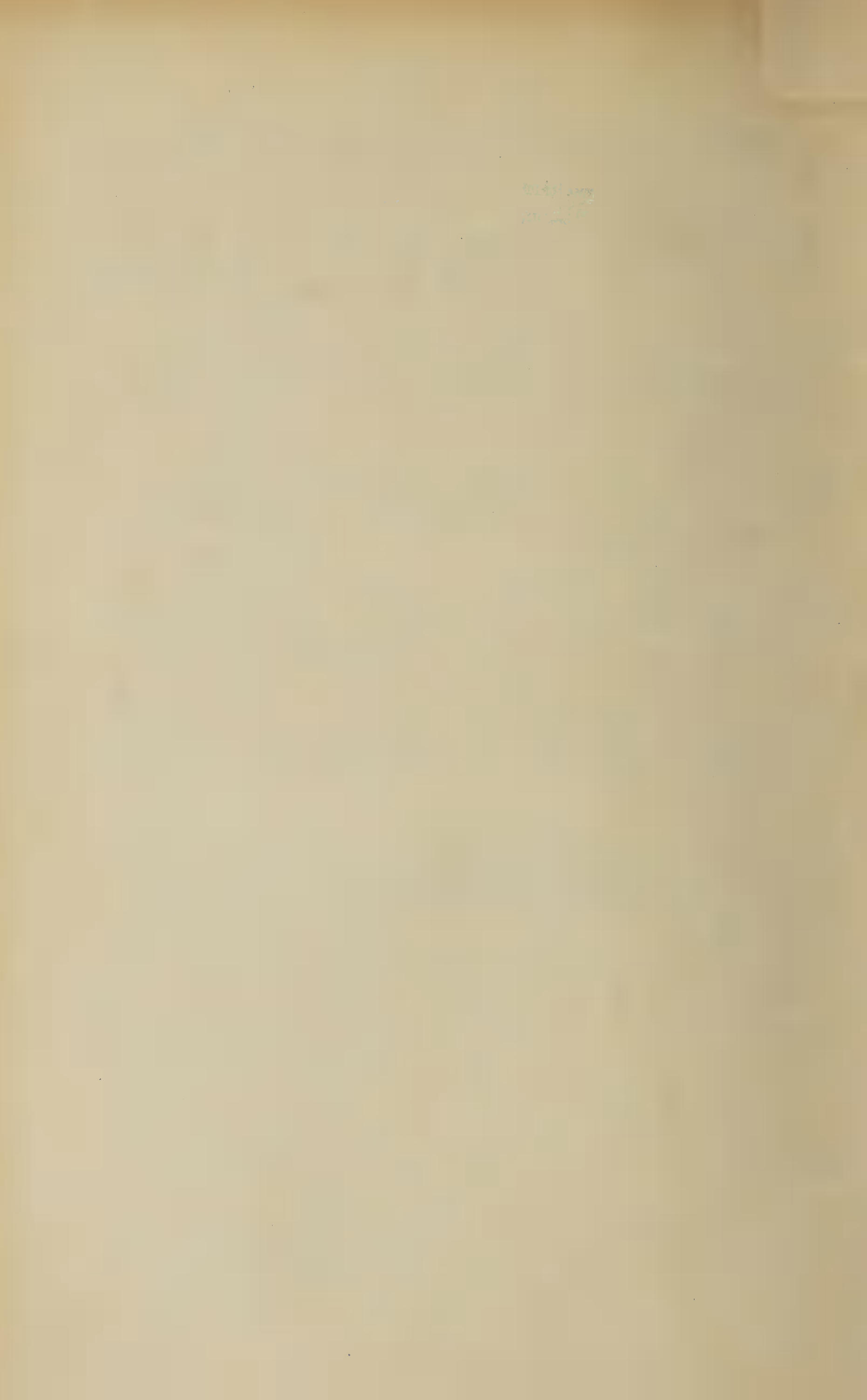
Damit bin ich nun aber am Ziele meines Vortrages angelangt. Weit entfernt von der Prätension, darin irgend etwas wesentlich Neues gesagt zu haben, beabsichtigte ich nur, aus dem, was andere vor mir erdacht, dasjenige auszuwählen und übersichtlich zu gruppiren, was mir für den angedeuteten Zweck passend erschien, ohne etwa zugleich den von mir skizzirten Weg als den einzig möglichen und zweckmäfsigen hinstellen zu wollen.*) Immerhin werden vielleicht jüngere Docenten aus dem Gesagten diese oder jene brauchbare Andeutung entnehmen können. Im übrigen, wie dem auch sei: wesentlich lag mir zunächst nur daran, soweit als thunlich, nachzuweisen, dafs eine Umgestaltung der fraglichen Elementar-Vorlesungen in dem näher erörterten Sinne sowohl wünschenswert, als durchführbar erscheint.

„Das Wesen der Triumphe der Wissenschaft und ihres Fortschrittes", sagt der englische Philosoph Whewell,**) „besteht darin, dafs wir veranlafst werden, Ansichten, welche unsere Vorfahren für unbegreiflich hielten und unfähig waren zu begreifen, für evident und notwendig zu halten." Nach meiner Überzeugung ist die Zeit nicht mehr fern, wo die arithmetischen Theorien der Irrationalzahlen für so „evident und notwendig" gelten werden, dafs man eine Einführung in die Analysis ohne dieses Hülfsmittel für schlechthin unmöglich ansehen wird.

---

*) Einen von dem meinigen durchaus abweichenden Weg, der sich an die Dedekind'sche Irrationalzahl-Theorie und im übrigen von vornherein mehr an die geometrische Anschauung anschliefst, hat bekanntlich Herr Pasch vorgezeichnet: Einleitung in die Diff.- und Int.-Rechnung, Leipzig 1882.

**) Ich entnehme dieses Citat dem Hankel'schen Buche „Theorie der complexen Zahlensysteme" (Leipzig 1867), S. 60.



12

Zur Theorie des Doppel-Integrals.

Von

Alfred Pringsheim.

Aus den Sitzungsberichten der mathematisch-physikalischen Classe
der k. bayer. Akad. d. Wiss. Bd. XXVIII. 1898. Heft I.

München 1898.

Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub.



Zur Theorie des Doppel-Integrals.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 15. Januar*)

Nachdem Riemann, den Cauchy-Dirichlet'schen Integral-Begriff wesentlich erweiternd, die Grundlage für die moderne Theorie des einfachen bestimmten Integrales geschaffen hatte, lag es nahe, auch den Begriff des mehrfachen, insbesondere des Doppel-Integrales in analoger Weise zu vervollkommnen. Die Verallgemeinerung der betreffenden Definitionen und Existenzbeweise bot, zumal mit Benützung der seit Ausbildung der Cantor'schen Mengenlehre gewonnenen schärferen Begriffs-Bestimmungen, keine besonderen Schwierigkeiten. Dagegen ergaben sich solche bei der Formulirung und beim Beweise desjenigen Fundamental-Satzes, welcher von der Reduction eines Doppel-Integrales auf ein iterirtes Integral, d. h. von der Berechnung eines Doppel-Integrales mit Hülfe von zwei successive auszuführenden einfachen Integrationen handelt, da die Existenz des über eine gewisse Fläche erstreckten Doppel-Integrals $\int\int f(x,y) \cdot dx \cdot dy$ keineswegs diejenige der einfachen Integrale $\int f(x,y) \cdot dx$, $\int f(x,y)\, dy$ bei constantem y bezw. x praejudicirt. Hiernach entsteht also vor allem die Frage, in wieweit überhaupt der für eine stetige Function $f(x,y)$ geltenden Formel:

$$\text{(I)} \qquad \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\cdot dx\cdot dy \begin{cases} = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x,y)\cdot dy \\ = \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x,y)\cdot dx \end{cases}$$

eine wohl definirte Bedeutung auch dann noch beigelegt werden kann, wenn $f(x, y)$ nur denjenigen Beschränkungen unterliegt, welche die Existenz des betreffenden Doppel-Integrales nach sich ziehen, und sodann, ob diese letztere auch allemal für die Gültigkeit jener Formel ausreichend erscheint. Diese Fragen wurden wohl zum ersten Male von Du Bois Reymond[1]) in der Hauptsache richtig beantwortet, indem er die fragliche Formel als speciellen Fall eines von ihm aufgestellten allgemeineren Grenzwerth-Satzes auffasst. Allein seine ganze Darstellung ermangelt der nöthigen Präcision und Beweiskraft, da er gewissermaassen mit unendlich vieldeutigen Ausdrücken[2]) wie mit eindeutig definirten operirt.

Derselbe Mangel haftet auch dem directeren Beweise an, welchen Harnack in der deutschen Ausgabe des Serret'schen Lehrbuches der Differential- und Integral-Rechnung[3]) mitgetheilt hat.

Mit Hinzunahme einer gewissen beschränkenden Voraussetzung (nämlich der Existenz des Integrals $\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\cdot dy$ bezw. $\int_{x_0}^{X} f(x,y)\, dx$ für jedes einzelne in Betracht kommende x bezw. y mit eventuellem Ausschlusse einer unausgedehnten Punktmenge) hat sodann Herr Stolz den Sinn und die Gültigkeit der Formel (I) in durchaus correcter Weise festgestellt.[4])

---

[1]) Ueber das Doppelintegral. Journ. f. Math. Bd. 44 (1883), S. 278. (Ich verdanke die folgenden literarischen Notizen zum Theil einer gelegentlichen Mittheilung des Herrn A. Voss.)

[2]) Als solche kann man doch allenfalls die Integrale von der Form $\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\cdot dy$, $\int_{x_0}^{X} f(x,y)\cdot dx$ im Falle ihrer Nicht-Existenz auffassen.

[3]) Bd. II[1] (1885), Art. 582.

[4]) Math. Ann. Bd. 26 (1886), S. 43.

Eine vollständig befriedigende und allgemeine Lösung der angedeuteten Fragen hat jedoch erst Herr C. Jordan geliefert,[1]) indem er durchweg die auch im Falle der Nicht-Existenz von $\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\cdot dy$, $\int_{x_0}^{X} f(x,y)\cdot dx$ völlig wohldefinirten und praecisen Begriffe des oberen und unteren Integrals in den Vordergrund stellt.

Bei der einigermaassen abstracten Fassung und ausserordentlich weit getriebenen Allgemeinheit[2]) der Jordan'schen Auseinandersetzungen dürfte vielleicht eine vereinfachte Darstellung der zu einer vollkommen strengen Auffassung und Begründung der Formel (I) dienlichen Betrachtungen nicht überflüssig erscheinen. Die von mir erzielten Vereinfachungen beruhen zum guten Theil auf der Anwendung einer gewissen neuen Bezeichnungsweise, welche mir nicht nur für den vorliegenden Fall, sondern für Fragen aller Art, in denen Unbestimmtheitsgrenzen eine Rolle spielen, äusserst zweckmässig erscheint. Nachdem dieselbe in Art. I erklärt ist, stelle ich zunächst in Art. II—IV diejenigen Definitionen und Sätze aus der Theorie der einfachen Integrale zusammen, welche für das folgende erforderlich sind. Hieran schliesst sich in Art. V die Definition des Doppel-Integrales und sodann in Art. VI die Erörterung der fraglichen Formel (I), zunächst unter der Annahme constanter Grenzen, also eines rechteckigen Integrations-Bereiches. Ich gebe den Beweis dafür unter zwei verschiedenen Formen, deren erste wie bei Du Bois Reymond auf der Heranziehung eines allgemeinen Grenzwerth-Satzes beruht, während die zweite als eine Complettirung des Harnack'schen Beweises gelten kann. Als Erläuterung für die Tragweite der bewiesenen Formel wende ich dieselbe auf eine Function an, bei welcher die Integrale $\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\cdot dy$, $\int_{x_0}^{X} f(x,y)\cdot dx$ für unend-

---

[1]) Journ. de Math. 4ième série, T. 8 (1892) p. 84, Art. 17. — Cours d'Analyse, 2de éd., T. I p. 42, Art. 56—58.

[2]) Herr Jordan dehnt z. B. den Integral-Begriff auf ganz beliebig gedachte, insbesondere also auch auf unstetige Punkt-Mengen aus.

lich viele, überall dicht liegende Werthe von x bezw. y nicht existiren. — In Art. VII folgt schliesslich die Uebertragung der Formel (I) auf den Fall eines krummlinig begrenzten Integrations-Bereiches mit Hülfe einer sehr einfachen Methode, welche zwar sehr nahe zu liegen scheint, aber meines Wissens für den vorliegenden Zweck bisher noch nicht angewendet wurde.

I. Oberer und unterer Limes. Ich bezeichne den oberen Limes (die obere Unbestimmtheits-Grenze) einer Zahlenfolge a_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) für $\lim \nu = \infty$, bezw. denjenigen einer Function $\varphi(x)$ für $\lim x = x_0$, durch das Symbol:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, a_\nu \quad \text{bezw.} \quad \overline{\lim_{x=x_0}}\, \varphi(x), \tag{1}$$

den unteren Limes entsprechend durch das Symbol:

$$\underline{\lim_{\nu=\infty}}\, a_\nu \quad \text{bezw.} \quad \underline{\lim_{x=x_0}}\, \varphi(x).\text{[1]} \tag{2}$$

Die Anwendung der Bezeichnungen:

$$\overline{\underline{\lim_{\nu=\infty}}}\, a_\nu \quad \text{bezw.} \quad \overline{\underline{\lim_{x=x_0}}}\, \varphi(x) \tag{3}$$

soll dann bedeuten, dass in dem betreffenden Zusammenhange ganz nach Willkür der obere oder untere Limes gewählt werden darf. Hiernach sagt z. B. eine Beziehung von der Form:

$$\overline{\underline{\lim_{\nu=\infty}}}\, a_\nu = a \tag{4}$$

nichts anderes aus, als dass der obere und untere Limes von a_ν den gemeinsamen Werth a besitzen d. h. dass in dem gewöhnlichen Sinne $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = a$ wird.

---

[1]) Ich habe bisher den oberen und unteren Limes einer Zahlenfolge a_ν mit

$$\lim_{\nu=\infty} \sup a_\nu, \quad \lim_{\nu=\infty} \inf a_\nu$$

bezeichnet. Wie ich nachträglich bemerkt habe und an dieser Stelle ausdrücklich erwähnen möchte, sind diese Bezeichnungen wohl zuerst von Herrn Pasch eingeführt worden: Math. Ann. Bd. **30** (1887), S. 134.

Der Nutzen der obigen Bezeichnungsweise tritt besonders deutlich hervor, wenn es sich um mehrere nach einander zu vollziehende Grenz-Uebergänge handelt. Namentlich gestattet dieselbe, gewisse Sätze über den Zusammenhang der Grenzwerthe von Functionen mehrerer Variablen bei simultanen und successiven Grenz-Uebergängen äusserst einfach und praegnant darzustellen. Hierher gehört z. B. der von mir bei anderer Gelegenheit[1]) ausgesprochene und bewiesene, im folgenden zu benützende Satz:

Ist:

$$\lim_{\mu=\infty} \inf a_{\mu\nu} = l_\nu, \quad \lim_{\mu=\infty} \sup a_{\mu\nu} = L_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\lim_{\nu=\infty} \inf a_{\mu\nu} = l_\mu', \quad \lim_{\nu=\infty} \sup a_{\mu\nu} = L_\mu' \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots),$$

so hat man stets:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\nu=\infty} l_\nu &= \lim_{\nu=\infty} L_\nu \\ \lim_{\mu=\infty} l_\mu' &= \lim_{\mu=\infty} L_\mu' \end{aligned}\right\} = \lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_{\mu\nu},$$

sobald ein endlicher oder bestimmt unendlicher $\lim\limits_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_{\mu\nu}$ existirt.

Dieser Satz lautet jetzt einfach folgendermaassen:

Man hat:

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned} &\overline{\underline{\lim_{\nu=\infty}}} \left(\overline{\underline{\lim_{\mu=\infty}}}\, a_{\mu\nu}\right) \\ &\overline{\underline{\lim_{\mu=\infty}}} \left(\overline{\underline{\lim_{\nu=\infty}}}\, a_{\mu\nu}\right) \end{aligned}\right\} = \lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_{\mu\nu}$$

allemal, wenn der rechts stehende Grenzwerth existirt.[2])

---

[1]) Sitz.-Ber. 1897, S. 105.

[2]) Mit Berücksichtigung der an Gl. (4) geknüpften Bemerkung kann man natürlich statt Gl. (5) auch schreiben:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\nu=\infty} \left(\overline{\underline{\lim_{\mu=\infty}}}\; a_{\mu\nu}\right) \\ &\lim_{\mu=\infty} \left(\overline{\underline{\lim_{\nu=\infty}}}\; a_{\mu\nu}\right) \end{aligned}\right\} = \lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_{\mu\nu}.$$

II. Oberes und unteres Integral. Es sei $f(x)$ endlich und eindeutig definirt im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$. Wird das letztere in n beliebige Theil-Intervalle δ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ zerlegt und bedeutet G_ν die obere, g_ν die untere Grenze von $f(x)$ im Intervalle δ_ν, so haben die Summen:

$$\sum_1^n{}^{\nu}\, G_\nu\, \delta_\nu = S_n \text{ eine bestimmte untere Grenze } S,$$

$$\sum_1^n{}^{\nu}\, g_\nu\, \delta_\nu = s_n \quad \text{„} \qquad \text{„} \qquad \text{obere} \qquad \text{„} \qquad s.\text{[1]}$$

Alsdann lässt sich zeigen,[2] dass:

$$(6) \qquad \lim_{\delta_\nu = 0} \sum_1^n{}^{\nu}\, G_\nu\, \delta_\nu = S, \quad \lim_{\delta_\nu = 1} \sum_1^n{}^{\nu}\, g_\nu\, \delta_\nu = s,$$

und zwar unabhängig von der Wahl der Theil-Intervalle δ_ν und der besonderen Art des Grenz-Ueberganges. Speciell ist also auch:

$$(7) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{A}{n} \cdot \sum_1^n{}^{\nu}\, G_\nu = S, \quad \lim_{n=\infty} \frac{A}{n} \cdot \sum_1^n{}^{\nu}\, g_\nu = s,$$

wenn $X - x_0 = A$, $\delta_\nu = \frac{A}{n}$ gesetzt wird, und G_ν bezw. g_ν wiederum die obere bezw. untere Grenze von $f(x)$ im ν^{ten} Theil-Intervalle bezeichnet.

S heisst sodann das obere, s das untere Integral von $f(x)$ für das Intervall (x_0, X) — in Zeichen (nach dem Vorgange des Herrn Peano):

---

[1]) Diese Art, die Zahlen S und s zu definiren (statt, wie gewöhnlich geschieht, ihre Definition an die Gleichungen (6) anzuknüpfen) rührt, wie ich einer Mittheilung des Herrn Stolz entnehme (Monatsh. f. Math. VIII, S. 95), von Herrn Peano her: Atti Torin. T. XVIII, p. 441 (1883). Dieselbe findet sich auch in der oben citirten Abhandlung des Herrn Pasch: a. a. O. S. 144.

[2]) S. z. B. Pasch, a. a. O. S. 143. — C. Jordan, Cours d'analyse, 2[de] éd., T. I, p. 33. —

$$(8)\qquad S = \overline{\int_{x_0}^{X}} f(x) \cdot dx, \quad s = \underline{\int_{x_0}^{X}} f(x) \cdot dx.$$

Die von mir im folgenden anzuwendende Bezeichnung:

$$(9)\qquad \overline{\underline{\int_{x_0}^{X}}} f(x)\, dx$$

soll dann wiederum ausdrücken, dass in der betreffenden Formel das obere oder untere Integral ganz nach Willkür gewählt werden kann.

III. Das obere und untere Integral als oberer und unterer Limes. Das obere bezw. untere Integral lässt sich auch noch in anderer Weise, nämlich als oberer bezw. unterer Limes der Summen von der Form $\sum_1^n {}^\nu f(\xi_\nu) \cdot \delta_\nu$ auffassen (wo ξ_ν dem Intervalle δ_ν angehört). Es gilt nämlich der folgende Satz:

Bedeutet ξ_ν irgend eine und jede beliebige Stelle des Intervalles δ_ν, so gelten die Beziehungen:

$$(10)\qquad \overline{\lim_{\delta_\nu = 0}} \sum_1^n {}^\nu f(\xi_\nu) \cdot \delta_\nu = S, \quad \underline{\lim_{\delta_\nu = 0}} \sum_1^n {}^\nu f(\xi_\nu) \cdot \delta_\nu = s,$$

bei beliebiger Wahl der Theil-Intervalle δ_ν. Insbesondere wird also:

$$(11)\qquad \begin{aligned} &\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{A}{n} \cdot \sum_0^{n-1} {}^\nu f\left(x_0 + \frac{(\nu + \vartheta_\nu) A}{n}\right) = S, \\ &\underline{\lim_{n=\infty}} \frac{A}{n} \cdot \sum_0^{n-1} {}^\nu f\left(x_0 + \frac{(\nu + \vartheta_\nu) A}{n}\right) = s \end{aligned}$$

(wo: $0 \leqq \vartheta_\nu \leqq 1$).

Beweis. Man hat bei jeder Wahl der Theil-Intervalle δ_ν, laut Definition:

(a) $$\sum_1^n{}^{\nu}\, G_\nu\, \delta_\nu \geqq S.$$

Andererseits lässt sich in Folge der Beziehung (6) δ_ν so klein, n so gross annehmen, dass:

(b) $$\sum_1^n{}^{\nu}\, G_\nu\, \delta_\nu < S + \varepsilon \text{ etwa für: } \delta_\nu \leqq \delta,\ n \geqq N,$$

wenn $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgeschrieben wird.

Da sodann für jede Wahl der Stelle ξ_ν innerhalb des Intervalles δ_ν stets: $f(\xi_\nu) \leqq G_\nu$, so wird auch:

(c) $$\sum_1^n{}^{\nu}\, f(\xi_\nu) \cdot \delta_\nu < S + \varepsilon \quad \text{für: } \delta_\nu \leqq \delta,\ \ n \geqq N.$$

In Folge der Definition von G_ν (als obere Grenze der Werthe $f(\xi_\nu)$ im Intervalle δ_ν) muss es aber in δ_ν Stellen ξ'_ν geben, sodass:

$$G_\nu - f(\xi'_\nu) < \frac{\varepsilon}{A} \quad (\text{wo: } A = X - x_0 = \sum_1^n{}^{\nu}\, \delta_\nu),$$

und daher:

$$\sum_1^n{}^{\nu}\, G_\nu\, \delta_\nu - \sum_1^n{}^{\nu}\, f(\xi'_\nu) \cdot \delta_\nu < \varepsilon$$

d. h.

$$\sum_1^n{}^{\nu}\, f(\xi'_\nu) > \sum_1^n{}^{\nu}\, G_\nu\, \delta_\nu - \varepsilon$$

(d) $$> S - \varepsilon \qquad \text{(s. Ungl. (a)).}$$

Aus Ungl. (c) und (d) folgt dann schliesslich, dass in der That:

$$\overline{\lim_{\delta_\nu = 0}} \sum_1^n{}^{\nu}\, f(\xi_\nu) \cdot \delta_\nu = S, \quad \text{q. e. d.}$$

Analog ergiebt sich:

$$\underline{\lim_{\delta_\nu = 0}} \sum_1^n{}^{\nu}\, f(\xi_\nu) \cdot \delta_\nu = s. \text{ —}$$

IV. Das bestimmte Integral. Ist $S = s$, und nur in diesem Falle, so wird nach III:

$$\overline{\lim_{\delta_\nu = 0}} \sum_1^n {}^\nu f(\xi_\nu) \cdot \delta_\nu = \underline{\lim_{\delta_\nu = 0}} \sum_1^n {}^\nu f(\xi_\nu) \cdot \delta_\nu, \tag{12}$$

d. h. dann existirt ein bestimmter $\lim\limits_{\delta_\nu = 0} \sum\limits_1^n {}^\nu f(\xi_\nu) \cdot \delta_\nu$, welcher als das bestimmte Integral von $f(x, y)$ in den Grenzen x_0 und X bezeichnet wird, und man setzt, wie üblich:

$$\lim_{\delta_\nu = 0} \sum_1^n {}^\nu f(\xi_\nu) \cdot \delta_\nu = \int_{x_0}^X f(x) \cdot dx. \tag{13}$$

In diesem Falle besteht also die Beziehung:

$$\overline{\int_{x_0}^X} f(x) \cdot dx = \int_{x_0}^X f(x) \cdot dx. \tag{14}$$

V. Das Doppel-Integral. Ist $f(x, y)$ endlich und eindeutig definirt im Innern und auf den Grenzen des continuirlichen und quadrirbaren[1]) Bereiches T, und bedeutet $\sum\limits_1^n {}^\nu t_\nu$ irgend eine Zerlegung von T in n quadrirbare Theilbereiche t_ν, ferner G_ν die obere, g_ν die untere Grenze von $f(x, y)$ für den Theilbereich t_ν, so besitzt von den beiden Summen:

$$\sum_1^n {}^\nu G_\nu \cdot t_\nu = S_n, \quad \sum_1^n {}^\nu g_\nu \cdot t_\nu = s_n \tag{15}$$

die erstere eine untere Grenze S, die letztere eine obere Grenze s. Und es lässt sich wiederum zeigen,[2]) dass bei beliebiger Wahl der Theilbereiche t_ν und unabhängig von der

---

[1]) Mit anderen Worten: die Punkte von T sollen ein stetiges System bilden, dem eine bestimmte Flächenzahl zukommt. Es erscheint mir pädagogisch zweckmässig, den Begriff der Flächenzahl, welche ja in Wahrheit nur einen speciellen Fall des Doppel-Integrals bildet, bei dessen allgemeiner Definition als bereits bekannt vorauszusetzen. —

[2]) S. z. B. Serret-Harnack, Bd. II, Art. 581. — C. Jordan, a. a. O. p. 33.

besonderen Art des Grenz-Ueberganges die Beziehungen bestehen:

(16) $$\lim_{\delta_\nu=0} \sum_1^n {}^\nu G_\nu \cdot t_\nu = S, \quad \lim_{\delta_\nu=0} \sum_1^n {}^\nu g_\nu \cdot t_\nu = s,$$

wenn δ_ν den grössten Durchmesser von t_ν bedeutet. S heisst alsdann das obere, s das untere Doppel-Integral[1]) von $f(x,y)$, erstreckt über den Bereich T.

Die Bedingung $S = s$ ist dann wiederum nothwendig und hinreichend für die Existenz eines bestimmten Grenzwerthes:

$$\lim_{\delta_\nu=0} \sum_1^n {}^\nu f(\xi_\nu, \eta_\nu) \cdot t_\nu$$

(wo (ξ_ν, η_ν) eine beliebige Stelle von t_ν bedeutet). Derselbe heisst das über T erstreckte Doppel-Integral von $f(x,y)$, in Zeichen:

(17) $$\lim_{\delta_\nu=0} \sum_1^n {}^\nu f(\xi_\nu, \eta_\nu) \cdot t_\nu = \iint_{(T)} f(x,y) \cdot dt.$$

VI. Das Doppel-Integral mit constanten Grenzen und seine Reduction auf ein iterirtes Integral. Ist der Bereich T ein Rechteck mit den Eckpunkten (x_0, y_0), (X, y_0), (X, Y), (x_0, Y), so mag das entsprechende Doppel-Integral mit $\iint_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x,y) \cdot dx \cdot dy$ bezeichnet werden. Wählt man alsdann als Theil-Bereiche $m \cdot n$ Rechtecke mit den Grundlinien δ_μ $(\mu = 1, 2, \ldots m)$ und den Höhen ε_ν $(\nu = 1, 2, \ldots n)$, so hat man laut Definitions-Gleichung (17):

(18) $$\iint_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x,y) \cdot dx \cdot dy = \lim_{\delta_\mu=0,\ \varepsilon_\nu=0} \sum_1^m {}^\mu \sum_1^n {}^\nu f(\xi_{\mu\nu}, \eta_{\mu\nu}) \cdot \delta_\mu \cdot \varepsilon_\nu,$$

---

[1]) Andere Definitionen und zugleich Verallgemeinerungen dieser Begriffe mit ausschliesslicher Benützung von geradlinig begrenzten Theilbereichen hat neuerdings Herr Stolz gegeben: „Zwei Grenzwerthe, von welchen das obere Integral ein besonderer Fall ist.“ Sitz.-Ber. d. Wiener Akad. **1897**, S. 453 ff.

und, wenn man die $\delta_\mu (\mu = 1, 2, \ldots m)$, ebenso die $\varepsilon_\nu (\nu = 1, 2, \ldots n)$ einander gleich macht:

$$\int\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy \tag{19}$$
$$= \lim_{m=\infty, n=\infty} \frac{AB}{mn} \sum_0^{m-1}{}^{\mu} \sum_0^{n-1}{}^{\nu} f\left(x_0 + \frac{(\mu + \vartheta_\mu) A}{m}, y_0 + \frac{(\nu + \vartheta'_\nu) B}{n}\right)$$

wo: $X - x_0 = A$, $Y - y_0 = B$, $0 \leqq \vartheta_\mu \leqq 1$, $0 \leqq \vartheta'_\nu \leqq 1$.

Dann soll gezeigt werden, dass:

$$\int\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy \begin{cases} = \overline{\int_{x_0}^{X}} dx \overline{\int_{y_0}^{Y}} f(x, y) \cdot dy \\ = \overline{\int_{y_0}^{Y}} dy \overline{\int_{x_0}^{X}} f(x, y) \cdot dx \end{cases} \tag{20}$$ [1]

allemal wenn das betreffende Doppel-Integral im Sinne der Def.-Gleichung (18) existirt.[2] —

Beweis I. Nach dem am Schlusse von Art. I citirten Satze oder, genauer gesagt, mit Hülfe einer leicht vorzunehmenden Modification[3]) desselben, ergiebt sich, wenn das fragliche Doppel-Integral, also der Grenzwerth (19) existirt, unmittelbar:

$$\int\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy$$
$$= \lim_{m=\infty} \frac{A}{m} \sum_0^{m-1}{}^{\mu} \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{B}{n} \sum_0^{n-1}{}^{\nu} f\left(x_0 + \frac{(\mu + \vartheta_\mu) A}{m}, y_0 + \frac{(\nu + \vartheta'_\nu) B}{n}\right)$$

d. h. mit Berücksichtigung von Gl. (11) und (8):

---

[1]) Selbstverständlich kann man bei den äusseren Integralen auch einfach: $\int_{x_0}^{X}$, $\int_{y_0}^{Y}$ schreiben — cf. Gl. (14).

[2]) Es handelt sich, mit anderen Worten, hier immer nur um „eigentliche" Doppel-Integrale.

[3]) Diese Modification ist erforderlich wegen der Unbestimmtheit der mit ϑ_μ, ϑ'_ν bezeichneten Zahlen.

$$\int\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x,y) \cdot dx \cdot dy = \lim_{m=\infty} \frac{A}{m} \sum_0^{m-1}{}^{\mu} \int_{y_0}^{Y} f\left(x_0 + \frac{(\mu + \vartheta_\mu) A}{m}, y\right) \cdot dy$$

und schliesslich:

$$\int\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x,y) \cdot dx \cdot dy = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x,y) \cdot dy, \quad \text{q. e. d.}$$

Analog erhält man:

$$\int\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x,y) \cdot dx \cdot dy = \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x,y) \cdot dx.$$

Beweis II. Es sei $\delta_\mu = x_\mu - x_{\mu-1}$, $\varepsilon_\nu = y_\nu - y_{\nu-1}$, ferner $G_{\mu\nu}$ die obere, $g_{\mu\nu}$ die untere Grenze von $f(x,y)$ in dem betreffenden Rechtecke, sodass also:

$$g_{\mu\nu} \leqq f(\xi_\mu, \eta_\nu) \leqq G_{\mu\nu} \quad \text{für:} \begin{cases} x_{\mu-1} \leqq \xi_\mu \leqq x_\mu \\ y_{\nu-1} \leqq \eta_\nu \leqq y_\nu. \end{cases}$$

Dagegen soll mit $G_\nu(\xi_\mu)$, $g_\nu(\xi_\mu)$ die obere bezw. untere Grenze von $f(\xi_\mu, y)$ im Intervalle $(y_{\nu-1}, y_\nu)$ bei constantem ξ_μ bezeichnet werden, also:

$$g_\nu(\xi_\mu) \leqq f(\xi_\mu, \eta_\nu) \leqq G_\nu(\xi_\mu) \quad \text{für: } y_{\nu-1} \leqq \eta_\nu \leqq y_\nu.$$

Alsdann ist offenbar:

$$g_{\mu\nu} \leqq g_\nu(\xi_\mu) \leqq G_\nu(\xi_\mu) \leqq G_{\mu\nu}$$

und daher:

$$\sum_1^n{}^{\nu} g_{\mu\nu} \cdot \varepsilon_\nu \leqq \sum_1^n{}^{\nu} g_\nu(\xi_\mu) \cdot \varepsilon_\nu \leqq \sum_1^n{}^{\nu} G_\nu(\xi_\mu) \cdot \varepsilon_\nu \leqq \sum_1^n{}^{\nu} G_{\mu\nu} \cdot \varepsilon_\nu.$$

Andererseits hat man nach Art. II:

$$\sum_1^n{}^{\nu} g_\nu(\xi_\mu) \cdot \varepsilon_\nu \leqq \underline{\int_{y_0}^{Y}} f(\xi_\mu \cdot y) \cdot dy \leqq \overline{\int_{y_0}^{Y}} f(\xi_\mu, y) \cdot dy \leqq \sum_1^n{}^{\nu} G_\nu(\xi_\mu) \cdot \varepsilon_\nu$$

und daher a fortiori:

$$\sum_1^n{}^{\nu} g_{\mu\nu} \cdot \varepsilon_\nu \leqq \overline{\underline{\int_{y_0}^{Y}}} f(\xi_\mu, y) \cdot dy \leqq \sum_1^n{}^{\nu} G_{\mu\nu} \cdot \varepsilon_\nu.$$

Daraus folgt weiter:

$$\sum_1^m{}^{\mu}\sum_1^n{}^{\nu} g_{\mu\nu}\cdot\delta_\mu\cdot\varepsilon_\nu \leqq \sum_1^m{}^{\mu}\delta_\mu\cdot\int_{y_0}^{Y} f(\xi_\mu, y)\cdot dy \leqq \sum_1^m{}^{\mu}\sum_1^n{}^{\nu} G_{\mu\nu}\cdot\delta_\mu\cdot\varepsilon_\nu,$$

und somit für $\lim m = \infty$, $\lim n = \infty$, unter der einzigen Voraussetzung, dass das betreffende Doppel-Integral in dem angegebenen Sinne existirt:

$$(20\text{a})\qquad \int\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x,y)\cdot dx\cdot dy = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x,y)\cdot dy, \quad \text{q. e. d.}$$

Analog ergiebt sich wiederum:

$$(20\text{b})\qquad \int\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x,y)\cdot dx\cdot dy = \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x,y)\cdot dx.$$

Zusatz. Man bemerke, dass die rechte Seite der Formeln (20) in jedem Falle durchaus wohldefinirte Operationen enthält, auch wenn keins der einfachen bestimmten Integrale $\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\cdot dy$, $\int_{x_0}^{X} f(x,y)\cdot dx$ existirt: für die Gültigkeit jener Formeln ist eben nur die Existenz des betreffenden Doppel-Integrals erforderlich.

Beispiel. Denkt man sich jeden Werth einer Veränderlichen x in der üblichen Weise[1]) durch einen endlichen oder unendlichen Decimalbruch dargestellt, so möge die Anzahl der jedesmal erforderlichen Decimalstellen durch p_x bezeichnet werden (sodass also p_x nur dann einen endlichen Werth besitzt, wenn x von der Form $\frac{m}{10^n}$ ist, während in jedem anderen Fall $p_x = \infty$ wird). Alsdann ist offenbar (bei beliebiger Wahl von x_0 und X):

$$(\text{a})\qquad \int_{x_0}^{X} \frac{1}{p_x + 1}\, dx = 0,$$

---

[1]) D. h. mit Ausschluss solcher unendlicher Decimalbrüche, welche die Periode 9 besitzen.

da es in jedem endlichen Intervalle (x_0, X) immer nur eine endliche Anzahl von Stellen x giebt, für welche p_x unter einer beliebig gross anzunehmenden, also $\frac{1}{p_x + 1}$ über einer beliebig klein anzunehmenden positiven Zahl liegt. Setzt man jetzt:

$$\text{(b)} \qquad f(x, y) = \frac{1}{p_x + 1} + \frac{1}{p_y + 1},$$

(sodass also $f(x, y) = 0$, ausser wenn mindestens eine der beiden Veränderlichen x, y durch einen endlichen Decimalbruch darstellbar ist), so erkennt man analog, dass:

$$\text{(c)} \qquad \int\!\!\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy = 0.$$

Andererseits hat man (mit Benützung von Gl. (a)):

$$\text{(d)} \qquad \overline{\int}_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy = \frac{1}{p_x + 1}(Y - y_0), \quad \underline{\int}_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy = 0,$$

$$\text{(e)} \qquad \overline{\int}_{x_0}^{X} f(x, y) \cdot dx = \frac{1}{p_y + 1}(X - x_0), \quad \underline{\int}_{x_0}^{X} f(x, y) \cdot dx = 0,$$

sodass also keins der beiden Integrale $\int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy$, $\int_{x_0}^{X} f(x, y)$ existirt. Nichtsdestoweniger findet man unmittelbar (wiederum mit eventueller Benützung von Gl. (a)):

$$\text{(f)} \qquad \int_{x_0}^{X} dx \overline{\underline{\int}}_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy = \int_{y_0}^{Y} dy \overline{\underline{\int}}_{x_0}^{X} f(x, y) \cdot dx = 0$$

d. h. die zweimalige Integration liefert den nämlichen Werth, wie das Doppel-Integral, und zwar gleichgültig, ob man für jedes der inneren Integrale in Gl. (f) das betreffende obere oder untere Integral in Rechnung zieht.[1])

---

[1]) Ein ähnliches Beispiel, bei welchem nur das eine Integral $\int_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy$ ein analoges Verhalten zeigt, gab schon Du Bois Reymond (a. a. O. S. 278).

VII. Reduction des Doppel-Integrals auf ein iterirtes Integral für einen (im wesentlichen) beliebig begrenzten Bereich. Es sei T ein quadrirbarer Bereich, dessen Begrenzung von jeder Parallelen zur Y-Axe nicht mehr als zweimal geschnitten wird. Sind dann x_0, X die äussersten Abscissen, denen noch Punkte der Begrenzungs-Curve entsprechen, und wird diese letztere durch die zu x_0 und X gehörigen Ordinaten in die beiden Curvenbögen zerlegt:

$$y = \varphi(x), \quad y = \Phi(x) \quad (\Phi(x) \geqq \varphi(x)),$$

so gilt die Beziehung:

$$(21) \qquad \iint_{(T)} f(x,y) \cdot dT = \int_{x_0}^{X} dx \int_{\varphi(x)}^{\Phi(x)} f(x,y) \cdot dy,$$

falls das Doppel-Integral in dem angegebenen Sinne existirt.

Beweis. Es bedeute $g(x,y)$ eine Function von der Beschaffenheit, dass:

$g(x,y) = f(x,y)$ für alle (x,y) des Bereiches T
$g(x,y) = 0$ „ „ „ ausserhalb T.

Ist dann U irgend ein den Bereich T einschliessender Bereich, so existirt das Doppel-Integral $\iint g(x,y) \cdot dU$ über den Bereich U erstreckt, da die Integrabilität von $g(x,y)$ durch die Unstetigkeit längs der Grenz-Curve von T offenbar nicht alterirt wird. Zugleich ergiebt sich, wenn $U = T + T'$ gesetzt wird:[1])

$$\iint_{(U)} g(x,y) \cdot dU = \iint_{(T)} f(x,y) \cdot dT \quad (\text{wegen: } \iint_{(T')} g(x,y) \cdot dT' = 0).$$

Bedeutet nun y_0 den kleinsten, Y den grössten Ordinatenwerth für die Grenz-Curve von T, und wählt man für den Bereich U dasjenige Rechteck, welches durch die vier Geraden: $x = x_0$, $x = X$, $y = y_0$, $y = Y$ begrenzt wird, so nimmt die letzte Gleichung (bei Vertauschung ihrer beiden Seiten) die folgende Form an:

---

[1]) Diese Zerlegung $U = T + T'$ soll so aufgefasst werden, dass derjenige Theil der Begrenzung von T, welcher auch T' begrenzt, zweimal gezählt, nämlich sowohl zu T als zu T' gerechnet wird.

$$\iint\limits_{(T)} f(x,y) \cdot dT = \int\!\!\int_{(x_0,y_0)}^{(X,Y)} g(x,y) \cdot dx \cdot dy,$$

und daher mit Anwendung von Gl. (20 a):

$$\iint\limits_{(T)} f(x,y) \cdot dT = \overline{\int_{x_0}^{X}} dx \overline{\int_{y_0}^{Y}} g(x,y) \cdot dy.$$

Da aber — in Folge der Definition von $g(x,y)$ — für jeden dem Intervalle (x_0, X) angehörigen Werth x offenbar die Beziehung besteht:

$$\overline{\int_{y_0}^{Y}} g(x,y) \cdot dy = \overline{\int_{\varphi(x)}^{\Phi(x)}} f(x,y) \cdot dy,$$

so ergiebt sich schliesslich:

$$\iint\limits_{(T)} f(x,y) \cdot dT = \overline{\int_{x_0}^{X}} dx \overline{\int_{\varphi(x)}^{\Phi(x)}} f(x,y) \cdot dy, \quad \text{q. e. d.}$$

Zusatz. Wird die Begrenzungs-Curve von T von jeder Parallelen zur X-Axe höchstens zweimal geschnitten, so findet man analog:

$$\iint\limits_{(T)} f(x,y) \cdot dT = \overline{\int_{y_0}^{Y}} dy \overline{\int_{\psi(y)}^{\Psi(y)}} f(x,y) \cdot dx, \tag{22}$$

wenn die Gleichungen:

$$x = \psi(y), \quad x = \Psi(y) \quad (\text{wo: } \Psi(y) \geqq \psi(y))$$

die beiden Curvenbögen darstellen, in welche die Grenz-Curve durch die beiden Geraden $x = x_0$, $x = X$ zerlegt wird.

Hierzu sei noch bemerkt, dass T offenbar eo ipso quadrirbar ist, wenn die Grenz-Curve von jeder Parallelen sowohl zur X- als zur Y-Axe nur in einer endlichen Anzahl von Punkten geschnitten wird.

13

Mit besten Grüßen!

Pr.

Ueber die Convergenz unendlicher Kettenbrüche.

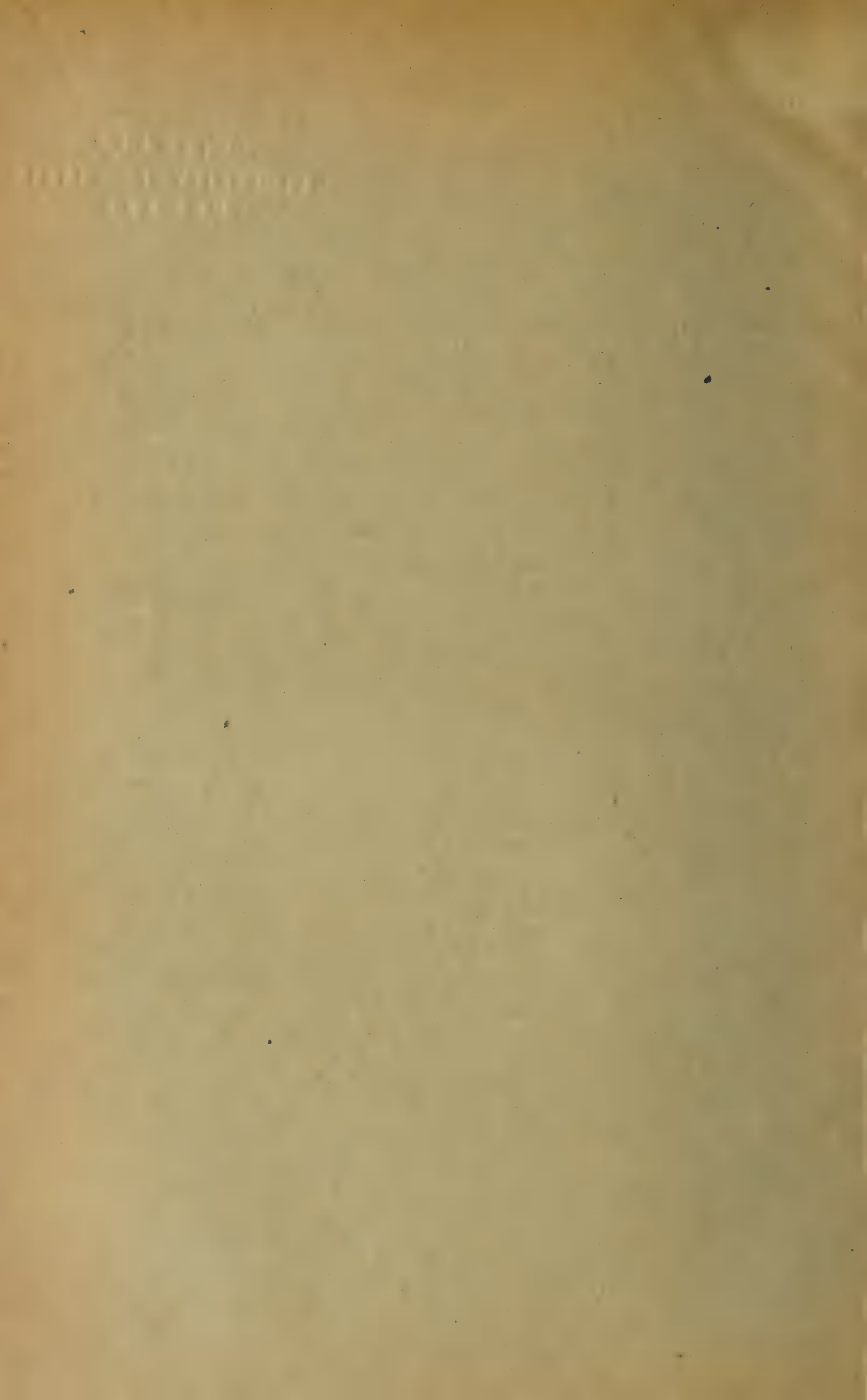
Von

Alfred Pringsheim.

Aus den Sitzungsberichten der mathematisch-physikalischen Classe der k. bayer. Akad. d. Wiss. 1898. Bd. XXVIII. Heft II.

München 1898.

Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub.



Ueber die Convergenz unendlicher Kettenbrüche.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 25. Juli.*)

Für die Beurtheilung der Convergenz von Kettenbrüchen mit beliebigen reellen oder complexen Gliedern besitzt man bisher, soweit mir die betreffende Literatur bekannt ist, keinerlei allgemeine Kriterien. In dem folgenden Aufsatze sollen einige Formen hinreichender Convergenz-Bedingungen von sehr einfachem Charakter und verhältnissmässig grosser Allgemeinheit mitgetheilt werden. Ich benütze diese Gelegenheit, um zunächst das Wesen der beiden verschiedenen Convergenz-Charaktere, die ich als unbedingte und bedingte Convergenz eines Kettenbruches bezeichne, genauer festzustellen (§ 2). Da bei dieser Untersuchung das eventuelle Vorkommen von sinnlosen Näherungsbrüchen (d. h. solchen mit dem Nenner 0) eine eingehende Berücksichtigung erfordert, so schicke ich zunächst einige Bemerkungen über die Natur und eventuelle Häufigkeit derselben voraus (§ 1). Sodann wird ein allgemeines Kriterium für die unbedingte Convergenz eines Kettenbruches mit beliebigen Gliedern aufgestellt, welches sich als eine directe Verallgemeinerung eines bekannten Kriteriums für Kettenbrüche mit lauter reellen negativen Gliedern erweist (§ 3). Nach einer Digression über eine durch jenes Kriterium ermöglichte Verallgemeinerung des Legendre'schen Irrationalitäts-Satzes (§ 4), werden mit Hülfe von sehr einfachen Transformationen zunächst für zwei speciellere Kettenbruch-Formen, schliesslich aber auch wieder für ganz beliebige Kettenbrüche noch andere Convergenz-Bedingungen von wesentlich verschiedenem Charakter abgeleitet (§ 5).

§ 1.

Zur Bezeichnung des n-gliedrigen Kettenbruches:

$$(1)\qquad \pm b_0 \pm \cfrac{a_1}{b_1 \pm \cfrac{a_2}{b_2 \pm \cdots \pm \cfrac{a_n}{b_n}}}$$

bediene ich mich der gedrängteren Schreibweise:

$$(2)\qquad \pm b_0 \pm \frac{a_1|}{|b_1} \pm \frac{a_2|}{|b_2} \pm \ldots \pm \frac{a_n|}{|b_n}$$

oder auch der Symbole:

$$(3)\qquad \left[\pm b_0;\ \pm \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{n\,(\nu)}, \qquad \left[\pm b_0;\ \pm \frac{a_1}{b_1},\ \ldots \pm \frac{a_m}{b_m},\ \pm \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{n\,(\nu)},$$

wofür ich im Falle $b_0 = 0$ kürzer schreibe:

$$(4)\qquad \left[\pm \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{n\,(\nu)}, \qquad \left[\pm \frac{a_1}{b_1},\ \ldots \pm \frac{a_m}{b_m},\ \pm \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{n\,(\nu)}.$$

Analog bezeichne ich den entsprechenden unendlichen Kettenbruch durch:

$$(5)\qquad \pm b_0 \pm \frac{a_1|}{|b_1} \pm \frac{a_2|}{|b_2} \pm \ldots \pm \frac{a_\nu|}{|b_\nu} \pm \ldots$$

oder:

$$(6)\qquad \left[\pm b_0;\ \pm \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{\infty\,(\nu)}, \qquad \left[\pm b_0;\ \pm \frac{a_1}{b_1},\ \ldots \pm \frac{a_m}{b_m},\ \pm \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty\,(\nu)}.$$

Dabei pflege ich in (3), (4) und (6) die ausdrückliche Hervorhebung des laufenden Index ν durch das beigesetzte Zeichen (ν) überall da wegzulassen, wo ein Missverständniss ausgeschlossen erscheint (also: $\left[\pm b_0;\ \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$ etc.).

Die a_ν, b_ν sollen im folgenden beliebige (reelle oder complexe) Zahlen bedeuten, mit der einzigen (gewissermaassen selbstverständlichen) Beschränkung, dass die a_ν durchweg als von Null verschieden angenommen werden. Wegen der Willkürlichkeit der a_ν, b_ν kann daher das oben beliebig gelassene Vorzeichen $\pm$ überall wegfallen, da derselbe Grad von Allgemeinheit erzielt wird, wenn man statt $\pm b_0$, $\pm a_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) lediglich b_0, a_ν schreibt. Es genügt also, für die folgenden Betrachtungen einen Kettenbruch von der Form:

$$\left[b_0;\ \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n \quad \text{bezw.} \quad \left[b_0;\ \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty \tag{7}$$

zu Grunde zu legen.

Wird sodann ein System von Zahlen A_ν, B_ν durch die Gleichungen definirt:

$$(8)\left\{\begin{array}{lll} \text{(a)} & A_0 = b_0 & B_1 = 1 \\ \text{(b)} & A_1 = b_1 b_0 + a_1 & B_1 = b_1 \\ \text{(c)} & A_\nu = b_\nu A_{\nu-1} + a_\nu A_{\nu-2} & B_\nu = b_\nu B_{\nu-1} + a_\nu B_{\nu-2} \quad (\nu \geq 2), \end{array}\right.$$

so bezeichne ich den zunächst rein formal definirten Ausdruck $\frac{A_m}{B_m}$ ($m = 1, 2, 3 \ldots$) als den m^{ten} Näherungsbruch der Kettenbrüche (7), gleichgültig, ob $\frac{A_m}{B_m}$ eine bestimmte Zahl vorstellt oder nicht. Ersteres findet offenbar allemal statt, wenn $|B_m| > 0$ ist, und dieser Fall tritt sicher dann ein, wenn der Kettenbruch $\left[b_0;\ \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m$ einen bestimmten Sinn besitzt; zugleich wird hierbei:

$$\left[b_0;\ \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m = \frac{A_m}{B_m}. \tag{9}$$

Es kann aber auch $\frac{A_m}{B_m}$ eine bestimmte Zahl vorstellen, ohne dass das gleiche für den betreffenden Kettenbruch gilt.[1])

---

[1]) Vgl. Stolz, Vorl. über Allg. Arithm. Bd. II, S. 269.

In diesem Falle sehe ich den Werth des Kettenbruches als durch Gl. (9) definirt an, so dass ich also $\frac{A_m}{B_m}$ schlechthin als den Werth des Kettenbruches bezeichne, sofern nur B_m von Null verschieden ausfällt.

Ist dagegen $B_m = 0$, so sage ich, der m^{te} Näherungsbruch werde sinnlos. Ueber den einzig möglichen Charakter solcher sinnloser Näherungsbrüche und den eventuellen Umfang ihres Auftretens gewinnt man Aufschluss mit Hülfe der bekannten Formel:

$$A_m B_{m-1} - B_m A_{m-1} = (-1)^{m-1} \cdot a_1 a_2 \dots a_m, \tag{10}$$

aus welcher sich unmittelbar die nachstehenden Consequenzen ergeben:

I. Es kann niemals gleichzeitig $A_{m-1} = 0$, $A_m = 0$ sein

II. Sind B_{m-1}, B_m von Null verschieden, so kann niemals die Beziehung bestehen:

$$\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} = \frac{A_m}{B_m}.$$

III. Ist $B_m = 0$, so kann nicht gleichzeitig $B_{m-1} = 0$ sein — vice versa; es kann also mit $B_m = 0$ nicht auch gleichzeitig $B_{m+1} = 0$ sein.

IV. Es kann niemals gleichzeitig $A_m = 0$, $B_m = 0$ sein.

Aus der Zusammenfassung von III und IV ergiebt sich schliesslich:

V. Wird irgend ein Näherungsbruch $\frac{A_m}{B_m}$ sinnlos, so kann das nur in der Weise geschehen, dass $B_m = 0$, dagegen A_m von Null verschieden. Zugleich kann dann keiner der benachbarten Näherungsbrüche $\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}$, $\frac{A_{m+1}}{B_{m+1}}$ sinnlos werden.

§ 2.

Der Kettenbruch $\left[b_0;\ \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ heisst convergent, wenn $\lim_{n=\infty}\frac{A_n}{B_n}$ eine bestimmte Zahl (incl. 0) vorstellt. Aus dieser Definition folgt unmittelbar, dass zu einem convergenten Kettenbruche höchstens eine endliche Zahl von sinnlosen Näherungsbrüchen gehören kann, während andererseits die Zulässigkeit einer solchen endlichen Anzahl sinnloser Näherungsbrüche keineswegs ausgeschlossen erscheint.

Bekanntlich involvirt die Convergenz des obigen Kettenbruches durchaus nicht diejenige aller Kettenbrüche von der Form $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ für $m \geqq 1$: mit anderen Worten, ein convergenter Kettenbruch kann — im Gegensatze zu einer convergenten Reihe oder einem convergenten Producte — durch Weglassung einer endlichen Anzahl von Anfangsgliedern divergent werden.[1])

Ich bezeichne nun den Kettenbruch $\left[b_0;\ \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ als unbedingt convergent, wenn $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ für jedes $m \geqq 0$ convergirt; andererseits als bedingt convergent, wenn zwar $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ convergirt, dagegen unter den Kettenbrüchen $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ für $m \geqq 1$ mindestens ein divergenter sich befindet.[2])

---

[1]) Vgl. Stolz, a. a. O. S. 280. — Stern, Algebr. Analysis, S. 307. 482.

[2]) Besondere Benennungen zur ausdrücklichen Kennzeichnung dieser beiden verschiedenen Convergenz-Charaktere scheinen bisher nicht üblich geworden zu sein. Da ich solche — wie die folgenden Auseinandersetzungen des näheren zeigen — für äusserst wünschenswerth halten muss, so bediene ich mich der im Texte angegebenen Ausdrücke. Dieselben werden also hier in wesentlich anderer Bedeutung gebraucht, als in der Theorie der unendlichen Reihen und Producte, wo sie die

Da das Anfangsglied b_0 auf den Convergenz-Charakter des betreffenden Kettenbruches offenbar keinen Einfluss ausüben kann, so steht es frei, bei der weiteren Untersuchung der beiden angedeuteten Möglichkeiten von vornherein $b_0 = 0$ anzunehmen und somit von dem Kettenbruche $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ auszugehen. Es werde dann wieder gesetzt:

$$(10) \qquad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n = \frac{A_n}{B_n} \text{ für } n \geqq 1; \; A_0 = 0, \; B_0 = 1,$$

und entsprechend für $m \geqq 0$:

$$(11) \quad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^n = \frac{A_{m,n}}{B_{m,n}} \text{ für } n \geqq m+1; \; A_{m,m} = 0, \; B_{m,m} = 1,$$

so dass also speciell: $A_{0,n} = A_n$, $B_{0,n} = B_n$ wird. Dabei sind die Beziehungen (10), (11) wiederum lediglich so zu verstehen, dass A_n, B_n bezw. $A_{m,n}$, $B_{m,n}$ die rein formal nach dem Vorbilde der Gleichungen (8) gebildeten Zähler und Nenner der betreffenden Näherungsbrüche bedeuten — gleichgültig, ob B_n, $B_{m,n}$ für jeden Werth n von Null verschieden sind und ob die links stehenden Kettenbrüche ein Sinn haben oder nicht. Zwischen den A_n, B_n und $A_{m,n}$, $B_{m,n}$ bestehen alsdann, wie leicht zu sehen, die Relationen:

$$(12) \qquad \begin{cases} A_n = B_{m,n} A_m + A_{m,n} A_{m-1} \\ B_n = B_{m,n} B_m + A_{m,n} B_{m-1} \end{cases} (n \geqq m \geqq 1).$$

Es werde nun der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ als convergent und sein Werth $\lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n} = K$ vorläufig als von Null verschieden vorausgesetzt. Ueber die Convergenz oder Divergenz des

---

Existenz bezw. Nicht-Existenz des commutativen Charakters bezeichnen. Da bei der grundverschiedenen Bildungsweise der Kettenbrüche etwas derartiges überhaupt nicht in Frage kommen kann, so erscheint wohl jedes Missverständniss nach dieser Richtung von vornherein ausgeschlossen.

Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty} (m \geqq 1)$ entscheidet auf Grund der oben gegebenen Definition lediglich das Verhalten von $\lim_{n=\infty} \frac{A_{m,n}}{B_{m,n}}$. Hierbei sind folgende zwei Fälle zu unterscheiden:

I. Die $B_{m,n}$ sollen — zum mindesten von einer bestimmten Stelle $n \geqq n_0$ ab — durchweg von Null verschieden sein. Da in Folge der Convergenz von $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{\infty}$ das analoge für die B_n gilt, so stellen — zum mindesten für hinlänglich grosse n — die Quotienten:

$$(13) \qquad \frac{A_n}{B_n} = K_n, \qquad \frac{A_{m,n}}{B_{m,n}} = K_{m,n}$$

bestimmte Zahlen vor. Alsdann ergiebt sich aus (12) die Beziehung:

$$(14) \qquad K_n = \frac{A_m + K_{m,n} A_{m-1}}{B_m + K_{m,n} B_{m-1}}$$

und, da der Nenner der rechten Seite $\left(= \frac{B_n}{B_{m,n}}\right)$ wiederum von Null verschieden ist, so folgt weiter:

$$(15) \qquad (K_n \cdot B_{m-1} - A_{m-1}) \cdot K_{m,n} = -(K_n \cdot B_m - A_m)$$

also schliesslich für $\lim n = \infty$:

$$(16) \qquad (K \cdot B_{m-1} - A_{m-1}) \cdot \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty} = -(K \cdot B_m - A_m) \; (m \geqq 1)$$

Hieraus folgt aber, dass $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty}$ allemal convergirt, wenn $|K \cdot B_{m-1} - A_{m-1}| > 0$, d. h. wenn $\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}$ von K verschieden ausfällt (wobei es gleichgültig ist, ob $\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}$ eine bestimmte Zahl vorstellt oder sinnlos wird, da ja im letzteren Falle, nach § 1, V, $|A_{m-1}| > 0$ sein muss).

Ist dagegen $K \cdot B_{m-1} - A_{m-1} = 0$, d. h.:

$$\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} = K = \lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n}, \tag{17}$$

so muss offenbar $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty}$ nach ∞ divergiren[1]) (da keinesfalls gleichzeitig $K \cdot B_m - A_m = 0$ sein kann, nämlich weder: $A_m = B_m = 0$ nach § 1, IV, noch: $\frac{A_m}{B_m} = K = \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}$ nach § 1, II).

II. Es mögen unter den $B_{m,n}$ unendlich viele den Werth 0 haben, etwa $B_{m,n_\nu} = 0$, wo (n_ν) für $\nu = 1, 2, 3 \ldots$ eine unbegrenzte Folge natürlicher Zahlen bedeutet. Alsdann ist ohne weiteres klar, dass $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty}$ keinesfalls convergiren kann. Man kann aber auch nicht sagen, dass er nach ∞ divergire, da ja unter den Näherungsbrüchen $\frac{A_{m,n}}{B_{m,n}}$ unendlich viele schlechthin sinnlos werden. Dagegen lässt sich nachweisen — und das scheint mir hierbei wesentlich — dass auch in diesem Falle[2]) die Gleichung (17) bestehen muss. Ersetzt man nämlich in Gl. (12) n durch n_ν, so folgt, wegen $B_{m,n_\nu} = 0$:

---

[1]) Darunter ist hier immer nur zu verstehen, dass der absolute Betrag von $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty}$ unendlich gross wird. Dagegen braucht, wenn z. B. die a_ν, b_ν reell sind, der Kettenbruch keineswegs „eigentlich“, d. h. nach $+\infty$ bezw. $-\infty$, zu divergiren, sondern könnte auch zwischen den Werthen $-\infty$ und $+\infty$ oscilliren.

[2]) Dass dieser zunächst nur als möglich erscheinende Fall auch wirklich vorkommt, d. h. dass es wirklich convergente Kettenbrüche $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{1}^{\infty}$ giebt, für welche unendlich viele Näherungsbrüche $\frac{A_{m,n_\nu}}{B_{m,n_\nu}}$ sinnlos ausfallen, wird weiter unten gezeigt werden. Vorläufig bemerke man, dass aus:

$$\frac{A_{n_\nu}}{B_{n_\nu}} = \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} \tag{19}$$

(18) $\quad A_{n_\nu} = A_{m,n_\nu} \cdot A_{m-1} \qquad B_{n_\nu} = A_{m,n_\nu} \cdot B_{m-1}$

und daher, weil $|A_{m,n_\nu}| > 0$ und für hinlänglich grosse ν, etwa für $\nu \geqq \nu_0$ auch $|B_{n_\nu}| > 0$ sein muss:

(19) $$\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} = \frac{A_{n_\nu}}{B_{n_\nu}} \quad (\nu = \nu_0,\ \nu_0 + 1,\ \nu_0 + 2,\ \ldots)$$

also schliesslich:

(20) $$\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} = \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{n_\nu}}{B_{n_\nu}} = \lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n} = K, \text{ q. e. d.}$$

Bezeichnet man sodann mit p_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ die nach Ausschluss der m_ν übrig bleibenden natürlichen Zahlen,[1]) so dass also durchweg $|B_{m,p_\nu}| > 0$, so ergiebt sich mit Berücksichtigung von Gl. (20), wenn man in Gl. (15) $n = p_\nu$ setzt, dass die Folge der nicht-sinnlosen Kettenbrüche $\frac{A_{m,p_\nu}}{B_{m,p_\nu}}$ für $\lim \nu = \infty$ nach ∞ divergirt.

---

und den für $n = n_\nu$ aus (12) hervorgehenden Beziehungen:

$$A_{n_\nu} = B_{m,n_\nu} \cdot A_m + A_{m,n_\nu} \cdot A_{m-1}$$
$$B_{n_\nu} = B_{m,n_\nu} \cdot B_m + A_{m,n_\nu} \cdot B_{m-1}$$

stets auch umgekehrt folgt:

$$B_{m,n_\nu} = 0.$$

Denn wäre $|B_{m,n_\nu}| > 0$, so würde sich (gleichgültig, ob $|A_{m,n_\nu}| > 0$ oder $= 0$) allemal ergeben: $\frac{A_{n_\nu}}{B_{n_\nu}} = \frac{A_m}{B_m} = \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}$, was nach § 1, II unmöglich ist. Besteht also Gl. (19) für unendlich viele n_ν, so werden auch die unendlich vielen Näherungsbrüche $\frac{A_{m,n_\nu}}{B_{m,n_\nu}}$ sinnlos.

[1]) Die p_ν müssen allemal wirklich eine unendliche Menge bilden, da ja niemals zwei consecutive $B_{m,n}$ verschwinden können.

Ich will von einem Kettenbruche, der zwar unendlich viele sinnlose Näherungsbrüche besitzt, während immerhin die Folge der übrigen nach ∞ divergirt, sagen: er divergire im wesentlichen nach ∞. Man hat dann für einen derartigen Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty}$ zwar nicht $\lim_{n=\infty} \frac{A_{m,n}}{B_{m,n}} = \infty$ (sondern nur: $\lim_{\nu=\infty} \frac{A_{m,p_\nu}}{B_{m,p_\nu}} = \infty$), dagegen: $\lim_{n=\infty} \frac{B_{m,n}}{A_{m,n}} = 0$. Bei Anwendung dieser Terminologie gilt nun der Satz:

Wenn $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty}$ schlechthin oder im wesentlichen nach ∞ divergirt, so convergirt $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m}^{\infty}$ nach Null — und umgekehrt.

Für die nach Gl. (11) mit $A_{m-1,n}$, $B_{m-1,n}$ zu bezeichnenden Näherungsbruch-Zähler und -Nenner von $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m}^{\infty}$ gelten nämlich die Beziehungen:

$$(21) \qquad \begin{cases} A_{m-1,n} = a_m B_{m,n} \\ B_{m-1,n} = b_m B_{m,n} + A_{m,n}. \end{cases}$$

Folglich wird:

$$(22) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{A_{m-1,n}}{B_{m-1,n}} = \lim_{n=\infty} \frac{a_m \cdot \frac{B_{m,n}}{A_{m,n}}}{1 + b_m \frac{B_{m,n}}{A_{m,n}}} = 0, \quad \text{wenn:} \quad \lim_{n=\infty} \frac{B_{m,n}}{A_{m,n}} = 0.$$

Umgekehrt ergiebt sich:

$$(23) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{B_{m,n}}{A_{m,n}} = \lim_{n=\infty} \frac{\frac{A_{m-1,n}}{B_{m-1,n}}}{a_m - b_m \cdot \frac{A_{m-1,n}}{B_{m-1,n}}} = 0, \quad \text{wenn:} \quad \lim_{n=\infty} \frac{A_{m-1,n}}{B_{m-1,n}} = 0$$

(aber, im letzteren Falle, nicht nothwendig: $\lim_{n=\infty} \frac{A_{m,n}}{B_{m,n}} = \infty$) — q. e. d.

Mit Hülfe dieses letzten Resultates lässt sich auch noch der oben vorläufig ausgeschlossene Fall: $\lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n} = K = 0$ unmittelbar erledigen. Da hier $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = 0$ wird, so folgt nämlich aus dem eben gesagten, dass $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty$ schlechthin oder im wesentlichen nach ∞ divergirt. Zugleich hat man — wegen $A_0 = 0$, $B_0 = 1$:

$$(24) \qquad \frac{A_0}{B_0} = \lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n} \quad (\text{nämlich} = 0),$$

d. h. es besteht Gl. (17) bezw. (20) für den besonderen Werth $m = 1$ und es divergirt auch (schlechthin oder im wesentlichen) $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ für $m = 1$, so dass also dieser Fall ohne weiteres unter die früher als I., II. bezeichneten subsumirt werden kann. Findet dann aber die Gleichung:

$$(25) \qquad \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} = \lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n} = 0$$

für irgend einen weiteren Werth m statt, so hat man $A_{m-1} = 0$, also $|A_m| > 0$, und erkennt analog wie früher aus Gl. (15) (mit der einzigen Modification, dass jetzt $\lim_{n=\infty} K_n = 0$ zu setzen ist), dass $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ schlechthin oder im wesentlichen nach ∞ divergirt; und in gleicher Weise ergiebt sich die Convergenz dieses Kettenbruches, falls für das betreffende m die Gl. (25) nicht besteht, d. h. wenn A_{m-1} von Null verschieden ist.

Durch Zusammenfassung dieser Resultate ergiebt sich nun, wenn man noch die bisher mit m bezeichnete Zahl durch $m + 1$ ersetzt, der folgende Satz:

20*

Ist $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = K$ (wo K endlich oder Null), so **convergirt** $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+2}^\infty$ $(m \geqq 0)$, falls $\frac{A_m}{B_m}$ von K verschieden (event. auch sinnlos) ausfällt; ist dagegen $\frac{A_m}{B_m} = K$, so **divergirt** $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+2}^\infty$ schlechthin oder im wesentlichen nach ∞, während dann $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty = 0$ wird.

Und es folgt weiter:

Die **nothwendige und hinreichende** Bedingung für die **unbedingte** Convergenz des convergenten Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = K$ besteht darin, dass für **keinen** Werth $m \geqq 0$ die Beziehung $\frac{A_m}{B_m} = K$ stattfindet. Convergirt der Kettenbruch nur bedingt, so existirt mindestens ein Werth m derart, dass $\frac{A_m}{B_m} = K$ wird, d. h. der **unendliche** Kettenbruch: $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ kann in diesem Falle durch den **endlichen**: $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m$ ersetzt werden.[1])

---

[1]) Dabei wird im Falle $K = 0$ auch $m = 0$, d. h. der im allgemeinen Falle $|K| > 0$ auftretende endliche Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m$ reducirt sich hier auf 0. Zugleich erkennt man, dass ein Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = 0$ nie anders als bedingt convergiren kann. Denn nach dem oben gesagten muss ja $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty$ allemal schlechthin oder im wesentlichen nach ∞ divergiren. Man könnte danach die Definition der unbedingten

Hiernach besitzen also ausschliesslich unbedingt convergente Kettenbruch-Entwickelungen einer Zahl oder Function K den Charakter einer gewissen analytischen Nothwendigkeit: jede der Zahlen a_ν, b_ν steht, wie gross auch ν sein mag, zu K in einer bestimmten, durch die vorangehenden Zahlen $a_0, b_0, \ldots a_{\nu-1}, b_{\nu-1}$ vermittelten Beziehung, in der K selbst eine wesentliche Rolle spielt. Ist dagegen $K = \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ (wo $|K| > 0$) nur bedingt convergent, so giebt es eine oder eine erste Zahl m von der Beschaffenheit, dass: $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m = K$, dagegen: $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty = 0$ wird. Hier besteht offenbar ein bestimmter Zusammenhang mit der Zahl K nur für die Zahlen $a_1, b_1, \ldots a_m, b_m$, während alle übrigen a_ν, b_ν $(\nu > m)$ von K völlig unabhängig sind und nur der Bedingung $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty = 0$ zu genügen haben. Man könnte geradezu in dem Kettenbruche $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$, ohne seinen Werth zu verändern, alle Glieder $\frac{a_\nu}{b_\nu}$ für $\nu \geqq m + 1$ durch unendlich viele andere Systeme $\frac{a'_\nu}{b'_\nu}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ ersetzen, die bis auf die Bedingung $\left[\frac{a'_\nu}{b'_\nu}\right]_1^\infty = 0$ als willkürlich anzusehen wären.

Ueber solche Kettenbrüche von der Form $\left[\frac{a'_\nu}{b'_\nu}\right]_1^\infty = 0$ sei noch folgendes bemerkt. Aus dem oben gesagten geht hervor

---

Convergenz auch folgendermaassen fassen: Der convergente Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ heisst unbedingt convergent, wenn keiner der Kettenbrüche $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ nach Null convergirt.

(da $\frac{A'_1}{B'_1} = \frac{a'_1}{b'_1}$ sicher von $\left[\frac{a'_\nu}{b'_\nu}\right]_1^\infty$ d. h. 0 verschieden), dass $\left[\frac{a'_\nu}{b'_\nu}\right]_3^\infty$ convergiren muss. Und da andererseits $\left[\frac{a'_\nu}{b'_\nu}\right]_2^\infty$ schlechthin oder im wesentlichen nach ∞ divergirt, so folgt, dass:

$$\left[\frac{a'_\nu}{b'_\nu}\right]_3^\infty = -b_2 \tag{26}$$

sein muss. Besitzt nun der Kettenbruch die Eigenschaft, dass für keinen weiteren Werth m (d. h. ausser für $m = 0$) die Beziehung besteht: $\frac{A'_m}{B'_m} = 0$, so convergirt jeder der Kettenbrüche $\left[\frac{a'_\nu}{b'_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ für $m \geqq 2$, also convergirt der Kettenbruch (26) unbedingt. Man gewinnt also in diesem Falle aus der nur bedingt convergirenden Null-Entwickelung eine unbedingt convergirende für die Zahl b_2. Auf diese Weise hat z. B. Legendre[1]) die Entwickelung:

$$-3 = \left[-\frac{\pi^2}{2\nu - 1}\right]_3^\infty \tag{27}$$

abgeleitet, die ihm zum Beweise der Irrationalität von π^2 diente.

Ein analoger Schluss ist offenbar auch dann möglich, wenn für eine endliche Anzahl von Werthen m die Relation $\frac{A'_m}{B'_m} = 0$ stattfindet.

Es ist aber auch der Fall denkbar, dass die Gleichung:

$$\frac{A'_{m_\nu}}{B'_{m_\nu}} = 0 \tag{28}$$

---

[1]) Éléments de Géométrie, Note IV. — Aus:

$$\operatorname{tang} x = \left[\frac{x}{1}, -\frac{x^2}{2\nu - 1}\right]_2^\infty$$

folgt nämlich für $x = \pi$:

$$0 = \left[\frac{\pi}{1}, -\frac{\pi^2}{2\nu - 1}\right]_2^\infty$$

(Stolz, a. a. O. S. 315. — Stern, a. a. O. S. 481. 482).

für eine unendliche Folge von Zahlen m_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ stattfindet. Alsdann werden unter den Kettenbrüchen von der Form $\left[\frac{a'_\nu}{b'_\nu}\right]_{m+1}^{\infty}$ unendlich viele divergente vorkommen (nämlich alle für $m = m_\nu + 1$ resultirenden, so dass also der vorgelegte Kettenbruch selbst nach Abtrennung einer beliebig grossen Anzahl von Anfangsgliedern niemals einen unbedingt convergenten liefern kann.

Da diese Möglichkeit meines Wissens niemals erörtert worden ist, so dürfte es nicht überflüssig sein, nachzuweisen, dass der fragliche, zunächst nur als denkbar hingestellte Fall auch wirklich construirt werden kann.

Nach einer bekannten Euler'schen Formel[1]) hat man:

$$s_n = \sum_1^n{}^\nu \frac{1}{q_\nu} = \left[\frac{1}{q_1},\ -\frac{q_{\nu-1}^2}{q_{\nu-1}+q_\nu}\right]_2^n = \left[\frac{a'_\nu}{b'_\nu}\right]_1^n \tag{29}$$

und hieraus resultirt für $\lim n = \infty$, falls $\sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{q_\nu}$ convergirt, die Transformation dieser Reihe in einen aequivalenten Kettenbruch, d. h. einen solchen, dessen Näherungsbrüche $\frac{A'_n}{B'_n}$ mit den Partialsummen s_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ übereinstimmen. Wählt man also die betreffende Reihe in der Weise, dass $\sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{q_\nu} = 0$ und ausserdem für unendlich viele Zahlen m_ν die Beziehung besteht: $s_{m_\nu} = 0$, so wird auch allemal $\frac{A'_{m_\nu}}{B'_{m_\nu}} = 0$. Eine solche Wahl lässt sich aber auf unendlich viele Arten mit Leichtigkeit bewerkstelligen: es braucht nur $s_{m_\nu} = 0$ und für $\nu \geqq 1$: $s_{m_\nu} - s_{m_{\nu-1}} = 0$ angenommen zu werden, d. h. die Reihe muss aus lauter Gliedergruppen mit der Summe 0 bestehen, wobei man noch, um durchweg von Null verschie-

[1]) Introductio, T. I, § 369.

dene b'_ν zu erhalten, vermeiden wird, dass für irgendwelche Werthe von ν: $q_{\nu-1} + q_\nu = 0$ sich ergiebt. Man setzeze z. B.

$$\sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{q_\nu} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} + \ldots$$

(30)
$$+ \frac{1}{c_{2\nu-1}} + \frac{1}{c_{2\nu}} - \frac{1}{c_{2\nu-1}} - \frac{1}{c_{2\nu}} + \ldots,$$

so wird diese Ruhe stets convergiren, wenn nur $\lim\limits_{\nu=\infty} |c_\nu| = \infty$.

Zugleich hat man für alle möglichen ν: $s_{4\nu} = \frac{A'_{4\nu}}{B'_{4\nu}} = 0$.

Man kann also thatsächlich in unbegrenzter Zahl Kettenbrüche $\left[\frac{a'_\nu}{b'_\nu}\right]_1^\infty$ angeben, bei denen für unendlich viele Werthe m_ν die Relation besteht:

(31)
$$0 = \frac{A'_0}{B'_0} = \frac{A'_{m_\nu}}{B'_{m_\nu}}.$$

Aus einer früher gemachten Bemerkung (S. 4, Fussnote 2) geht dann noch hervor, dass in diesem Falle der Kettenbruch $\left[\frac{a'_\nu}{b'_\nu}\right]_2^\infty$ unendlich viele sinnlose Näherungsbrüche liefert, indem nämlich durchweg $B'_{1,m_\nu} = 0$ wird (der betr. Kettenbruch divergirt also nur „im wesentlichen" nach ∞). Dieses Resultat lässt sich auch ohne weiteres auf einen Kettenbruch mit beliebigem von Null verschiedenen Werthe K übertragen: man braucht nur an irgend einen m-gliedrigen Kettenbruch $K = \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m$ einen Kettenbruch der eben betrachteten Art anzuhängen, indem man b_m durch $b_m + \left[\frac{a'_\nu}{b'_\nu}\right]_1^\infty$ ersetzt. Damit ist schliesslich auch der Nachweis erbracht, dass dem oben unter II als möglich angenommenen Falle reale Existenz zukommt.

---

§ 3.

Elementare Convergenz-Kriterien von einiger Allgemeinheit hat man, wie Herr Stolz in seinen „Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik" ausdrücklich hervorhebt,[1]) nur für Kettenbrüche mit reellen, gleichbezeichneten Gliedern, d. h. für solche von der Form $\left[\frac{p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty$ und $\left[-\frac{p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty$, wo die p_ν, q_ν wesentlich positive reelle Zahlen bedeuten.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Convergenz der ersteren besteht, wie Seidel[2]) und Stern[3]) gezeigt haben, in der Divergenz der Reihe $\sum d_\nu$, wo:

$$(32) \quad d_{2\nu} = \frac{p_1 p_3 \ldots p_{2\nu-1}}{p_2 p_4 \ldots p_{2\nu}} \cdot q_{2\nu}, \quad d_{2\nu+1} = \frac{p_2 p_4 \ldots p_{2\nu}}{p_1 p_3 \ldots p_{2\nu+1}} \cdot \frac{q_{2\nu+1}}{p_{2\nu+1}}.$$

Daraus ergiebt sich dann als eine hinreichende Convergenz-Bedingung von merklich einfacherer Form die Divergenz der Reihe: $\sum \frac{q_\nu q_{\nu+1}}{p_\nu}$.[4])

Was die Kettenbrüche der zweiten Kategorie betrifft, so hat Seidel[5]) für den besonderen Fall $p_\nu = 1$, Stern[6]) für den allgemeineren beliebiger positiver p_ν die hinreichende Convergenz-Bedingung aufgefunden:

$$(33) \qquad q_\nu - p_\nu \geqq 1 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Im folgenden soll nun gezeigt werden, dass diese Convergenz-Bedingung mutatis mutandis für ganz beliebige Kettenbrüche gilt, d. h. dass bei beliebigen reellen oder

---

[1]) A. a. O. S. 280.

[2]) Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Kettenbrüche. Doctor-Dissertation, München 1846.

[3]) Journ. f. Math. Bd. 37 (1848), S. 264. 266.

[4]) Stolz, a. a. O. S. 284.

[5]) Abh. d. Bayr. Ak., 2. Cl., Bd. VII (1855), S. 582.

[6]) Algebr. Analysis, S. 301.

complexen a_ν, b_ν der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ allemal convergirt (und zwar unbedingt), wenn:

(34) $$|a_\nu| - |b_\nu| \geqq 1 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$ [1]

Zugleich lassen sich aus diesem Convergenz-Kriterium durch passende Transformationen noch andere ableiten, welche nicht als specielle Fälle darin enthalten sind. Ich beweise den fraglichen Hauptsatz zunächst für Kettenbrüche von etwas speciellerer Form, nämlich:

Sind p_ν, q_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ beliebige **positive** Zahlen, welche durchweg der Bedingung genügen:

$$q_\nu - p_\nu \geqq 1,$$

[1]) Wie ich nachträglich aus einer kurzen Notiz im Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik Bd. 21 (1892), S. 186 ersehe, hat Herr J. W. Sleschinski die Convergenz-Bedingung aufgestellt:

$$|a_\nu| - |b_\nu| > 1$$

(also, wie es scheint, mit Ausschluss des weiter unten noch besonders vortheilhaft zu verwerthenden Falles der Gleichheit). In dem citirten Referate wird lediglich dieses Factum ohne jeden weiteren Zusatz angeführt, und es ist nicht einmal zu ersehen, ob die a_ν, b_ν nur reelle oder auch complexe Zahlen bedeuten. Die in russischer Sprache geschriebene und in der Moskauer Math. Sammlung publicirte Arbeit selbst ist mir bisher nicht zugänglich gewesen. Das gleiche gilt von einer anderen in dem nämlichen Referate erwähnten Arbeit desselben Verfassers, in welcher für Kettenbrüche von der Form $\left[\frac{c_\nu}{1}\right]_1^\infty$ die Convergenz-Bedingung $\lim_{\nu=\infty} c_\nu = 0$ angegeben wird. Die letztere ist in dieser Form sicherlich unrichtig. Denn, sieht man von dem besonderen Falle ab, dass der Kettenbruch lauter positive Theilzähler und Theilnenner besitzt, so üben ja die Anfangsglieder, wie aus den Untersuchungen des vorigen Paragraphen des näheren hervorgeht, einen ganz wesentlichen Einfluss auf die Convergenz des Kettenbruches. Aus einer Bedingung, die sich nur auf das Verhalten der Kettenbruch-Glieder im Unendlichen bezieht, kann also höchstens auf die Convergenz des Kettenbruches von einer gewissen (nicht einmal angebbaren) Stelle geschlossen werden. Im übrigen stellt die obige Bedingung (mit der angemessenen Correctur) nur einen sehr speciellen Fall der weiter unten (Ungl. (78)) von mir aufgestellten: $|c_\nu| \leqq \frac{1}{4}$ dar.

$\varepsilon_\nu (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ reelle oder complexe Zahlen mit dem absoluten Betrage 1, so ist der Kettenbruch $\left[\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty$ **unbedingt** convergent. Setzt man sodann: $\left[\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty = K$, so ist $K = \varepsilon_1$, wenn die Reihe $\sum p_1 p_2 \ldots p_\nu$ **divergirt** und ausserdem für jedes $\nu \geqq 1$:

$$q_\nu - p_\nu = 1, \qquad \varepsilon_{\nu+1} = -1;$$

dagegen hat man in **jedem** anderen Falle: $0 < |K| < 1$.

Beweis. Bezeichnet man mit $\frac{P_\nu}{Q_\nu}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ die Näherungsbrüche des obigen Kettenbruches, so wird zunächst:

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{0}{1}, \qquad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{\varepsilon_1 p_1}{q_1}$$

also:

$$(35) \qquad |Q_0| = 1 \qquad |Q_1| = q_1 \geqq 1 + p_1$$

und daher:

$$(36) \qquad |Q_1| - |Q_0| \geqq p_1 > 0.$$

Da sodann für $\nu \geqq 2$ die Beziehung besteht:

$$(37) \qquad Q_\nu = q_\nu \cdot Q_{\nu-1} + \varepsilon_\nu p_\nu Q_{\nu-2},$$

so folgt:

$$|Q_\nu| \geqq (1 + p_\nu) \cdot |Q_{\nu-1}| - p_\nu |Q_{\nu-2}|$$

oder:

$$(38) \qquad |Q_\nu| - |Q_{\nu-1}| \geqq p_\nu \{|Q_{\nu-1}| - |Q_{\nu-2}|\}.$$

Hieraus ergiebt sich durch Substitution von $(\nu - 1)$, $(\nu - 2)$, $\ldots 2$ an Stelle von ν:

$$(39) \quad \begin{cases} |Q_{\nu-1}| - |Q_{\nu-2}| \geqq p_{\nu-1} \{|Q_{\nu-2}| - |Q_{\nu-3}|\} \\ |Q_{\nu-2}| - |Q_{\nu-3}| \geqq p_{\nu-2} \{|Q_{\nu-3}| - |Q_{\nu-4}|\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ |Q_2| - |Q_1| \geqq p_2 \{|Q_1| - |Q_0|\} \geqq p_2 p_1. \end{cases}$$

Diese Ungleichungen lehren zunächst, dass sämmtliche Differenzen von der Form $|Q_\nu| - |Q_{\nu-1}|$ wesentlich positiv sind, d. h. die $|Q_\nu|$ nehmen mit ν monoton zu. Durch successive Einführung der Gleichungen (39) in (38) findet man alsdann:

$$(40) \qquad |Q_\nu| - |Q_{\nu-1}| \geqq p_1 p_2 \ldots p_\nu.$$

Wird hier nochmals für ν der Reihe nach $(\nu-1), (\nu-2) \ldots 2$ gesetzt, so folgt durch Addition der sämmtlichen resultirenden Ungleichungen zu Ungl. (40):

$$(41) \qquad |Q_\nu| - |Q_1| \geqq p_1 p_2 + p_1 p_2 p_3 + \cdots + p_1 p_2 \ldots p_\nu,$$

und hieraus schliesslich mit Berücksichtigung von (35):

$$(42) \qquad |Q_\nu| \geqq 1 + p_1 + p_1 p_2 + \cdots + p_1 p_2 \ldots p_\nu = s_\nu.$$

Man bemerke, dass in dieser Relation das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn in den sämmtlichen zu ihrer Herleitung benützten Relationen (35), (38) ebenfalls das Gleichheitszeichen steht. Hierzu ist aber nothwendig und hinreichend, dass erstens:

$$(43) \qquad q_\nu = 1 + p_\nu \quad \text{für alle } \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

und zweitens:

$$(44) \qquad \varepsilon_\nu = -1 \quad \text{für alle } \nu = 2, 3, 4, \ldots$$

(s. den Uebergang von Gl. (37) zu der darauf folgenden Ungleichung). Nur in diesem Falle wird also:

$$(42\text{a}) \qquad |Q_\nu| = 1 + p_1 + p_1 p_2 + \cdots + p_1 p_2 \ldots p_\nu = s_\nu$$

in jedem anderen:

$$(42\text{b}) \qquad |Q_\nu| > 1 + p_1 + p_1 p_2 + \cdots + p_1 p_2 \ldots p_\nu = s_\nu.$$ [1])

Nun ist bekanntlich:

$$(45) \qquad \left[\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty = \lim_{\nu=\infty} \frac{P_\nu}{Q_\nu} = \frac{\varepsilon_1 p_1}{Q_1} + \sum_2^\infty{}^\nu (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\varepsilon_1 p_1 \cdot \varepsilon_2 p_2 \ldots \varepsilon_\nu p_\nu}{Q_{\nu-1} Q_\nu}$$

---

[1]) Das Zeichen $>$ gilt dann, wie leicht zu sehen, auch noch für $\lim \nu = \infty$.

oder, wenn man:

$$p_1 p_2 \ldots p_\nu = s_\nu - s_{\nu-1}, \qquad p_1 = s_1 - 1$$

substituirt:

$$(46) \qquad \left[\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty = \varepsilon_1 \cdot \frac{s_1 - 1}{Q_1} + \sum_2^\infty {}^\nu (-1)^{\nu-1} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_\nu \cdot \frac{s_\nu - s_{\nu-1}}{Q_{\nu-1} Q_\nu},$$

und somit:

$$(47) \qquad \left|\left[\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty\right| \leqq \frac{s_1 - 1}{Q_1} + \sum_2^\infty {}^\nu \frac{s_\nu - s_{\nu-1}}{Q_{\nu-1} Q_\nu}.$$

Sieht man zunächst von dem durch Gl. (43), (44) charakterisirten Specialfalle ab, so ergiebt sich mit Benützung von Ungl. (42b):

$$(48) \qquad \left|\left[\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty\right| < 1 - \frac{1}{s_1} + \sum_2^\infty {}^\nu \left(\frac{1}{s_{\nu-1}} - \frac{1}{s_\nu}\right) = 1 - \lim_{\nu=\infty} \frac{1}{s_\nu}$$

(mit Ausschluss der G l e i c h h e i t). Hieraus folgt, dass die Reihe (46) a b s o l u t c o n v e r g i r t; es c o n v e r g i r t also auch der K e t t e n b r u c h und wie Ungl. (48) lehrt, ist sein absoluter Werth < 1 (gleichgültig ob $\lim \frac{1}{s_\nu} = 0$ oder > 0).

Sind dagegen die Special-Bedingungen (43), (44) erfüllt, so geht durch Einführung von Gl. (44) und (42b) die Beziehung (46) in die folgende über:

$$(49) \qquad \left[\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty = \varepsilon_1 \left\{1 - \frac{1}{s_1} + \sum_2^\infty {}^\nu \left(\frac{1}{s_{\nu-1}} - \frac{1}{s_\nu}\right)\right\} = \varepsilon_1 \left(1 - \lim_{\nu=\infty} \frac{1}{s_\nu}\right).$$

Ist also die Reihe $1 + p_1 + \sum_2^\infty {}^\nu p_1 p_2 \ldots p_\nu = \lim_{\nu=\infty} s_\nu$ c o n v e r g e n t, etwa $\lim_{\nu=\infty} s_\nu = s$ (wo: $s > 1$), so wird:

$$(50) \qquad \left[\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty = \varepsilon_1 \left(1 - \frac{1}{s}\right), \text{ also wiederum: } \left|\left[\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty\right| < 1.$$

Ist dagegen die obige Reihe divergent, d. h. $\lim_{\nu=\infty} s_\nu = \infty$, so wird:

$$(51) \quad \left[\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{q_\nu}\right] = \varepsilon_1, \text{ d. h. in diesem einzigen Falle: } \left|\left[\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty\right| = 1.$$

Da die vorstehenden Betrachtungen auch gültig bleiben, wenn man den Kettenbruch statt mit dem Gliede $\frac{\varepsilon_1 p_1}{q_1}$ mit einem beliebigen späteren Gliede beginnen lässt, so ergiebt sich, dass seine Convergenz eine unbedingte ist. Daraus folgt schliesslich noch, dass sein Werth K stets von Null verschieden ausfällt. Damit ist aber der oben ausgesprochene Satz in allen Theilen bewiesen.

Ist jetzt der Kettenbruch in der Form vorgelegt $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$, wo a_ν, b_ν beliebige reelle oder complexe Zahlen, so werde gesetzt:

$$(52) \quad \begin{cases} a_\nu = \alpha_\nu \cdot |a_\nu| & \text{wo also: } |\alpha_\nu| = 1 \\ b_\nu = \beta_\nu \cdot |b_\nu| & \quad\quad\text{"} \quad \text{"} \quad |\beta_\nu| = 1. \end{cases}$$

Alsdann hat man:

$$(53) \quad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \left[\frac{\alpha_\nu \cdot |a_\nu|}{\beta_\nu \cdot |b_\nu|}\right]_1^\infty = \left[\frac{\frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot |a_1|}{|b_1|}, \ \frac{\frac{\alpha_\nu}{\beta_{\nu-1}\beta_\nu} \cdot |a_\nu|}{|b_\nu|}\right]_2^\infty.$$

Damit ist der vorgelegte Kettenbruch auf die zuvor betrachtete Form gebracht und der oben bewiesene Satz kann daher jetzt auch folgendermaassen ausgesprochen werden:

Bedeuten a_ν, b_ν reelle oder complexe Zahlen mit den Charakteristiken[1]) α_ν, β_ν, so ist der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ **unbedingt** convergent, wenn:

---

[1]) Ich pflege die Zahl $\frac{a}{|a|}$ als die Charakteristik von a zu bezeichnen. (Math. Ann. Bd. 33 (1889), S. 124).

(54) $$|a_\nu| - |b_\nu| \geqq 1 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Sein absoluter Werth ist stets < 1, ausser wenn durchweg:

(55) $$|a_\nu| - |b_\nu| = 1, \qquad \beta_\nu \beta_{\nu+1} = -\alpha_{\nu+1} \;(\nu \geqq 1),$$

und $\sum |a_1 a_2 \ldots a_\nu|$ divergirt. In diesem einen Falle wird:

(56) $$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad \text{also:} \quad \left|\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty\right| = 1.$$

Es ist leicht ersichtlich, in welcher Weise dieser Satz zu modificiren ist, falls die Convergenz-Bedingung (54) erst für $\nu \geqq m$ (wo $m > 1$ erfüllt ist.

---

§ 4.

Mit Hülfe des eben bewiesenen Satzes lässt sich der bekannte Legendre'sche Irrationalitäts-Satz folgendermaassen formuliren:[1])

Sind g_ν, h_ν positive ganze Zahlen, welche der Bedingung genügen:[2])

(57) $$h_\nu - g_\nu \geqq 1 \quad (\nu = 1, 2, 3 \ldots),$$

und bedeutet ε_ν für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ ganz nach Belieben die positive oder negative Einheit, so con-

---

[1]) Genau genommen ist dies im wesentlichen diejenige Form, in welcher Legendre den fraglichen Satz schon ausgesprochen, aber in der Hauptsache nicht bewiesen hat. Vgl. die bezüglichen Bemerkungen in der folgenden Mittheilung: „Ueber die ersten Beweise der Irrationalität von e und π", p. 336.

[2]) Hat man durchweg $\varepsilon_\nu = +1$, so genügt bekanntlich für die Convergenz des Kettenbruches und die Irrationalität seines Werthes schon die Bedingung: $h_\nu - g_\nu \geqq 0$. Vgl. Stolz, a. a. O. S. 297.

vergirt der Kettenbruch $\left[\frac{\varepsilon_\nu g_\nu}{h_\nu}\right]_1^\infty$ stets gegen einen **irrationalen** Werth, sofern nicht durchweg:

$$(58)\quad h_\nu - g_\nu = 1,\ \varepsilon_{\nu+1} = -1 \text{ für } \mu \geqq m \text{ (wo: } m \geqq 1).$$

Im letzteren Falle wird: $\varepsilon_1 \cdot \left[\frac{\varepsilon_\nu g_\nu}{h_\nu}\right]_1^\infty = 1$ bezw. ein rationaler ächter Bruch, je nachdem $m = 1$ bezw. $m > 1$.

Beweis. Da der Kettenbruch nach dem Satze des § 3 unbedingt convergirt, so kann gesetzt werden:

$$(59)\qquad \left[\frac{\varepsilon_\nu g_\nu}{h_\nu}\right]_{m+1}^\infty = K_m \quad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

wo die K_m $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ bestimmte Zahlen von der Beschaffenheit bedeuten, dass im allgemeinen $|K_m| < 1$, nur in dem durch die Gleichungen (58) charakterisirten Specialfalle $K_m = \varepsilon_m$.[1]) Daraus folgt dann unmittelbar die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Behauptungen, soweit sie sich auf den genannten Specialfall beziehen.

Sind nun die fraglichen Special-Bedingungen nicht erfüllt, so hat man für jeden Werth von m $(m = 0, 1, 2, \ldots)$: $|K_m| < 1$ (mit Ausschluss der Gleichheit). Aus der Annahme: $K_0 = \frac{p}{q}$, wo $p \leqq q - 1$ sein müsste, würde dann folgen:

$$(60)\qquad \frac{p}{q} = \frac{\varepsilon_1 g_1}{h_1 + K_1}$$

also:

$$(61)\quad K_1 = \frac{\varepsilon_1 g_1 q - h_1 p}{p} \text{ und zugleich: } 0 < |K_1| < 1,$$

d. h. K_1 wäre ein ächter Bruch, dessen Nenner höchstens $= q - 1$ sein könnte. Durch Uebertragung dieser Schlussweise auf $K_2, K_3, \ldots$ gelangt man also zu dem Resultate, dass K_m, wo m höchstens $= q - 1$ sein könnte, ein ächter

---

[1]) Die für die Existenz dieser letzteren Beziehung noch erforderliche Bedingung, dass $\sum g_1 g_2 \ldots g_\nu$ divergirt, ist hier wegen $g_\nu \geqq 1$ eo ipso erfüllt.

Bruch mit dem Nenner 1 sein müsste, was absurd ist. Somit kann in dem betrachteten Falle K_0 nur eine Irrationalzahl (wie leicht zu sehen, mit dem Vorzeichen ε_1) sein.

Es hat wiederum keine Schwierigkeit, den vorstehenden Satz auf den Fall zu übertragen, dass die Haupt-Bedingung (57) erst für $\nu \geqq m$, wo $m > 1$, erfüllt ist.

---

§ 5.

Ich wende jetzt das in § 3 aufgestellte Convergenz-Kriterium auf die besonders häufig vorkommenden Kettenbruch-Formen $\left[\pm \frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$ und $\left[\pm \frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ an. Die unmittelbare Anwendung derselben auf den ersten dieser beiden Typen liefert die Convergenz-Bedingung:

$$(62) \qquad |b_\nu| \geqq 2.$$

Auf den zweiten Typus lässt sich das fragliche Kriterium überhaupt nicht direct, sondern erst durch Vermittelung der Transformation in einen aequivalenten Kettenbruch anwenden. Das nämliche Hülfsmittel giebt auch für den ersten Typus eine Convergenz-Bedingung von etwas grösserer Allgemeinheit als die direct abgeleitete Bedingung (62).

Bezeichnet man mit c_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) beliebige von Null verschiedene Zahlen, so hat man bekanntlich:

$$(63) \qquad \left[\pm \frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty = \left[\pm \frac{c_1}{c_1 b_1}, \ \pm \frac{c_{\nu-1}\, c_\nu}{c_\nu\, b_\nu}\right]_2^\infty$$

und, wenn man speciell $c_{2\nu} = 1$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) setzt:

$$(64) \quad \left[\pm \frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty = \pm \frac{c_1 \mid}{\mid c_1 b_1} \pm \frac{c_1 \mid}{\mid b_2} \pm \ldots \pm \frac{c_{2\nu-1} \mid}{\mid c_{2\nu-1} b_{2\nu-1}} \pm \frac{c_{2\nu-1} \mid}{\mid b_{2\nu}} \pm \ldots$$

Nimmt man sodann die $c_{2\nu-1}$ als reell und positiv an, so folgt, dass der Kettenbruch convergirt, wenn für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$:

$$(65) \qquad \begin{cases} c_{2\nu-1} \cdot |b_{2\nu-1}| - c_{2\nu-1} \geqq 1 \\ \qquad\qquad |b_{2\nu}| - c_{2\nu-1} = 1. \end{cases}$$

Aus der zweiten dieser Bedingungen findet man:

(66) $$c_{2\nu-1} = |b_{2\nu}| - 1,$$

so dass die erste in die folgende übergeht:

(67) $$\{|b_{2\nu-1}| - 1\} \cdot \{|b_{2\nu}| - 1\} \geqq 1$$

oder anders geschrieben:

(68) $$\left|\frac{1}{b_{2\nu-1}}\right| + \left|\frac{1}{b_{2\nu}}\right| \leqq 1 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Die Form dieser Bedingung zeigt unmittelbar, dass dann mit dem Kettenbruche $\left[\pm\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$ auch alle diejenigen von der Form: $\left[\pm\frac{1}{b_\nu}\right]_{2n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ convergiren. Da aber der absolute Werth eines jeden dieser Kettenbrüche nach dem Satze des § 3 die Einheit nicht übersteigt und andererseits die Bedingung (68) allemal die folgende involvirt: $|b_{2n}| > 1$, so ist $\left[b_{2n};\ \pm\frac{1}{b_\nu}\right]_{2n+1}^\infty$ stets von Null verschieden, also auch jeder Kettenbruch von der Form: $\left[\pm\frac{1}{b_\nu}\right]_{2n}^\infty$ convergent. Somit gewinnt man den Satz:

Genügen die (reellen oder complexen) Zahlen b_ν der Bedingung (68), so ist der Kettenbruch $\left[\pm\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$ **unbedingt** convergent.

Die ursprünglich aufgefundene Convergenz-Bedingung (62) ist offenbar als specieller Fall in (68) enthalten.[1])

[1]) Eine noch etwas speciellere, nämlich: $|b_\nu| > 2 + \varepsilon$, wo $\varepsilon > 0$, hat Herr S. Pincherle angegeben: Rendicenti Accad. dei Lincei, Serie 4, Vol. V (1889), p. 640.

Nach Analogie von Gl. (63) hat man ferner:

$$(69)\qquad \left[\pm\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty = \left[\pm\frac{c_1\,a_1}{c_1},\ \pm\frac{c_{\nu-1}\,c_\nu\,a_\nu}{c_\nu}\right]_2^\infty.$$

Eine einfache Ueberlegung zeigt, dass sich hier die Wahl $c_{2\nu} = 2$ $(\nu = 1, 2, 3 \ldots)$ als zweckmässig erweist. Alsdann wird zunächst, wenn man der Symmetrie halber den Kettenbruch noch mit 2 multiplicirt:

$$(70)\qquad \begin{aligned} 2\cdot\left[\pm\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty &= \pm\frac{2\,c_1\,a_1|}{|\;c_1} \pm \frac{2\,c_1\,a_2|}{|\;2} \pm \ldots \\ &\pm \frac{2\,c_{2\nu-1}\,a_{2\nu-1}|}{|\;c_{2\nu-1}} \pm \frac{2\,c_{2\nu-1}\,a_{2\nu}|}{|\;2} \pm \ldots, \end{aligned}$$

so dass bei reellen positiven Werthen der $c_{2\nu-1}$ der Kettenbruch sicher convergirt, wenn für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$:

$$(71)\qquad \begin{cases} c_{2\nu-1} - 2\,c_{2\nu-1}\cdot|\,a_{2\nu-1}\,| \geqq 1 \\ \quad 2 - 2\,c_{2\nu-1}\cdot|\,a_{2\nu}\,| = 1. \end{cases}$$

Aus der zweiten dieser Bedingungen folgt sodann:

$$(72)\qquad c_{2\nu-1} = \frac{1}{2\,|\,a_{2\nu}\,|},$$

wodurch sich die erste auf die folgende reducirt:

$$\frac{1}{2\,|\,a_{2\nu}\,|}\cdot\{1 - 2\cdot|\,a_{2\nu-1}\,|\} \geqq 1,$$

d. h.

$$(73)\qquad |\,a_{2\nu-1}\,| + |\,a_{2\nu}\,| \leqq \tfrac{1}{2}\quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Auch hier ergiebt sich wiederum aus der Form dieser Bedingung, dass gleichzeitig mit dem Kettenbruche: $\left[\pm\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ auch alle möglichen: $\left[\pm\frac{a_\nu}{1}\right]_{2n+1}^\infty$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ convergiren. Da aber, wie Gl. (70) lehrt (wenn man darin den Index 1 durch $2n + 1$ ersetzt), hier das Doppelte jedes solchen

Kettenbruches der Convergenz-Bedingung des § 3 genügt und daher, absolut genommen, die Einheit nicht übersteigt, so ist $\left[1; \pm\frac{a_\nu}{1}\right]_{2n+1}^{\infty}$ stets von Null verschieden, folglich $\left[\pm\frac{a_\nu}{1}\right]_{2n}^{\infty}$ convergent und daher $\left[\pm\frac{a_\nu}{1}\right]_{1}^{\infty}$ unbedingt convergent.

Dabei lässt sich schliesslich die Anfangs-Bedingung der Serie (73), d. h.

$$|a_1| + |a_2| \leqq \tfrac{1}{2} \tag{74}$$

noch vereinfachen. Da nämlich die Convergenz des Kettenbruches nicht alterirt wird, wenn man denselben mit einem beliebigen von Null verschiedenen Factor multiplicirt, so kann man in der Bedingung (74) $|a_1|$ ohne weiteres auch durch $\varepsilon \cdot |a_1|$ ersetzen. Nimmt man hier für ε eine hinlänglich kleine positive Zahl, so wird die Bedingung

$$\varepsilon \cdot |a_1| + |a_2| \leqq \tfrac{1}{2} \tag{75}$$

immer erfüllt sein, sofern nur:

$$|a_2| < \tfrac{1}{2} \text{ (mit Ausschluss der Gleichheit).} \tag{76}$$

Somit ergiebt sich der folgende Satz:

Genügen die (reellen oder complexen) Zahlen a_ν den Bedingungen:

$$|a_2| < \tfrac{1}{2}, \quad |a_{2\nu+1}| + |a_{2\nu+2}| \leqq \tfrac{1}{2} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots), \tag{77}$$

so ist der Kettenbruch $\left[\pm\frac{a_\nu}{1}\right]_{1}^{\infty}$ unbedingt convergent.

Als einfachere, aber offenbar weniger allgemeine Form der Convergenz-Bedingung ergiebt sich dann aus (77) noch unmittelbar die folgende:

$$|a_2| < \tfrac{1}{2}, \quad |a_\nu| \leqq \tfrac{1}{4} \quad (\nu \geqq 3). \tag{78}$$

Der zuletzt gewonnene Satz kann benützt werden, um eine neue Convergenz-Bedingung für Kettenbrüche von der allgemeinen Form: $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ abzuleiten. Transformirt man nämlich diesen Kettenbruch in einen aequivalenten von dem eben betrachteten Typus, so wird:

$$(79) \qquad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \left[\frac{a_1 : b_1}{1}, \; \frac{a_\nu : b_{\nu-1}\, b_\nu}{1}\right]_2^\infty.$$

Der letztere Kettenbruch und somit auch der vorgelegte convergirt aber unbedingt,[1]) wenn (Ungl. (77)):

$$(80) \qquad \left|\frac{a_2}{b_1\, b_2}\right| < \tfrac{1}{2}, \quad \left|\frac{a_{2\nu+1}}{b_{2\nu}\, b_{2\nu+1}}\right| + \left|\frac{a_{2\nu+2}}{b_{2\nu+1}\, b_{2\nu+2}}\right| \leqq \tfrac{1}{2} \quad (\nu \geqq 1)$$

oder auch, etwas weniger allgemein (Ungl. (78)):

$$(81) \qquad \left|\frac{a_2}{b_1\, b_2}\right| < \tfrac{1}{2}, \quad \left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1}\, b_\nu}\right| \leqq \tfrac{1}{4} \quad (\nu \geqq 3).$$

Die vorstehenden Convergenz-Bedingungen tragen offenbar einen wesentlich anderen Charakter als die früher aufgestellte (Ungl. (54)), da hier nicht mehr die Differenzen der einzelnen $|a_\nu|$, $|b_\nu|$, sondern lediglich die Verhältnisse $\left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1}\, b_\nu}\right|$ in Betracht kommen. Dieselben gestatten mancherlei functionen-

---

[1]) Convergirt der eine von zwei aequivalenten Kettenbrüchen unbedingt, so gilt dies offenbar auch von dem anderen. Denn aus:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \left[\frac{c_1\, a_1}{b_1}, \; \frac{c_{\nu-1}\, c_\nu\, a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty$$

folgt für $n \geqq 1$:

$$c_n \cdot \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{n+1}^\infty = \left[\frac{c_{\nu-1}\, c_\nu\, a_\nu}{b_\nu}\right]_{n+1}^\infty,$$

so dass also gleichzeitig mit $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{n+1}^\infty$ auch $\left[\frac{c_{\nu-1}\, c_\nu\, a_\nu}{b_\nu}\right]_{n+1}^\infty$ convergirt — vice versa.

theoretische Anwendungen, auf die ich bei anderer Gelegenheit einzugehen gedenke. Hier sei nur noch erwähnt, dass die folgende Convergenz-Bedingung:

$$\sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} \left| \frac{a_\nu}{b_{\nu-1}\, b_\nu} \right| < \tfrac{1}{2}, \tag{82}$$

welche Herr Helge von Koch mit Hülfe von unendlichen Kettenbruch-Determinanten zu functionentheoretischen Zwecken abgeleitet hat,[1]) offenbar als ein sehr specieller Fall der Bedingung (80) erscheint.

[1]) Comptes rendus, T. 120 (1895), p. 145.

Ueber die ersten Beweise der Irrationalität von e und π.

Von

Alfred Pringsheim.

Aus den Sitzungsberichten der mathematisch-physikalischen Classe der k. bayer. Akad. d. Wiss. 1898. Bd. XXVIII. Heft II.

München 1898.

Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub.



Ueber die ersten Beweise der Irrationalität von e und π.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 1. August.*)

So viel mir bekannt ist, hat sich ganz allgemein die Ansicht herausgebildet, dass der erste Beweis für die Irrationalität von e und π, e^x und tang x (wo x ein für allemal eine rationale Zahl bedeuten soll) von Lambert herrühre, dass indessen dieser Beweis erst durch Legendre die nöthige Vollständigkeit und Strenge erhalten habe.[1]) Ein genaueres Studium der betreffenden Literatur hat mich indessen zu der Ueberzeugung geführt, dass diese Ansicht in mehrfacher Beziehung einer Modification bedarf, nämlich:

1. Die Irrationalität von e und e^2 ist schon von Euler im Jahre 1737, d. h. 30 Jahre vor Lambert, im wesentlichen bewiesen worden. Zugleich giebt auch Euler schon diejenigen allgemeinen Kettenbruch-Entwickelungen, auf denen der Lambert'sche bezw. Legendre'sche Irrationalitäts-Beweis für e^x, tang x und π beruht.

2. Lambert hat, ohne diese Euler'schen Entwickelungen zu kennen, die Irrationalität von e^x, tang x und π vollständig

---

[1]) Vgl. z. B. Stolz, Vorl. über Allg. Arithmetik, Bd. II (1886), S. 325, Note 16. — Bachmann, Vorl. über die Natur der Irrationalzahlen (1892), S. 53. — Rudio, Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. (1892), S. 55. 56. — F. Klein, Vortr. über ausgew. Fragen der Elem.-Geometrie (1895), S. 46.

und mit einer für die damalige Zeit (1767) geradezu exceptionellen Strenge bewiesen.

3. Das Verdienst Legendre's beschränkt sich auf einen allerdings sehr glücklichen und an sich werthvollen, aber bei Legendre auf durchaus unbewiesener Grundlage ruhenden Gedanken, welcher keineswegs eine Vervollständigung des angeblich unzulänglichen Lambert'schen Beweises, sondern lediglich eine mässige Abkürzung desselben liefert und ausserdem auch gestattet, den Irrationalitäts-Beweis auf π^2 auszudehnen. Im übrigen ist Legendre von der klaren und tiefen Einsicht Lambert's, dass Betrachtungen der fraglichen Art ohne die nöthigen Convergenz-Beweise eigentlich werthlos sind, sehr weit entfernt.

Im folgenden will ich nun versuchen, die vorstehenden Behauptungen näher zu begründen.

Dass sich bereits in Euler's „Introductio" (1753) die Kettenbruch-Entwickelung findet:[1])

$$(1)\qquad \frac{e-1}{2} = \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|6} + \frac{1|}{|10} + \frac{1|}{|14} + \frac{1|}{|18} + \frac{1|}{|22} + \dots$$

d. h. nach der in der vorangehenden Mittheilung von mir benützten Schreibweise:

$$(2)\qquad \frac{e-1}{2} = \left[\frac{1}{1}, \frac{1}{2+4\nu}\right]_1^\infty,$$

ist wohl allgemein bekannt. Als weniger bekannt hebt Herr Rudio in seiner anregenden und lehrreichen Abhandlung über die Geschichte der Kreis-Quadratur mit Recht hervor,[2]) dass Euler schon in seiner grundlegenden Abhandlung über die Lehre von den Kettenbrüchen[3]) noch verschiedene andere mit

---

[1]) A. a. O. p. 319.

[2]) S. die oben citirte Schrift, p. 51.

[3]) De fractionibus continuis dissertatio. Comment. Acad. Petrop. T. IX (ad annum 1737), p. 98—137.

der Zahl e zusammenhängende Kettenbruch-Entwickelungen, z. B. solche für e, $\sqrt{e}$ angegeben hat.[1]) Die grössere Mannigfaltigkeit der an dieser Stelle mitgetheilten Kettenbruch-Entwickelungen scheint mir indessen von secundärer Bedeutung: wesentlich erscheint mir dagegen die Methode, welche hier zur endgültigen Herleitung der fraglichen Entwickelungen dient und von deren Existenz in der Introductio sich lediglich eine kurze und leicht gänzlich zu übersehende Andeutung findet. Dort werden lediglich durch numerische Rechnung aus dem der Reihe $e = 1 + \sum_1^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu!}$ entnommenen Decimalbruche $e = 2,718281828459$ die oben (Gl. (1)) angeschriebenen 6 Anfangsglieder des Kettenbruches bestimmt, im übrigen heisst es: „*cujus fractionis ratio ex calculo infinitesimali dari potest.*" In der citirten Abhandlung findet nun Euler die genannten Kettenbrüche für e, $\sqrt{e}$ (ausserdem noch solche für $\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{e} - 1\right)$, $\frac{1}{2}(e^2 - 1)$, $\left.\frac{e+1}{e-1}\right)$ zunächst gleichfalls durch eine rein numerische Induction, welche vermuthen lässt, dass die betreffenden Theilnehmer arithmetische Reihen bilden. Dann aber fährt er folgendermaassen fort:[2]) „*Cum autem in praecedentibus, ubi numerum* **e** *ejusque potestates in fractiones continuas converti, progressionem arithmeticam denominatorum tantum observaverim, neque praeter probilitatem de hujus progressionis continuatione in infinitum quicquam affirmare valuerim; in id potissimum incubui, ut in hujus progressionis necessitatem inquirerem, eamque firmiter demonstrarem.*" Und nun folgt die Angabe einer wirklich analytischen Methode, welche zur definitiven Herleitung jener Kettenbrüche — sogar in merklich verallgemeinerter Form — sich als brauchbar erweist. Dieselbe beruht auf einer zweifachen Integration der Riccati'schen Differential-Gleichung, einmal mit Hülfe eines unendlichen Kettenbruches, sodann in geschlossener Form mit

---

1) L. c. p. 120. 121.

2) L. c. p. 129.

Hülfe von Exponential-Functionen.[1]) Die erste Art der Integration ist immer möglich, die zweite, wenn die in der Gleichung auftretenden Exponenten gewissen Bedingungen genügen. Im letzteren Falle ergiebt sich dann auf Grund der Eindeutigkeit des betreffenden Integrals eine Kettenbruch-Darstellung des aus der Integration resultirenden Exponential-Ausdruckes. Von den auf diese Weise von Euler abgeleiteten Kettenbrüchen hebe ich hier die folgenden hervor:[2])

$$e^{\frac{1}{s}} = \left[1;\ \frac{2}{2s-1},\ \frac{1}{(2+4\nu)s}\right]_1^{\infty}, \tag{3}$$

$$\frac{e^{\frac{1}{s}}+1}{e^{\frac{1}{s}}-1} = \left[2s;\ \frac{1}{(2+4\nu)s}\right]_1^{\infty}, \tag{4}$$

deren zweiter für $\frac{1}{s} = 2x$ bezw. $\frac{1}{s} = 2xi$ im wesentlichen diejenigen Entwickelungen giebt, welche von Lambert und Legendre zu den fraglichen Irrationalitäts-Beweisen benützt worden sind; während der erste für $s = 1$ bezw. $s = \frac{1}{2}$ unmittelbar die volle Bestätigung der zunächst auf rein inductivem Wege gefundenen regelmässigen Kettenbruch-Entwickelungen für $\frac{e-1}{2}$, $\frac{e^2-1}{2}$ liefert. Da nun den Ausgangspunkt jener Euler'schen Betrachtungen die ausdrück-

[1]) Euler hat diese Methode, die an der betreffenden Stelle ziemlich kurz behandelt ist, später in einer eigenen Abhandlung („Summatio fractionis continuae, cujus indices progressionem arithmeticam constituunt etc.") ausführlich entwickelt: Opusc. analyt. T. II, p. 217—239. Eine hierauf beruhende gedrängtere Darstellung giebt Stern in seiner Theorie der Kettenbrüche: Journ. f. Math. Bd. 11 (1834), S. 60 ff. — Der Vollständigkeit halber sei hier erwähnt, dass auch Lagrange („Sur l'usage des fractions continues dans le calcul intégral", Mém. Acad. de Berlin, 1776) ähnliche Kettenbruch-Entwickelungen, wie die hier in Frage kommenden, gleichfalls durch zwiefache Integration gewisser Differential-Gleichungen abgeleitet hat: Oeuvres, T. IV, p. 319—323.

[2]) L. c. p. 131. 132.

liche Bemerkung bildet, dass jeder rationalen Zahl immer nur ein endlicher regelmässiger[1]) Kettenbruch entspricht, dass also ein unendlicher Kettenbruch dieser Art nur einen irrationalen Werth besitzen könne,[2]) so darf man sagen, dass Euler durch die Aufstellung jener regelmässigen Kettenbruch-Entwickelungen den Beweis für die Irrationalität von e und e^2 nicht etwa nur implicite geleistet habe,[3]) sondern dass er sich dieser Thatsache auch vollkommen bewusst gewesen sei.

Von den beiden Arbeiten, welche Lambert dem vorliegenden Gegenstande gewidmet hat, nämlich:

1. Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques. Lu en 1767. (Abgedruckt 1768 in demjenigen Bande der „Histoire de l'Académie royale des sciences et belles lettres" (Berlin), welcher sonderbarer Weise die Bezeichnung: „Année 1761" trägt, S. 265—322.)
2. Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen. (Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung. Theil II, Abschnitt I, S. 140—169)

giebt die zweite lediglich ein ganz allgemein gehaltenes, orientirendes Referat über die von Lambert gefundenen

---

[1]) D. h. ein solcher von der Form: $\left[b_0;\ \frac{1}{b_\nu}\right]$, wo die b_ν natürliche Zahlen sind.

[2]) L. c. p. 108. — Dass ein solcher unendlicher Kettenbruch überhaupt einen bestimmten Grenzwerth besitze, wird — natürlich nicht mit der heute üblichen Strenge, aber doch in der Hauptsache richtig — aus dem Gange der Näherungsbrüche geschlossen.

[3]) Natürlich mit Ausschluss der nach heutigen Begriffen erforderlichen Convergenz-Betrachtungen: diese letzteren fehlen aber nicht minder bei den für streng ausgegebenen Legendre'schen Beweisen.

Resultate.[1]) Sie enthält überhaupt keine analytischen Entwickelungen, einige wenige Formeln ohne Beweis und zur Erläuterung dienende numerische Beispiele, im übrigen Raisonnements, welche keineswegs dazu dienen sollen, die daran geknüpften Schlüsse streng mathematisch zu beweisen, sondern nur dazu, dem Leser den Gang des Beweises verständlich zu machen. Die ganze Arbeit kann als ein glänzendes Muster populär-anschaulicher Darstellung gelten, von der wirklich wissenschaftlichen Bedeutung und dem specifisch analytischen Scharfsinne ihres Verfassers giebt sie eine äusserst unzureichende Vorstellung. Und nur dadurch, dass man diesem populären Aufsatze Lambert's eine allzugrosse, dem streng wissenschaftlichen „Mémoire" dagegen bei weitem nicht genügende Beachtung geschenkt haben mag, erscheint mir überhaupt jene Auffassung einigermassen erklärlich, wonach die dem Lambert'schen Beweise angeblich fehlende Vollständigkeit und Strenge erst durch Legendre nachgeholt worden sein soll. In Wahrheit verhält sich die Sache genau umgekehrt: Lambert's Untersuchungen sind von so musterhafter Strenge, dass sie dem völlig in der Luft schwebenden Legendre'schen Satze erst eine brauchbare Grundlage verliehen und es dadurch ermöglicht haben, denselben auf die vorliegende Frage anzuwenden. Um dies nachzuweisen, muss ich vor allem etwas näher auf den Inhalt jener Lambert'schen Haupt-Abhandlung eingehen.

Da Lambert nur den Euler'schen Kettenbruch für $\frac{1}{2}(e-1)$ aus der Introductio kennt,[2]) nicht aber die unmittel-

---

[1]) Dieselbe ist zwar, wie Lambert in der Vorrede (zweite Seite) selbst angiebt, schon im Jahre 1766 und unmittelbar vor der definitiven Ausarbeitung des oben erwähnten Mémoire geschrieben worden. Lambert muss aber die jenen Resultaten zu Grunde liegenden und im Mémoire verwertheten analytischen Entwickelungen im wesentlichen damals schon besessen haben: zum mindesten hat er die in dieser Hinsicht etwa noch bestehenden Lücken bei der Abfassung des Mémoire vollständig ausgefüllt.

[2]) In dem citirten populären Aufsatze S. 162 (Abdruck bei Rudio: S. 150) sagt er ausdrücklich: Die Veranlassung aber, diese Formeln (nämlich

bar zuvor besprochenen allgemeineren Entwickelungen, so transformirt er zunächst $\operatorname{tang} v = \frac{\sin v}{\cos v}$ rein formal in einen Kettenbruch, indem er auf die beiden zur Darstellung von $\sin v$, $\cos v$ dienenden Potenzreihen das bekannte Euklidische Divisions-Verfahren zur Aufsuchung des grössten gemeinsamen Theilers anwendet. Schon hierbei zeigt sich ein merklicher Fortschritt, wenn man Lambert's Darstellungsweise mit derjenigen zeitgenössischer Autoren vergleicht: während diese sich in analogen Fällen begnügen, einige wenige Anfangsglieder zu bestimmen und das übrige der Induction überlassen, wobei noch überdies die Wahl einer ganzen Folge verschiedener Buchstaben für die in Betracht kommenden Grössen zumeist gar nicht gestattet, das allgemeine Gesetz mit genügender Deutlichkeit zu übersehen und zu formuliren, so bedient sich Lambert zur Bezeichnung der fraglichen Quotienten und Reste in ganz moderner Weise nur zweier Buchstaben Q, R mit laufenden Indices,[1]) findet Q', R', Q'', R'' durch direkte Rechnung und bestimmt sodann das allgemeine Bildungsgesetz durch den Schluss von n auf $n+1$. Das ist freilich nur eine Aeusserlichkeit: ich glaubte sie aber erwähnen zu müssen, weil sie mir bei einer Arbeit aus dem Jahre 1767 für die analytische Genauigkeit und Schärfe des Verfassers charakteristisch erscheint. In dieser Weise wird also zunächst der Kettenbruch für $\operatorname{tang} v$ mit aller irgend wünschenswerthen Praecision formal hergeleitet.

Nun aber stellt Lambert eine Betrachtung an, die mir — immer mit Rücksicht auf die Jahreszahl 1767 — geradezu erstaunlich dünkt. Während nämlich jeder seiner Zeitgenossen sich mit dieser formalen Ableitung sicherlich begnügt

---

die Kettenbrüche für $\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $\operatorname{tang} x$) zu suchen, gab mir Herrn Euler's Analysis infinitorum, wo der Ausdruck

$$\frac{e-1}{2} = \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|6} + \frac{1|}{|10} + \frac{1|}{|14} + \frac{1|}{|18} + \cdots$$

in Zahlen berechnet, in Form eines Beispieles vorkommt."

[1]) Dieser Kunstgriff rührt von Leibniz her. Vgl. Gerhardt, Gesch. d. Math. p. 183.

hätte, ja während auch noch spätere und sogar weit grössere Mathematiker sich thatsächlich mit dergleichen begnügt haben, so stellt Lambert mit minutiöser Genauigkeit das Gesetz für die Bildung der Näherungsbrüche $\frac{A_n}{B_n}$ fest und beweist ganz direkt, dass nun auch wirklich: $\lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n} = \operatorname{tang} v$ wird. Jedem, der in derartigen Dingen einigermaassen versirt ist, wird dieser Schritt heutzutage ebenso nothwendig, wie natürlich erscheinen. Denn man weiss jetzt zur genüge, dass eine durch solche formale Operationen gewonnene „unendliche", d. h. allemal auf der Vernachlässigung irgend eines Restgliedes beruhende Entwickelung überhaupt gar nicht zu convergiren und, selbst wenn sie convergirt, noch keineswegs mit der erzeugenden Function überein zu stimmen braucht. Dass nun aber schon Lambert einen ausdrücklichen Convergenz- und Gültigkeits-Beweis für seine Kettenbruch-Entwickelung durchgeführt hat, muss um so bemerkenswerther erscheinen, wenn man bedenkt, dass Gauss in seiner Abhandlung über die hypergeometrische Reihe (1812) bezüglich der dort gegebenen Kettenbruch-Entwickelungen noch vollständig auf dem alten formalistischen Standpunkte steht: die Convergenz- und Gültigkeitsfrage wird mit keinem einzigen Worte berührt,[1]) dieselbe ist in der That erst in sehr viel späterer Zeit, insbesondere durch die mühsamen und eingehenden Untersuchungen von Heine[2]) und W. Thomé[3]) erledigt worden.[4])

Die Lambert'sche Arbeit giebt also das **erste** und auf längere Zeit hinaus auch **einzige** Beispiel einer nach heutigen Begriffen wirklich **strengen** Entwicke-

---

[1]) Werke, Bd. III, p. 134.

[2]) Journ. f. Math. Bd. 34 (1847), p. 301; Bd. 57 (1860), p. 231.

[3]) Ibid. Bd. 66 (1866), p. 322. — Bd. 67 (1867), p. 299.

[4]) Die Skizze eines anderen, auf complexer Integration beruhenden Beweises hat sich bekanntlich in Riemann's Nachlass vorgefunden: Werke, p. 400.

lung gewisser Functionen in convergirende Kettenbrüche, insbesondere:

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{tang} v = \left[\frac{1}{1:v}, \; -\frac{1}{(2\nu+1):v}\right]_1^\infty$$

$\left(\text{und entsprechend für } \dfrac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}\right)$.

Der an Gl. (3) anknüpfende Irrationalitäts-Beweis für den Fall eines rationalen v nimmt sodann ungefähr folgenden Gang. Bezeichnet man mit φ, ω irgend zwei natürliche, relativ prime Zahlen und setzt:

$$\text{(4)} \qquad \sin\frac{\varphi}{\omega} = M, \qquad \cos\frac{\varphi}{\omega} = P,$$

so wird:

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{tang}\frac{\varphi}{\omega} = \frac{M}{P} = \left[\frac{\varphi}{\omega}, \; -\frac{\varphi^2}{(2\nu+1)\omega}\right]_1^\infty.$$

Alsdann lässt sich, wie unmittelbar zu sehen, dieser Kettenbruch durch das folgende unbegrenzte System von recurrenten linearen Gleichungen ersetzen:

$$\begin{aligned}
\varphi P &= \omega M - R' \\
\varphi^2 M &= 3\omega R' - R'' \\
\varphi^2 R' &= 5\omega R'' - R''' \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi^2 R^{(n-2)} &= (2n-1) R^{(n-1)} - R^{(n)}
\end{aligned}$$

oder, anders geschrieben:

$$\text{(6)} \qquad \left\{\begin{aligned}
&1) \quad R' = \omega M - \varphi P \\
&2) \quad R'' = 3\omega R' - \varphi^2 M \\
&3) \quad R''' = 5\omega R'' - \varphi^2 R' \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&n) \quad R^{(n)} = (2n-1)\omega R^{(n-1)} - \varphi^2 R^{(n-2)}.
\end{aligned}\right.$$

Die $R^{(n)}$ genügen also — abgesehen von den beiden Anfangsgleichungen (6_1), (6_2) genau derselben Recursionsformel (6_n),

wie die Zähler und Nenner der zum Kettenbruche (5) gehörigen Näherungsbrüche. Werden diese also etwa wieder mit A_n, B_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) bezeichnet, so ergiebt sich mit Berücksichtigung jener Anfangsgleichungen (6_1), (6_2) die Beziehung:

$$(7) \qquad R^{(n)} = MB_n - PA_n = PB_n\left(\frac{M}{P} - \frac{A_n}{B_n}\right).$$

Hieraus folgt, dass die $R^{(n)}$ durchweg von Null verschieden sind und mit unbegrenzt wachsendem n beliebig klein werden; die bei Gelegenheit des vorausgehenden Convergenz-Beweises durchgeführte Untersuchung der Näherungsbrüche zeigt nämlich, dass nicht nur $\frac{M}{P} - \frac{A_n}{B_n}$, sondern auch $B_n\left(\frac{M}{P} - \frac{A_n}{B_n}\right)$ mit $\lim n = \infty$ gegen Null convergirt.

Angenommen nun, es wäre $\frac{M}{P}$ rational, also etwa:

$$(8) \qquad \frac{M}{P} = \frac{m}{p},$$

wo m, p natürliche, relativ prime Zahlen. Alsdann kann man setzen:

$$(9) \qquad \frac{M}{m} = \frac{P}{p} = D, \quad \text{also: } M = m \cdot D, \quad P = p \cdot D,$$

wo D eine ganz bestimmte Irrationalzahl bedeutet (da von den Zahlen $M = \sin\frac{\varphi}{\omega}$, $P = \cos\frac{\varphi}{\omega} = \sqrt{1 - M^2}$ unter allen Umständen mindestens eine irrational sein muss. Multiplicirt man nun die Gleichungen (6) mit $\frac{1}{D}$, so gehen sie in die folgenden über:

$$(10)\quad \begin{cases} \frac{R'}{D} = \omega m - \varphi p \\ \frac{R''}{D} = 3\omega \frac{R'}{D} - \varphi^2 m \\ \frac{R'''}{D} = 5\omega \frac{R''}{D} - \varphi^2 \cdot \frac{R'}{D} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{R^{(n)}}{D} = (2n-1)\omega \frac{R^{(n-1)}}{D} - \varphi^2 \frac{R^{(n-2)}}{D} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

welche zeigen, dass $\frac{R'}{D}$, also auch $\frac{R''}{D}, \ldots \frac{R^{(n)}}{D} \ldots$ durchweg ganze Zahlen sein müssten. Man hätte also ein unbegrenztes System von Null verschiedener und schliesslich beliebig klein werdender ganzer Zahlen, was unmöglich ist. Somit muss $\operatorname{tang}\frac{\varphi}{\omega}$ irrational sein.

Dies also ist den Hauptzügen der angeblich so unzulängliche Lambert'sche Beweis: mir erscheint er ausserordentlich scharfsinnig und im wesentlichen vollkommen einwandfrei.

Ich komme nun schliesslich auf den Antheil Legendre's an dem fraglichen Irrationalitäts-Beweise su sprechen. Legendre leitet in der bekannten Note IV seiner Élements de géométrie zunächst die erforderlichen Kettenbruch-Entwickelungen von neuem ab.[1]) Sein recursorisches Verfahren ist merklich, einfacher und eleganter als die etwas schwerfällige Divisions-Methode Lambert's. Aber, da jeglicher Convergenz- und Gültigkeitsbeweis fehlt, so bleibt Legendre in Bezug auf Strenge hinter Lambert weit zurück. — Nun folgt jener Hülfssatz, welcher den eigentlichen Kern des Legendre'schen Irrationalitäts-Beweises bildet, nämlich:

[1]) Rudio, p. 159 ff.

Bedeuten m, n, m', n' etc. ganze positive oder negative Zahlen von der Art, dass $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}$, etc. ächte Brüche sind, so hat der Kettenbruch: $\frac{m|}{|n} + \frac{m'|}{|n'} + \frac{m''|}{|n''} + \ldots$ einen irrationalen Werth.

Hier muss gesagt werden, dass das von Legendre angewendete Beweis-Princip, welches auf der völlig unbewiesenen Supposition beruht, dass der Kettenbruch selbst und jeder durch Weglassung von Anfangsgliedern daraus hervorgehende ohne weiteres einer bestimmten Zahl gleich gesetzt werden dürfe, direkt unrichtig ist. Thatsächlich lässt sich nach dieser Methode alles mögliche, richtiges und falsches beweisen. Man könnte z. B. mit genau demselben Maasse von Strenge, welches dem fraglichen Legendre'schen Beweise innewohnt, zeigen, dass unter den periodischen Kettenbrüchen mit lauter reellen Gliedern unendlich viele mit complexen Grenzwerthen vorkommen. Mit anderen Worten: der Legendre'sche Beweis hat überhaupt erst einen Sinn, wenn die Convergenz und sogar (nach der in der vorangehenden Mittheilung benützten Terminologie) die unbedingte Convergenz jener Kettenbrüche wirklich feststeht. Die entsprechenden Convergenz-Beweise und zwar zunächst nur für die besonderen Fälle, dass alle $\frac{m^{(\nu)}}{n^{(\nu)}}$ positiv oder alle $\frac{m^{(\nu)}}{n^{(\nu)}}$ negativ, sind aber erst um die Mitte unseres Jahrhunderts geliefert worden,[1]) und consequenter Weise findet man auch in den Lehrbüchern der Analysis die Gültigkeit des obigen Satzes auf diese besonderen Fälle eingeschränkt.[2]) Dass dieser letztere sogar in dem von Legendre ausgesprochenen weiteren Umfange d. h. bei ganz beliebigen Vorzeichen der $m^{(\nu)}$, $n^{(\nu)}$

---

[1]) Vgl. die vorige Mittheilung, p. 311.

[2]) Stern, Algebr. Anal. p. 482. 484. Schlömilch, Algebr. Anal. p. 303. Stolz, Allgem. Arithm. Bd. II, p. 297.

gilt, habe ich in dem eben citirten Aufsatze gezeigt. Aber alles dies ist doch bis zu einem gewissen Grade ein reiner Glücksfall: auf Grund des Legendre'schen Beweises allein brauchte der Satz für keinen einzigen Fall richtig zu sein. Er gewinnt überhaupt erst in dem Augenblicke eine reale Existenz, wo die nöthigen Convergenz-Beweise erbracht sind. Und wenn er speziell auf den Kettenbruch für tang x anwendbar erscheint, so ist das doch schliesslich nur deshalb der Fall, weil Lambert dessen Convergenz wirklich bewiesen hat.[1]) Dabei kann dann aber immer nur von einer (nicht einmal allzu erheblichen) Abkürzung, dagegen in keiner Beziehung von einer wirklichen Ergänzung des Lambert'schen Beweises die Rede sein. Da mir dieser letztere weit öfter abfällig beurtheilt,[2]) als gründlich studirt worden zu sein scheint, so hielt ich es im Interesse der historischen Gerechtigkeit für geboten, seine Vorzüge, sowie die Mängel der nach meiner Ansicht über Gebühr gepriesenen Legendre'schen Beweisführung in ein etwas helleres Licht zu setzen.

---

[1]) Vgl. p. 332. — Dass diese Convergenz eine unbedingte ist, kann dann leicht erschlossen werden.

[2]) Vgl. z. B. Bachmann, a. a. O.



Zur Theorie des Doppel-Integrals, des Green'schen und Cauchy'schen Integralsatzes.

Von

Alfred Pringsheim.

Aus den Sitzungsberichten der mathematisch-physikalischen Classe der k. bayer. Akad. d. Wiss. 1899. Bd. XXIX. Heft I.

München 1899.

Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub.



Zur Theorie des Doppel-Integrals, des Green'schen und Cauchy'schen Integralsatzes.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 4. Februar.*)

Die folgende Mittheilung knüpft an eine frühere an, die ich unter dem Titel: „Zur Theorie des Doppel-Integrals" im vorigen Bande dieser Berichte veröffentlicht habe. Im Anschlusse an die daselbst abgeleitete Hauptformel:

$$\int\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy \begin{cases} = \int_{y_0}^{Y} dy \overline{\int_{\underline{x_0}}^{\overline{X}}} f(x, y) \cdot dx \\ = \int_{x_0}^{X} dx \overline{\int_{\underline{y_0}}^{\overline{Y}}} f(x, y) \cdot dy \end{cases}$$

wird zunächst untersucht, in wieweit die Existenz jenes Doppel-Integrals diejenige der beiden einfachen Integrale $\int_{x_0}^{X} f(x, y) \cdot dx$, $\int_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy$ nach sich zieht, bezw. deren Nicht-Existenz offen lässt, und sodann durch Beispiele festgestellt, dass der Fall der Nicht-Existenz in dem als möglich erkannten Umfange auch wirklich vorkommt (§ 1). Dagegen wird in § 2 durch Construction einer eigenthümlichen Gattung von Punktmengen gezeigt, dass selbst die durchgängige Existenz jener einfachen und der aus ihnen gebildeten iterirten Integrale, sowie die Gleichheit dieser letzteren noch keines-

---

[1]) Sitz.-Ber. Bd. 28 (1898), p. 59—74.

wegs die Existenz des Doppel-Integrals verbürgt. Das Resultat des § 1 wird hierauf benützt, um den Green'schen Satz über die Reduction eines Flächen-Integrals auf ein Linien-Integral unter etwas allgemeineren Voraussetzungen zu beweisen, als bisher wohl geschehen ist (§ 3). Die hierbei auftretende Eventualität von Integralen nicht-integrabler Differential-Quotienten führt zu einer Umgestaltung der fundamentalen Beziehung:

$$\int_{x_0}^{X} f'(x) \cdot dx = f(X) - f(x_0)$$

für den Fall eines nicht-integrablen $f'(x)$, woraus dann noch ein zweiter, etwas kürzerer Beweis des Green'schen Satzes in dem fraglichen Umfange resultirt (§ 4). Die vorstehenden Ergebnisse werden dann schliesslich zu entsprechender Verallgemeinerung des Cauchy'schen Integralsatzes benützt (§ 5).

---

§ 1.

Bedeutet $f(x, y)$ eine im Rechtecke $[x_0 \leqq x \leqq X,\ y_0 \leqq y \leqq Y]$ endlich bleibende[1]) Function, so bestehen die Beziehungen:

$$(1) \qquad \int\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy \begin{cases} = \int_{y_0}^{Y} dy \overline{\int_{x_0}^{X}} f(x, y) \cdot dx \\ = \int_{y_0}^{Y} dy \cdot \underline{\int_{x_0}^{X}} f(x, y) \cdot dx \end{cases}$$

allemal, wenn das betreffende Doppel-Integral existirt.[2]) Ist dies also der Fall, so hat man:

$$(2) \qquad \int_{y_0}^{Y} dy \left\{ \overline{\int_{x_0}^{X}} f(x, y) \cdot dx - \underline{\int_{x_0}^{X}} f(x, y) \cdot dx \right\} = 0.$$

---

[1]) D. h. $|f(x, y)| < G$ für $x_0 \leqq x \leqq X,\ y_0 \leqq y \leqq Y$.

[2]) A. a. O. p. 69, Gl. (20).

Da nun, vermöge der Bedeutung des „oberen“ und „unteren“ Integrals[1]) die in der Klammer stehende Differenz, welche man zweckmässig als die Integral-Schwankung von $\int_{x_0}^{X} f(x, y)\, dx$ bezeichnen kann, niemals negativ ausfällt, so folgt aus einer einfachen Umformung der Riemann'schen Integrabilitäts-Bedingung,[2]) dass Gl. (2) dann und nur dann besteht, wenn für eine im Intervalle (y_0, Y) überall dichte Menge von Werthen y':

$$(3) \qquad \overline{\int_{x_0}^{X}} f(x, y') \cdot dx - \underline{\int_{x_0}^{X}} f(x, y')\, dx = 0,$$

so dass also $\int_{x_0}^{X} f(x, y') \cdot dx$ existirt, und wenn ausserdem die Stellen y, für welche:

$$(4) \qquad \overline{\int_{x_0}^{X}} f(x, y) \cdot dx - \underline{\int_{x_0}^{X}} f(x, y) \cdot dx > \varepsilon,$$

bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ eine unausgedehnte Menge bilden.[3]) (NB. Dabei können immerhin die Stellen y, für welche jene Differenz von Null verschieden ist, auch eine ausgedehnte z. B. überall dichte Menge bilden).

Da im übrigen unter der gemachten Voraussetzung auch die zu (1) analogen Gleichungen bestehen:

$$(5) \qquad \int\!\!\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy \left\{ \begin{aligned} &= \int_{x_0}^{X} dx \overline{\int_{y_0}^{Y}} f(x, y) \cdot dy \\ &= \int_{x_0}^{X} dx \underline{\int_{y_0}^{Y}} f(x, y) \cdot dy, \end{aligned} \right.$$

so gewinnt man den Satz:

---

1) A. a. O. p. 64.

2) S. z. B. Dini-Lüroth, p. 359, Nr. 14.

3) Dini-Lüroth, p. 355, Nr. 9.

Existirt für die Function $f(x, y)$ ein über das Rechteck $[x_0 \leqq x \leqq X,\ y_0 \leqq y \leqq Y]$ erstrecktes eigentliches Doppel-Integral, so existiren die einfachen Integrale:

$$\int_{x_0}^{X} f(x, y) \cdot dx, \qquad \int_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy$$

für je eine im Intervalle (y_0, Y) bezw. (x_0, X) *überall dichte* Menge. Die Stellen y bezw. x, wo jene Integrale *nicht* existiren, können zwar ebenfalls *überall dicht* liegen: jedoch bilden diejenigen Stellen, für welche die Integral-Schwankung eine beliebig kleine positive Zahl ε übersteigt, allemal eine *unausgedehnte* Menge.[1])

Beispiele: I.[2]) Jede Zahl x lässt sich durch einen systematischen Bruch mit beliebig gewählter ganzzahliger Basis $b \geqq 2$ darstellen und zwar auf eine einzige Weise, wenn man Brüche mit der Periode $(b-1)$ ausschliesst. Bezeichnet man die Anzahl der hierbei auftretenden Bruchstellen mit p_x (wo

---

[1]) Unrichtig ist es also, mit Harnack (Elem. der Diff.- und Integr.-Rechnung, p. 313) anzunehmen, dass die Nicht-Existenz jener einfachen Integrale allemal auf eine unausgedehnte Menge y bezw. x beschränkt sein müsse, worauf schon Herr Stolz im Anschlusse an Du Bois Reymond (Journ. f. Math. 94 (1883), p. 278) aufmerksam gemacht hat (Math. Ann., Bd. 26 (1886), p. 93, Fussn.). Auf der andern Seite ist es aber für den Gültigkeits-Beweis der Formel (1) bezw. (5) auch nicht nothwendig, diese Beschränkung mit Herrn Stolz ausdrücklich unter die Voraussetzungen aufzunehmen, wie ich in der oben citirten Mittheilung des näheren erörtert habe.

[2]) Dieses Beispiel ist lediglich eine etwas allgemeinere und genauere Fassung des a. a. O. p. 71 von mir gegebenen, welches letztere ein Versehen enthält. Es müsste auf p. 72, Gl. (6) heissen:

$$f(x, y) = \frac{1}{1+p_x} + \frac{1}{1+q_y},$$

wenn beide Veränderliche x, y durch endliche Decimalbrüche darstellbar sind, in jedem anderen Falle:

$$f(x, y) = 0.$$

also: $p_x \geqq 0$), so mag x eine systematische Zahl heissen, wenn p_x endlich ist, und (x, y) als systematischer Punkt bezeichnet werden, wenn beide Coordinaten x, y systematische Zahlen sind. Für ein systematisches x hat alsdann $\frac{1}{1+p_x}$ einen bestimmten positiven Werth $\leqq 1$, für ein nicht-systematisches wird man diesem Symbole und dem allgemeineren: $\frac{\nu}{\nu + p_x}$ naturgemäss den Werth Null beizulegen haben. Definirt man sodann q_x durch die Gleichung:

$$q_x = \lim_{\nu=\infty} \frac{\nu}{\nu + p_x}, \tag{6}$$

so hat man offenbar:

$$\begin{cases} q_x = 1, & \text{wenn } x \text{ systematisch,} \\ q_x = 0, & \text{wenn } x \text{ nicht-systematisch.} \end{cases} \tag{7}$$

Nun werde gesetzt:

$$f(x, y) = \frac{q_y}{1 + p_x} + \frac{q_x}{1 + p_y}, \tag{8}$$

so hat man:

$$\begin{cases} f(x, y) = \dfrac{1}{1+p_x} + \dfrac{1}{1+p_y}, & \text{wenn } (x, y) \text{ systematisch,} \\ f(x, y) = 0, & \text{wenn } (x, y) \text{ nicht-systematisch.} \end{cases} \tag{9}$$

Da es in jedem endlichen Intervalle (x_0, X) bezw. (y_0, Y) nur eine endliche Anzahl von Werthen x bezw. y giebt, für welche $1 + p_x < \frac{1}{\varepsilon}$ bezw. $1 + p_y < \frac{1}{\varepsilon}$, also auch in dem entsprechenden Rechtecke nur eine endliche Anzahl von Punkten, für welche $f(x, y) > 2\varepsilon$, so erkennt man unmittelbar die Richtigkeit der Beziehungen:

$$\int_{x_0}^{X} \frac{1}{1+p_x} \cdot dx = 0, \quad \int_{y_0}^{Y} \frac{1}{1+p_y} \cdot dy = 0, \quad \iint_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy = 0. \tag{10}$$

Daraus folgt weiter:

$$(11)\quad \begin{cases} \overline{\int_{x_0}^{X}} f(x,y)\cdot dx = \dfrac{1}{1+p_y}(X-x_0), & \underline{\int_{x_0}^{X}} f(x,y)\cdot dx = 0, \\ \overline{\int_{y_0}^{Y}} f(x,y)\cdot dy = \dfrac{1}{1+p_x}(Y-y_0), & \underline{\int_{y_0}^{Y}} f(x,y)\cdot dy = 0. \end{cases}$$

Somit existiren die Integrale $\int_{x_0}^{X} f(x,y)\cdot dx$ bezw. $\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\cdot dy$ nur für alle nicht-systematischen Werthe y bezw. x, während für die ebenfalls überall dicht liegenden systematischen die betreffende Integral-Schwankung den Werth $\frac{1}{1+p_y}(X-x_0)$ bezw. $\frac{1}{1+p_x}(Y-y_0)$ besitzt, der jedoch stets nur für eine endliche (also sicherlich unausgedehnte) Menge y bezw. x ein beliebig kleines $\varepsilon > 0$ übersteigt. Daraus folgt dann schliesslich, dass auch:

$$(12)\qquad \int_{y_0}^{Y} dy \overline{\underline{\int_{x_0}^{X}}} f(x,y)\cdot dx = \int_{x_0}^{X} dx \overline{\underline{\int_{y_0}^{Y}}} f(x,y)\cdot dy = 0$$

wird, übereinstimmend mit dem Werthe des Doppel-Integrals (10).

II. Bei dem vorigen Beispiele bildeten die Punkte (x, y), für welche $f(x, y)$ einen von Null verschiedenen Werth besitzt, eine in dem betreffenden Rechtecke überall dichte, aber abzählbare Menge (nämlich die Menge der systematischen Punkte). Um eine Function zu erhalten, bei welcher die entsprechende Rolle einer nicht-abzählbaren Menge zufällt, setze man:

$$(13)\qquad \varphi(x,y) = (q_x - q_y)^2 \cdot \left(\frac{1}{1+p_x} + \frac{1}{1+p_y}\right).$$

Theilt man die nicht-systematischen Punkte (x, y) in unsystematische und halbsystematische, je nachdem jede

der beiden Coordinaten oder nur eine derselben eine nicht-systematische Zahl ist, so hat man:

$$(14a) \qquad \varphi(x, y) = 0, \quad \text{wenn } (x, y) \text{ systematisch oder unsystematisch,}$$

dagegen:

$$(14b) \qquad \varphi(x, y) \begin{cases} = \dfrac{1}{1+p_x}, & \text{wenn } x \text{ systematisch, } y \text{ unsystematisch,} \\ = \dfrac{1}{1+p_y}, & \text{wenn } y \text{ systematisch, } x \text{ unsystematisch,} \end{cases}$$

so dass also (x, y) für die nicht-abzählbare Menge der halbsystematischen Punkte von Null verschieden ausfällt. Dennoch ist die Menge der Punkte, für welche $\varphi(x, y) > \varepsilon$ wird, eine zweidimensional-unausgedehnte, da dieselben nur auf einer endlichen Menge von Linien: $y = p_x$ bezw. $x = p_y$ (wenn auch daselbst überall dicht) vorkommen. In Folge dessen existirt wiederum das betreffende Doppel-Integral (mit dem Werthe 0), und es gelten im übrigen die Gleichungen (11), (12) genau wie im Falle I.

III. Zu analogen Functions-Bildungen kann man auch gelangen, wenn man statt der Eintheilung der Zahlen in systematische und nicht-systematische diejenige in rationale und irrationale zu Grunde legt. Ist x rational und setzt man $x = \frac{m_x}{n_x}$, so ist n_x eindeutig bestimmt, wenn man m_x, n_x als relativ prime ganze Zahlen und $n_x > 0$ annimmt. Im Falle eines irrationalen x mag dann wiederum dem Symbole $\frac{1}{n_x}$ bezw. $\frac{\nu}{\nu + n_x}$ der Werth Null beigelegt werden, so dass also:

$$(15) \qquad r_x = \lim_{\nu=\infty} \frac{\nu}{\nu + n_x} \begin{cases} = 1, & \text{wenn } x \text{ rational,} \\ = 0, & \text{wenn } x \text{ irrational.} \end{cases}$$

Setzt man sodann:

$$(16) \qquad \begin{cases} f(x, y) = \dfrac{r_y}{1 + n_x} + \dfrac{r_x}{1 + n_y} \\ \varphi(x, y) = (r_x - r_y)^2 \cdot \left\{ \dfrac{1}{1 + n_x} + \dfrac{1}{1 + n_y} \right\}, \end{cases}$$

so haben $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ ganz analoge Integral-Eigenschaften, wie die entsprechenden Functionen in I und II.

§ 2.

Der Satz des vorigen Paragraphen in Verbindung mit Gl. (1) und (5) lehrt, dass die Existenz der Integrale $\int_{x_0}^{X} f(x, y) \cdot dx$, $\int_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy$ für je eine im Intervalle (y_0, Y) bezw. (x_0, X) überall dichte Werthmenge, sowie die Beziehung:

$$(17) \qquad \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x, y) \cdot dx = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy$$

nothwendige Bedingungen für die Existenz des Doppel-Integrals $\int\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy$ bilden. Ob dieselben auch hinreichend seien, entzieht sich zunächst der Beurtheilung. Soviel steht freilich fest, dass aus der Existenz und Gleichheit zweier Grenzwerthe von der Form $\lim_{\varepsilon=0} \lim_{\delta=0} \varphi(\delta, \varepsilon)$ und $\lim_{\delta=0} \lim_{\varepsilon=0} \varphi(\delta, \varepsilon)$ im allgemeinen nicht ohne weiteres auf die Existenz von $\lim_{\delta=0,\, \varepsilon=0} \varphi(\delta, \varepsilon)$ geschlossen werden darf.[1] Andererseits wird man bei der besonderen Art der hier vorliegenden Grenzwerthe die Richtigkeit der fraglichen Schlussfolgerung für äusserst wahrscheinlich halten müssen, zumal, wenn

[1]) Vgl. Sitz.-Ber. 27 (1897), p. 107.

man beachtet, dass ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f(x, y)$ durchweg als positiv vorausgesetzt werden kann.[1]) Nichtsdestoweniger erweist sich jene naheliegende Vermuthung als unzutreffend, selbst wenn die betreffenden Voraussetzungen noch merklich eingeschränkt werden. Es lässt sich nämlich folgendes zeigen:

Ist $f(x, y)$ eine im Rechtecke $[a \leqq x \leqq A,\ b \leqq y \leqq B]$ unter einer festen Grenze bleibende positive Function und bezeichnet man mit x_0, X, y_0, Y beliebige den Bedingungen: $a \leqq x_0 < X \leqq A,\ b \leqq y_0 < Y \leqq B$, genügende Zahlen, so braucht *kein* Doppel-Integral von der Form:

$$(18) \qquad \iint\limits_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy$$

zu existiren, auch wenn die einfachen Integrale:

$$(19) \qquad \int_a^A f(x, y) \cdot dx, \qquad \int_b^B f(x, y) \cdot dy$$

für *jedes* y des Intervalles (b, B) bezw. für *jedes* x des Intervalles (a, A) existiren und ausserdem stets die Beziehung besteht:

$$(20) \qquad \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x, y) \cdot dx = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy,$$

---

[1]) Da nämlich ein für allemal $|f(x, y)| < G$ angenommen wird, so hat man: $f(x, y) + G > 0$. Aus der Existenz von:

$$\iint\limits_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} (f(x, y) + G)\, dx \cdot dy$$

würde aber sofort auch diejenige von:

$$\iint\limits_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy$$

sich ergeben.

(welche natürlich auch die Existenz[1]) der betreffenden iterirten Integrale involvirt).

Da die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz des Doppel-Integrales darin besteht, dass die Stellen (x, y), an welchen $f(x, y)$ Sprünge $> \varepsilon$ erleidet, eine zweidimensional-unausgedehnte Menge bilden,[2]) so wird es für den Nachweis der obigen Behauptung im wesentlichen nur darauf ankommen, die Existenz von Punktmengen festzustellen, die zwar in einem zweidimensionalen Gebiete, dagegen auf keiner horizontalen oder vertikalen Linie ausgedehnt sind. Ob derartige Mengen bisher schon bemerkt worden sind, ist mir nicht bekannt. Ich will daher zunächst zeigen, wie man Mengen definiren kann, welche die

---

[1]) Man bemerke, dass die Existenz von:

$$\int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy$$

für $a \leqq x_0 < X < A$, $b \leqq y_0 < Y \leqq B$, auch bei durchweg positivem $f(x, y)$ merklich mehr besagt, als diejenige von:

$$\int_{a}^{A} dx \int_{b}^{B} f(x, y) \cdot dy.$$

Setzt man z. B.

$$f(x, y) = 1 \text{ für rationale } x,$$
$$f(x, y) = 2y \text{ für irrationale } x,$$

so wird:

$$\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{1} f(x, y) \cdot dy = 1,$$

während

$$\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{Y} f(x, y)\, dy$$

für $Y < 1$ nicht existirt. (Uebrigens existirt in diesem Falle auch nicht:

$$\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{1} f(x, y) \cdot dx.$$

Vgl. Thomae, Zeitschr. f. Math. 23 (1878), p. 67).

[2]) Stolz, a. a. O. p. 90.

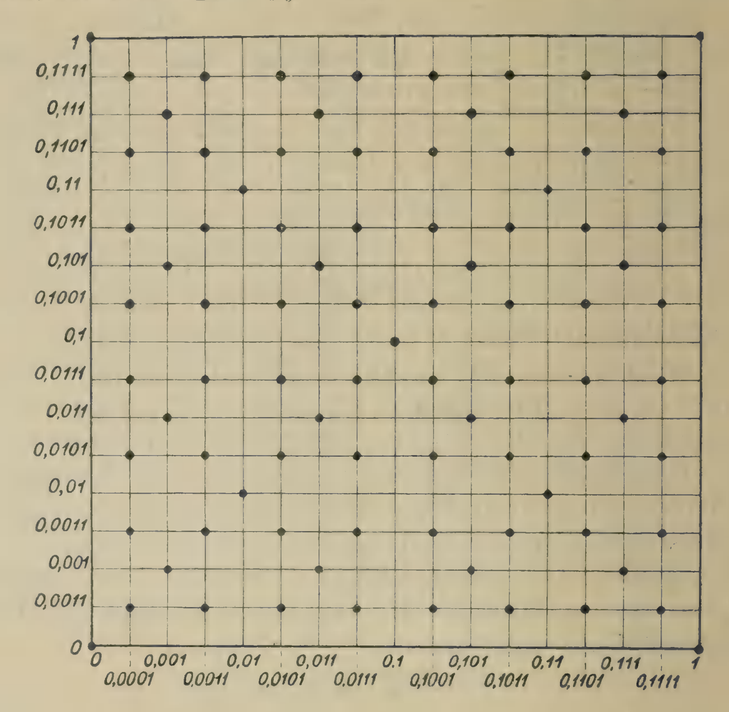
fragliche Eigenschaft gewissermaassen in höchster Vollkommenheit besitzen: dieselben liegen nämlich in jedem zweidimensionalen Gebiete überall dicht, während sie auf jeder Horizontalen oder Vertikalen nur in endlicher Anzahl vorkommen.

Man denke sich wieder wie in § 1 die Zahlen x, y als systematische Brüche mit beliebiger Basis b dargestellt. Ist dann x' irgend eine systematische (d. h. durch einen endlichen Bruch darstellbare) Zahl, $p_{x'}$ die zugehörige Bruchstellen-Anzahl, so sollen dem Werthe x' alle diejenigen y' zugeordnet werden, für welche $p_{y'} = p_{x'}$ — vice versa. Werden zugleich die x bezw. y auf ein ganz beliebiges endliches Intervall (a, A) bezw. (b, B) eingeschränkt, so gehört zu jedem x' nur eine endliche Anzahl von y' (nämlich innerhalb jedes ganzzahligen Intervalles z. B. $(0, 1)$ genau $b p_{x'} - 1\,(b-1)$) — und umgekehrt. Es liegt also auf jeder Vertikalen $\xi = x'$, sowie auf jeder Horizontalen $\eta = y'$ stets nur eine endliche Anzahl von Punkten (x', y'), während auf den Vertikalen $\xi = x$ und den Horizontalen $\eta = y$, wenn x, y nicht-systematisch, überhaupt keine Punkte (x', y') liegen. Nichtsdestoweniger liegen die Punkte (x', y') in jedem zweidimensionalen Gebiete überall dicht. Betrachtet man nämlich irgend eine um 45^0 gegen die Axen geneigte, durch den Anfangspunkt gehende Linie:

$$\eta = \xi + a,$$

wo a eine positive oder negative systematische Zahl bezw. 0 bedeutet, so wird $p_\eta = p_\xi$, sobald $p_\xi > p_a$ (übrigens auch schon für $p_\xi = p_a$, mit Ausschluss derjenigen ξ, deren letzte Bruchstelle diejenige von a zu 0 oder b ergänzt). Darnach gehören alle Punkte jener Geraden, deren Abscissen systematische Zahlen mit einem $p_\xi > p_a$ sind, zur Menge der (x', y'), und die letzteren liegen also auf jeder solchen Geraden überall dicht. Da aber bei veränderlichem a auch diese Geraden überall dicht liegen, so folgt in der That, dass die Punkte (x', y') in jedem zweidimensionalen Gebiete überall dicht liegen.

Die beistehende Figur, welche sich auf den Fall $0 < x < 1$, $0 \leq y \leq 1$ und $b = 2$ bezieht, mag die Anordnung der Punkte (x', y') bis zu $p_{x'} = p_{y'} = 4$ veranschaulichen. (NB. Die Mittelpunkte der kleinen Quadrate würden diejenigen (x', y') repräsentiren, für welche $p_{x'} = p_{y'} = 5$.)



Punktmengen von ähnlicher Art kann man wiederum auch erhalten, wenn man von der Eintheilung der Zahlen x, y in rationale und irrationale ausgeht. Man ordne jedem rationalen $x' = \frac{m_{x'}}{n_{x'}}$ alle diejenigen $y' = \frac{m_{y'}}{n_{y'}}$ zu, für welche $n_{y'} = n_{x'}$ — vice versa. Zu jedem x' gehört dann wiederum für jedes endliche y-Intervall nur eine endliche Anzahl von Werthen y' (nämlich im y-Intervalle $(0,1)$ die $\varphi(n_{x'})$ Werthe: $\frac{m}{n_{x'}}$, für welche $m < n_{x'}$ und relativ prim zu $n_{x'}$) — und umgekehrt.

Die Punkte (x', y') kommen also wiederum auf jeder begrenzten Vertikalen oder Horizontalen nur in endlicher Anzahl (bezw. gar nicht) vor, während sie in jedem zweidimensionalen Gebiete wieder überall dicht liegen: letzteres kann in analoger Weise erkannt werden, wie in dem zuvor betrachteten Falle und folgt übrigens auch unmittelbar daraus, dass die dort für $b = 2$ resultirende Punktmenge lediglich eine Theilmenge der hier definirten bildet. —

Bedeutet jetzt (x', y') irgend eine Punktmenge der eben charakterisirten Art und setzt man:

$$(21)\qquad \begin{cases} \qquad\qquad f(x', y') = c', \\ \text{im übrigen: } f(x, y) = c, \end{cases}$$

wo c, c' zwei beliebige von einander verschiedene Constanten bedeuten, so erscheint offenbar die Existenz jedes Doppel-Integrals von der Form:

$$\iint_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy$$

definitiv ausgeschlossen. Nichtsdestoweniger hat man:

$$(22)\qquad \int_{x_0}^{X} f(x, y) \cdot dx = c \cdot (X - x_0), \qquad \int_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy = c \cdot (Y - y_0),$$

gleichgültig, ob y bezw. x zu den Zahlen y' bezw. x' gehört oder nicht. Daraus folgt dann weiter:

$$(23)\qquad \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x, y) \cdot dx = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy = c \cdot (X - x_0) \cdot (Y - y_0),$$

q. e. d.

Schliesslich bemerke ich noch folgendes. Ordnet man in dem zuerst betrachteten Falle jedem x' mit endlichem $p_{x'}$ alle diejenigen y' zu, welche durch die Bedingung bestimmt sind: $p_{y'} \leqq p_{x'}$, so liegen auf jeder Vertikalen ebenfalls nur eine endliche Anzahl von Punkten (x', y') (bezw. gar keine). Da aber andererseits zu jedem y' alle diejenigen x' gehören, für welche $p_{x'} \geqq p_{y'}$, so liegen die Punkte (x', y') auf jeder zu

irgend einem y' gehörigen Horizontalen überall dicht. Definirt man nun bei dieser veränderten Bedeutung der Punkte (x', y') die Function $f(x, y)$ wiederum durch die Gleichungen (21), so wird auch hier:

$$(24)\quad \begin{cases} \int_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy = c \cdot (Y - y_0), \\ \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy = c \cdot (X - x_0) \cdot (Y - y_0), \end{cases}$$

während das Integral:

$$(25)\quad \int_{x_0}^{X} f(x, y') \cdot dx$$

die Integral-Schwankung $|(c - c') \cdot (X - x_0)|$ besitzt, und somit:

$$\int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x, y) \cdot dx$$

nicht existirt.[1])

---

§ 3.

Ich habe bei früherer Gelegenheit[2]) die Behauptung aufgestellt, dass für die Gültigkeit des Green'schen Satzes:

$$(26)\quad \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \cdot dy = \int (P \cdot dx + Q \cdot dy)$$

die Existenz der Doppel-Integrale: $\iint \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx \cdot dy$, $\iint \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dx \cdot dy$ in Verbindung mit der Eindeutigkeit und Stetigkeit von $Q(x, y)$, $P(x, y)$ eine hinreichende Bedingung

---

[1]) Dieses Beispiel erscheint mir für die in Frage kommende Möglichkeit wesentlich prägnanter, als das auf p. 48 Fussn. 1 angeführte des Herrn Thomae, da hier die Existenz der Integrale (24) von der Wahl der Grenzen völlig unabhängig ist.

[2]) Sitz.-Ber. 25 (1895), p. 71, Fussnote.

bilde (ohne dass es also nothwendig wäre, über die Existenz von: $\int \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx$, $\int \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dy$ irgendwelche Voraussetzungen zu machen). Die nämliche Behauptung ist vielleicht auch schon anderweitig ausgesprochen,[1]) aber, soviel ich weiss, niemals wirklich bewiesen worden. Und da andererseits ihre Richtigkeit keineswegs ohne weiteres einleuchtet und neuerdings auch wirklich angezweifelt worden ist,[2]) so dürfte ein solcher Nachweis vielleicht nicht überflüssig erscheinen. Dabei genügt es offenbar in der Hauptsache, den folgenden Satz zu beweisen:

Ist $Q(x, y)$ eindeutig, endlich und stetig für das Rechteck $[x_0 \leq x \leq X,\ y_0 \leq y \leq Y]$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ für jede einzelne Stelle im Innern eindeutig definirt und numerisch unter einer endlichen Grenze bleibend, so hat man:

$$(27) \quad \iint_{(x_0, y_0)}^{(X\,Y)} \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx \cdot dy = \int_{y_0}^{Y} \{Q(X, y) - Q(x_0, y)\} \cdot dy,$$

falls jenes Doppel-Integral *existirt.*

Beweis. Aus dem Satze des § 1 folgt, dass das Integral $\int_{x_0}^{X} \frac{\partial Q(x, y')}{\partial x} \cdot dx$ für eine im Intervalle (y_0, Y) überall dichte Menge von Werthen y' existirt, so dass also:

---

[1]) So könnte z. B. eine Stelle in Herrn Thomae's „Abriss einer Theorie der complexen Functionen etc.“ (2. Aufl., Halle 1873), p. 31, Fussn. in diesem Sinne gedeutet werden. Da aber dort ausdrücklich verlangt wird, dass die betreffenden Functionen „die doppelte Integration in eindeutigem Sinne zulassen sollen“, so kann hierunter möglicher Weise auch die Existenz der betreffenden iterirten Integrale mit einbegriffen sein.

[2]) Herr Osgood (New-York M. S. Bullet. (2), V (1898), p. 86) setzt ausdrücklich noch die Existenz von $\int \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx$, $\int \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dy$ voraus, da er (wie ich einer brieflichen Mittheilung entnehme) diejenige des Doppel-Integrals allein nicht für ausreichend hält.

$$(28)\quad \int_{x_0}^{X} \frac{\partial Q(x,y')}{\partial x} \cdot dx = \int_{x_0}^{X} \frac{\partial Q(x,y')}{\partial x} \cdot dx = Q(X,y') - Q(x_0,y').$$

Da nun vermöge der Beziehung (§ 1, Gl. (1)):

$$(29)\quad \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \cdot dx = \iint_{(x_0,\,y_0)}^{(X,\,Y)} \cdot dx \cdot dy$$

$\int_{x_0}^{X} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \cdot dx$ eine im Intervalle (y_0, Y) nach y integrirbare Function vorstellt, welche nach Gl. (28) mit der ebenfalls integrirbaren (weil stetigen) Function $\{Q(X,y) - Q(x_0,y)\}$ daselbst für eine überall dichte Werthmenge y' übereinstimmt, so hat man nach einem bekannten Satze:[1])

$$(30)\quad \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \cdot dx = \int_{y_0}^{Y} \{Q(X,y) - Q(x_0,y)\} \cdot dy,$$

und daher schliesslich:

$$(27)\quad \iint_{(x_0,\,y_0)}^{(X,\,Y)} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \cdot dx \cdot dy = \int_{y_0}^{Y} \{Q(X,y) - Q(x_0,y)\} \cdot dy,$$

q. e. d.

Das analoge gilt sodann für: $\iint_{(x_0,\,y_0)}^{(X,\,Y)} \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dx \cdot dy.$ Und da sich die vorstehenden Ergebnisse ohne Schwierigkeit auf den Fall übertragen lassen,[2]) dass an die Stelle des Rechtecks irgend ein zusammenhängender, von einer oder mehreren gegen die Coordinaten-Richtungen abtheilungsweise monotonen (stetigen)[3]) Rand-Curven begrenzter Bereich tritt, so er-

[1]) Dini-Lüroth, p. 356, Nr. 10.

[2]) Vgl. Sitz.-Ber. 25 (1895), p. 56; 28 (1898), p. 73.

[3]) Die Stetigkeit ist eigentlich implicite schon in der Angabe enthalten, dass die betreffenden Curven die vollständige Begrenzung eines Bereiches bilden sollen.

giebt sich die Gültigkeit des Green'schen Satzes in dem folgenden Umfange:

Sind $Q(x, y)$, $P(x, y)$ eindeutig definirt und stetig im Innern und auf der Grenze C eines zusammenhängenden, von einer oder mehreren gegen die Coordinaten-Richtungen abtheilungsweise monotonen[1]) Curven begrenzten Bereiches T, ausserdem $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ eindeutig definirt und numerisch unter einer endlichen Grenze bleibend im Innern von T, so hat man:

$$(31)\qquad \iint_{(T)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \cdot dT = \int_{(+C)} (P \cdot dx + Q \cdot dy),$$

wenn die Doppel-Integrale $\iint_{(T)} \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dT$, $\iint_{(T)} \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dT$ *existiren*, d. h. wenn die Stellen, an welchen $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ Sprünge $> \varepsilon$ erleiden, eine *zweidimensional unausgedehnte* Menge bilden.

---

§ 4.

Der im vorigen Paragraphen gelieferte Nachweis, dass für die Gültigkeit des Green'schen Satzes eine besondere Voraussetzung bezüglich der Existenz der einfachen Integrale $\int_{x_0}^{X} \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx$, $\int_{y_0}^{Y} \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dy$ nicht erforderlich ist, gewinnt durch den Umstand erhöhte Bedeutung, dass der hiernach als möglich zugelassene

---

[1]) Dabei ist also keineswegs ausgeschlossen, dass die Curven gegen irgendwelche anderen Richtungen unendlich viele Maxima und Minima (sogar überall dicht) besitzen.

Fall der Nicht-Existenz jener Integrale auch wirklich eintreten kann: es giebt nämlich thatsächlich solche in einem Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ stetige Functionen $f(x)$, welche durchweg ein eindeutiges und numerisch unter einer endlichen Schranke bleibendes, jedoch nicht integrables $f'(x)$ besitzen, d. h. für welche das bestimmte Integral $\int_{x_0}^{X_0} f'(x) \cdot dx \, (X_0 \leqq X)$ nicht existirt. Die Möglichkeit derartiger Functionen ist wohl zuerst von Dini nachdrücklich hervorgehoben und durch den Nachweis des Satzes gestützt worden, dass eine Function mit überall dichten Oscillationen wohl eine eindeutige und endlich bleibende, aber niemals eine integrable Derivirte besitzen könne.[1] Die wirkliche Existenz ist sodann von Volterra[2] durch Aufstellung eines Beispiels direkt dargethan und späterhin auch speciell in der Richtung des angeführten Dini'schen Satzes durch Koepcke's differenzirbare Function mit überall dichten Oscillationen[3] bestätigt worden.

Ist nun aber einmal die Existenz solcher $f(x)$ definitiv festgestellt, so liegt die Frage nahe: Was tritt in diesem Falle an die Stelle der Gleichung:

$$\int_{x_0}^{X} f'(x) \cdot dx = f(X) - f(x_0), \tag{32}$$

welche ja nur für integrable $f'(x)$ einen Sinn hat? Auf diese Frage lässt sich mit Benützung des allemal existirenden oberen und unteren Integrals eine ganz präcise Antwort geben.

Schaltet man zwischen x_0 und X die Zwischenwerthe x_1, $x_2, \ldots x_{n-1}$ ein, so hat man identisch:

$$f(X) - f(x_0) = \sum_1^n{}_\nu \frac{f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})}{x_\nu - x_{\nu-1}} \cdot (x_\nu - x_{\nu-1}) \quad (x_n = X). \tag{33}$$

[1] Dini, Fondamenti § 200 (Dini-Lüroth, p. 383).

[2] Giorn. di Mat. T. 19 (1881), p. 335.

[3] Math. Ann. Bd. 29 (1887), p. 123; 34 (1880), p. 161; 35 (1890), p. 104. — Hamb. Mitth. Bd. II (1890), p. 128.

Ist jetzt $f(x)$ im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ stetig und zum mindesten für $x_0 < x < X$ mit einer eindeutigen Derivirten begabt, so gestatten die betreffenden Differenzen-Quotienten die Anwendung des (Rolle'schen) Mittelwerthsatzes, d. h. es ergiebt sich:

$$(34)\quad f(X) - f(x_0) = \sum_1^n {}_\nu f'_\nu(\xi_\nu) \cdot (x_\nu - x_{\nu-1}), \text{ wo: } x_{\nu-1} < \xi_\nu < x_\nu.$$

Unter der weiteren Annahme, dass $f'(x)$ im Intervalle (x_0, X) numerisch unter einer endlichen Grenze bleibt, besitzt $f'(x)$ in jedem Theil-Intervalle $x_{\nu-1} \leqq x \leqq x_\nu$ eine bestimmte obere und untere Grenze G'_ν bezw. g'_ν. Alsdann folgt aber aus Gl. (34):

$$(35)\quad \sum_1^n {}_\nu g'_\nu \cdot (x_\nu - x_{\nu-1}) \leqq f(X) - f(x_0) \leqq \sum_1^n {}_\nu G'_\nu \cdot (x_\nu - x_{\nu-1}),$$

und somit ergiebt sich für $\lim (x_\nu - x_{\nu-1}) = 0$, $\lim n = \infty$ die Ungleichung:

$$(36)\quad \underline{\int_{x_0}^{X}} f'(x) \cdot dx \leqq f(X) - f(x_0) \leqq \overline{\int_{x_0}^{X}} f'(x) \cdot dx,$$

welche in der That die Gleichung (32) als speciellen Fall enthält und ohne weiteres in dieselbe übergeht, wenn $f'(x)$ integrabel ist.

Mit Hülfe dieser Relation lässt sich der am Anfange des vorigen Paragraphen bewiesene Haupttheil des Green'schen Satzes unter den dort geltenden Voraussetzungen ableiten, ohne dass man nöthig hätte, auf den an jener Stelle benützten allgemeinen Integralsatz (p. 54 Fussn. 1) zu recurriren. Man hat nämlich nach (36):

$$(37)\quad \underline{\int_{x_0}^{X}} \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx \leqq Q(X, y) - Q(x_0, y) \leqq \overline{\int_{x_0}^{X}} \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx$$

und daher auch:

$$(38)\quad \int_{y_0}^{Y} dy \underline{\int}_{x_0}^{X} \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx < \int_{y_0}^{Y} \{Q(X, y) - Q(x_0, y)\} \leqq \int_{y_0}^{Y} dy \overline{\int}_{x_0}^{X} \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx.$$

Da aber nach Gl. (1) die beiden äusseren Glieder dieser Ungleichung mit dem entsprechenden, als existirend vorausgesetzten Doppel-Integral zusammenfallen, so erhält man unmittelbar:

$$(27)\quad \int\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx \cdot dy = \int_{y_0}^{Y} \{Q(X, y) - Q(x_0, y)\} \cdot dy,$$

q. e. d.

---

§ 5.

Aus dem Green'schen Satze (Gl. (31)) ergiebt sich der Cauchy'sche, wenn die Functionen $Q(x, y)$, $P(x, y)$ so beschaffen sind, dass:

$$(39)\qquad \int\int_{(T)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \cdot dT = 0$$

wird. Die hierzu nothwendige und hinreichende Bedingung besteht aber darin, dass die Stellen (x, y), für welche:

$$(40)\qquad \left|\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right| > \varepsilon,$$

bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ eine zweidimensional unausgedehnte Menge bilden.[1]) Mithin ergiebt sich, wenn T wiederum einen Bereich von der am Schlusse von § 3 definirten

---

[1]) Dabei können also die Stellen, für welche:

$$\left|\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right| > 0,$$

immerhin auch eine zweidimensional-ausgedehnte Menge bilden, z. B. überall dicht liegen. (Vgl. die Beispiele in § 1).

Art, C seine vollständige Begrenzung bedeutet, der Cauchy'sche Integralsatz in dem folgenden Umfange:

Sind $Q(x, y)$, $P(x, y)$ eindeutig definirt und stetig im Innern und auf der Begrenzung von T, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ und $\frac{\partial P}{\partial y}$ eindeutig definirt und numerisch unter einer endlichen Grenze bleibend im Innern von T, so hat man:

$$\int_{(C)} (P \cdot dx + Q \cdot dy) = 0,$$

wenn die Stellen (x, y), für welche $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ Sprünge $> \varepsilon$ erleiden[1]) oder Ungl. (40) besteht, bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ eine *zweidimensional unausgedehnte* Menge bilden.[2])

Hierzu ist nun aber noch folgendes zu bemerken. Die Existenz der Beziehung (39) hängt ausschliesslich davon ab, dass Ungl. (40) höchstens für eine zweidimensional unausgedehnte Menge besteht, keineswegs aber davon, dass $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ irgendwelchen Stetigkeits-Bedingungen unterworfen werden. Diese sind lediglich erforderlich, um die getrennte Existenz der beiden Doppel-Integrale $\iint_{(T)} \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dT$,

---

1) Es würde auch genügen, diese Stetigkeits-Bedingung für eine der beiden Functionen $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ zu statuiren, da sie dann für die andere vermöge der zweiten Bedingung (nämlich:

$$\left| \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right| \leqq \varepsilon,$$

mit Zulassung der näher bezeichneten Ausnahmen) von selbst erfüllt ist.

2) Man kann sogar noch die Bedingung der Stetigkeit von P, Q, sowie der Endlichkeit von $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ mit Hülfe bekannter Ausschliessungs-Methoden in gewissem Umfange fallen lassen.

$\iint\limits_{(T)} \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dT$ zu gewährleisten, auf welcher der Beweis des Green'schen Satzes wesentlich beruhte. Im Grunde genommen basirt aber Gl. (41) gar nicht nothwendig auf der Existenz jener beiden Doppel-Integrale, sondern lediglich auf derjenigen der beiden iterirten Integrale $\int dy \int \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot dx$, $\int dy \int \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dx$, und auf der Vertauschbarkeit der Integrationsfolge bei dem zweiten dieser Integrale. Nachdem nun aber die Betrachtungen des § 2 deutlich gezeigt haben, dass diese letzteren Bedingungen sehr wohl erfüllt sein können, auch wenn jene Doppel-Integrale nicht existiren, so erkennt man, dass für die Gültigkeit des Cauchy'schen Satzes (Gl. (41)) die den Functionen $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ auferlegten Stetigkeits-Bedingungen keineswegs nothwendige sind und sich durch andere, umfassendere ersetzen lassen müssen. Da man indessen für das Zustandekommen der Beziehung:

$$(42) \qquad \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dx = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} \frac{\partial P}{\partial y} \cdot dy$$

lediglich hinreichende Bedingungen kennt, von denen die Existenz des betreffenden Doppel-Integrals zur Zeit als die weitaus allgemeinste gelten darf, so gelangt man auf diesem Wege schliesslich doch zu keiner befriedigenden Fassung des fraglichen Satzes, die allgemeiner wäre, als die oben gegebene.

Immerhin geht aus dieser Betrachtung mit Evidenz hervor, dass der Green'sche Satz keineswegs als allgemeinste Grundlage des Cauchy'schen Satzes (41) angesehen werden kann. Dies gilt nun aber in erhöhtem Maasse für des letzteren Anwendung auf Functionen einer complexen Veränderlichen. Hier gelangt man zunächst auf Grund der oben gegebenen Fassung zu dem folgenden Resultate:

Ist $f(z) = f(x + yi) = \varphi(x, y) + i \cdot \psi(x, y)$ eindeutig definirt und stetig[1]) im Innern und auf der Begrenzung von T; sind ausserdem $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}$ eindeutig definirt und absolut genommen unter einer endlichen Grenze[1]) bleibend, so hat man:

$$\int_{(C)} f(z) \cdot dz = 0, \tag{43}$$

wenn die Stellen z, für welche $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ (oder auch:[1]) $\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}$) Sprünge $> \varepsilon$ erleiden oder eine der Ungleichungen besteht:

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right| > \varepsilon, \qquad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| > \varepsilon, \tag{44}$$

bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ eine *zweidimensional unausgedehnte* Menge bilden. Daraus folgt dann nach bekannten Methoden, dass $f(z)$ im Innern von T eine *analytische* Function vorstellt.

Insbesondere ergiebt sich also, dass unter den gemachten Voraussetzungen $f(z)$ im Innern von T einen „vollständigen", d. h. von der Art des Grenzüberganges (nicht nur von der Differentiations-Richtung) unabhängigen Differential-Quotienten besitzt. Wird nun, wie gewöhnlich geschieht, diese letztere Forderung schon in der Voraussetzung aufgenommen, so verlangt man damit von vornherein merklich mehr, als die Existenz jener partiellen Ableitungen und sogar die ausnahmslose Existenz der Beziehungen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \tag{45}$$

---

[1]) Vergl. die beiden vorigen Fussnoten.

besagen würde.[1]) Hiernach erscheint es aber keineswegs ausgeschlossen, dass die Existenz eines solchen $f'(z)$ schon allein die Integral-Beziehung (43) und somit den analytischen Charakter von $f(z)$ nach sich zieht, ohne dass es nöthig wäre, $f'(z)$ irgend welchen Stetigkeits-Bedingungen zu unterwerfen. Und so lange es nicht etwa gelingt, durch Aufstellung von Beispielen das Gegentheil festzustellen, wird diese Frage als eine offene gelten müssen.

---

[1]) Vergl. Thomae, Abriss etc., p. 17, 119. — Stolz, Grundlagen der Diff.- und Integr.-Rechnung, I, p. 134; II, p. 82. — Osgood, a. a. O. p. 87.

16

Ueber ein Convergenz-Kriterium für Kettenbrüche mit positiven Gliedern.

Von

Alfred Pringsheim.

Aus den Sitzungsberichten der mathematisch-physikalischen Classe
der k. bayer. Akad. d. Wiss. 1899. Bd. XXIX. Heft II.

München 1899.

Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub.



Ueber ein Convergenz-Kriterium für Kettenbrüche mit positiven Gliedern.

Von **Alfred Pringsheim.**

(Eingelaufen 8. Juli.)

Im folgenden sollen a_ν, b_ν, p_ν, q_ν, r_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) allemal unbegrenzte Folgen positiver Zahlen bedeuten.

Als notwendige und hinreichende Bedingung für die Convergenz des unendlichen Kettenbruches:

$$(1) \qquad \left[\frac{1}{q_\nu}\right]_1^\infty = \frac{1|}{|q_1} + \frac{1|}{|q_2} + \ldots + \frac{1|}{|q_\nu} + \ldots\ldots$$

ergiebt sich alsdann:[1])

$$(A_1) \qquad \text{die Divergenz der Reihe } \sum q_\nu;$$

ebenso für die Convergenz des Kettenbruches:

$$(2) \qquad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu} + \ldots\ldots = \left[\frac{1}{r_\nu}\right]_1^\infty$$

$$(A_2) \qquad \text{die Divergenz der Reihe } \sum r_\nu,$$

wo: $r_1 = \frac{b_1}{a_1}$, im übrigen:

$$(3) \qquad r_{2\nu} = \frac{a_1 a_3 \ldots a_{2\nu-1}}{a_2 a_4 \ldots a_{2\nu}} \cdot b_{2\nu}, \quad r_{2\nu+1} = \frac{a_2 a_4 \ldots a_{2\nu}}{a_1 a_3 \ldots a_{2\nu-1}} \cdot \frac{b_{2\nu+1}}{a_{2\nu+1}}.$$

Da sodann die Divergenz der Reihe $\sum q_\nu q_{\nu+1}$ stets die-

[1]) Vgl. Bd. 28 (1898) dieser Berichte p. 311. — Encyklop. der Math. Wissensch. Bd. 1, p. 128. — Stolz, Vorl. über Allg. Arithm. Bd. 2, p. 282.

jenige der Reihe $\sum q_\nu$ nach sich zieht, aber nicht umgekehrt,[1]) so resultirt als eine hinreichende, aber nicht nothwendige Bedingung für die Convergenz des Kettenbruches (1):

$$(B_1) \qquad \text{die Divergenz der Reihe } \sum q_\nu\, q_{\nu+1};$$

und daraus entsprechend für die Convergenz des Kettenbruches (2):

$$(B_2) \qquad \text{die Divergenz der Reihe } \sum \frac{b_\nu\, b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}.$$

In zwei kürzlich publicirten Arbeiten[2]) über die Convergenz gewisser Kettenbrüche hat nun Herr Saalschütz zunächst ohne Beweis den Satz mitgetheilt, dass

$$(C) \qquad \text{die Divergenz der Reihe } \sum \sqrt{\frac{b_\nu\, b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}}$$

als nothwendige[3]) und hinreichende Bedingung für die Convergenz des Kettenbruches (1) zu gelten habe, und er erblickt gerade in der Auffindung dieses Kriteriums ein deutliches Kennzeichen für die grössere Tragweite seiner Untersuchungs-Methode[4]) gegenüber der bei früherer Gelegenheit[5])

---

[1]) Wenn nämlich $\sum q_\nu$ convergirt, so muss auch $\sum q_\nu\, q_{\nu+1}$ a fortiori convergiren; wenn dagegen $\sum q_\nu$ divergirt, so kann immerhin $\sum q_\nu\, q_{\nu+1}$ noch convergiren $\left(\text{Beispiel: } q_\nu = \frac{1}{\nu}\right)$.

[2]) Journ. f. Math. Bd. 120 (1899), p. 138, Fussnote. — Mitth. der Königsberger phys.-ökon. Ges. vom 9. Februar 1899, p. 6.

[3]) An der zuletzt citirten Stelle heisst es noch ausführlicher, dass der Kettenbruch allemal oscillirt, wenn jene Reihe convergirt. Dies ist indessen unrichtig, wie weiter unten gezeigt werden wird.

[4]) Der Kern der von Herrn Saalschütz befolgten Methode besteht darin, dass er der bekannten Recensionsformel für den n^{ten} Näherungsbruch-Nenner B_n des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$, nämlich:

$$(a) \qquad B_n = b_n\, B_{n-1} + a_n\, B_{n-2}$$

die Form giebt:

$$(b) \qquad C_{n-1}\,(C_n - b_n) - a_n = 0, \text{ wo: } C_\nu = \frac{B_\nu}{B_{\nu-1}},$$

und sodann diese Quotienten C_ν als Unbekannte betrachtet.

[5]) S. das erste Citat in Fussnote 1) p. 261.

von mir benützten. Da ich die ziemlich schwer zu übersehenden Resultate jener umfangreichen Arbeiten (74 Quartseiten) noch nicht genügend studirt habe, so bin ich weit entfernt, die Richtigkeit jener Bemerkung im allgemeinen bestreiten zu wollen.[1]) In Beziehung auf das eben erwähnte Convergenz-Kriterium möchte ich sie jedoch aus zwei Gründen als unzutreffend bezeichnen: erstens weil dasselbe nur zur Hälfte richtig ist, insofern die fragliche Bedingung zwar als hinreichend, keineswegs aber als nothwendig erscheint; zweitens aber, weil sich das so berichtigte Kriterium ohne die, wie ich glauben möchte, wohl etwas umständlichere Methode des Herrn Saalschütz unmittelbar aus dem Fundamental-Kriterium (A_1), (A_2) ableiten lässt, nämlich analog wie die ebenfalls lediglich hinreichenden Convergenz-Bedingungen (B_1), (B_2) durch eine ganz elementare Ueberlegung über die gegenseitigen Convergenz-Beziehungen der Reihen $\sum q_\nu$, $\sum \sqrt{q_\nu\, q_{\nu+1}}$.

---

1. Um die beiden zuletzt ausgesprochenen Behauptungen näher zu begründen, schicke ich zunächst den folgenden Hülfssatz voran:

Sind die beiden Reihen $\sum q_\nu$, $\sum r_\nu$ *convergent*, so *convergirt* auch die Reihe $\sum \sqrt{q_\nu\, r_\nu}$: die *Divergenz* der Reihe $\sum \sqrt{q_\nu\, r_\nu}$ bildet also eine *hinreichende* Bedingung dafür, dass *mindestens eine* der beiden Reihen $\sum q_\nu$, $\sum r_\nu$ *divergirt.* Diese Bedingung ist aber *keine nothwendige,* und zwar können trotz der *Convergenz* von $\sum \sqrt{q_\nu\, r_\nu}$ sogar *beide* Reihen $\sum q_\nu$, $\sum r_\nu$ *divergiren.*

---

[1]) Immerhin will mir nicht einleuchten, warum gerade, wie Herr Saalschütz bemerkt (Journ. f. Math. a. a. O.), die in Fussnote 4), p. 262 mit (b) bezeichnete Gleichung die „wahre Quelle" eines von mir a. a. O. aufgestellten Convergenz-Kriteriums sein soll, da ich dasselbe doch direkt aus der eigentlichen Fundamentalgleichung (a) abgeleitet habe, ohne den Umweg über (b) zu nehmen.

Beweis. Aus der Beziehung:

$$(4) \qquad (\sqrt{q_\nu} - \sqrt{r_\nu})^2 = q_\nu + r_\nu - 2\sqrt{q_\nu\, r_\nu} \geqq 0$$

folgt unmittelbar (der bekannte Satz, dass das geometrische Mittel niemals das arithmetische übersteigt):

$$(5) \qquad \sqrt{q_\nu\, r_\nu} \leqq \tfrac{1}{2}(q_\nu + r_\nu).$$

Da nun gleichzeitig mit den beiden Reihen $\sum q_\nu$, $\sum r_\nu$ stets auch $\sum \frac{1}{2}(q_\nu + r_\nu)$ convergirt, so ergiebt sich in diesem Falle, dass auch $\sum \sqrt{q_\nu\, r_\nu}$ convergirt.

Zugleich lehrt die Ungleichung (5), dass es zunächst nicht erlaubt ist, umgekehrt aus der Convergenz von $\sum \sqrt{q_\nu\, r_\nu}$ auf diejenige von $\sum q_\nu$, $\sum r_\nu$ zu schliessen. Dass aber dieser Schluss nicht nur logisch unzulässig, sondern sachlich falsch wäre, erkennt man leicht aus den folgenden Beispielen.

Es bezeichne zunächst d_ν, wo $0 < d_\nu < G$, das allgemeine Glied einer divergenten, $c_\nu > 0$ dasjenige einer convergenten Reihe. Setzt man sodann:

$$(6) \qquad q_\nu = d_\nu, \quad r_\nu = c_\nu^2$$

so wird:

$$(7) \qquad \sqrt{q_\nu\, r_\nu} = \sqrt{d_\nu} \cdot c_\nu < G \cdot c_\nu,$$

sodass $\sum \sqrt{q_\nu\, r_\nu}$ convergirt, obschon $\sum q_\nu = \sum d_\nu$ divergirt.

Bezeichnet ferner $d_\nu > 0$ das allgemeine Glied einer divergenten Reihe von der Beschaffenheit, dass $\sum d_\nu^{1+p}$ für ein hinlänglich grosses $p > 0$ convergirt $\Big($z. B. $d_\nu = \frac{1}{\nu^\varrho}$, wo: $0 < \varrho \leqq 1$, also: $\sum d_\nu^{1+p} = \sum \frac{1}{\nu^{\varrho(1+p)}}$ convergent, wenn: $\varrho(1+p) > 1$, d. h. wenn: $p > \frac{1-\varrho}{\varrho}\Big)$, so setze man:

$$(8) \qquad \begin{cases} q_\nu = d_\nu^{1+p(1+(-1)^\nu)}, \text{ d. h. } q_{2\nu} = d_\nu^{1+2p}, \ q_{2\nu+1} = d_\nu, \\ r_\nu = d_\nu^{1+p(1-(-1)^\nu)}, \text{ d. h. } r_{2\nu} = d_\nu \quad, \ r_{2\nu+1} = d_\nu^{1+2p}. \end{cases}$$

Alsdann wird:

$$\sqrt{q_\nu\, r_\nu} = d_\nu^{1+p}, \tag{9}$$

also $\sum \sqrt{q_\nu r_\nu}$ convergent, während die Reihen $\sum q_{2\nu+1}$, $\sum r_{2\nu}$ und somit auch die beiden Reihen $\sum q_\nu$, $\sum r_\nu$ divergiren.

3. Setzt man jetzt speciell $r_\nu = q_{\nu+1}$, so bleibt zunächst der erste Theil des vorigen Satzes unverändert bestehen, da die zum Beweise dienende Ungleichung (5) durch jene besondere Festsetzung nicht alterirt wird. Somit folgt:

> Ist die Reihe $\sum q_\nu$ *convergent*, so *convergirt* auch die Reihe $\sum \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}}$: die *Divergenz* der Reihe $\sum \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}}$ bildet also eine *hinreichende* Bedingung für diejenige der Reihe $\sum q_\nu$.

Dass aber auch hier diese Bedingung keine nothwendige ist, dass also $\sum q_\nu$ divergiren kann, auch wenn $\sum \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}}$ convergirt, zeigt eine einfache Modification des zuletzt angegebenen Beispiels. Man setze (wieder unter der Voraussetzung, dass $\sum d_\nu$ divergirt, $\sum d_\nu^{1+p}$ convergirt):

$$\begin{cases} q_\nu = d_\nu^{1+(p+\frac{1}{2})(1+(-1)^\nu)} \\ \text{also: } q_{2\nu\pm 1} = d_{2\nu\pm 1}, \; q_{2\nu} = d_{2\nu}^{2+2p}, \end{cases} \tag{10}$$

und daher:

$$\sqrt{q_{2\nu\pm 1}\, q_{2\nu}} = \sqrt{d_{2\nu\pm 1}} \cdot d_{2\nu}^{1+p}. \tag{11}$$

Daraus folgt, dass $\sum \sqrt{q_{2\nu\pm 1} \cdot q_{2\nu}} \equiv \sum \sqrt{q_\nu \cdot q_{\nu+1}}$ wiederum convergirt, während $\sum q_{2\nu\pm 1}$, also auch $\sum q_\nu$ divergirt.

4. Wie ein Blick auf das vorige Beispiel lehrt, rührt die Convergenz der Reihe $\sum \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}}$ bei gleichzeitiger Divergenz von $\sum q_\nu$ wesentlich davon her, dass $\sum q_{2\nu}$ convergirt, dagegen $\sum q_{2\nu+1}$ divergirt. Daraus folgt, dass in dem vorliegenden Falle die q_ν sicherlich keine von irgend einem Index $\nu > n$ ab monoton bleibende Folge bilden können. Es gilt aber auch umgekehrt, dass die Monotonie der Folge q_ν (für

$\nu \geqq n$) das Zusammentreffen der Convergenz von $\sum \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}}$ und der Divergenz von $\sum q_\nu$ definitiv ausschliesst; d. h. es besteht der folgende Satz:

Sind die q_ν zum mindesten für $\nu \geqq n$ *monoton*, so sind die Reihen $\sum q_\nu$ und $\sum \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}}$ stets *gleichzeitig convergent* oder *gleichzeitig divergent*. Insbesondere bildet dann also die *Divergenz* der Reihe $\sum \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}}$ eine *nothwendige* und *hinreichende* Bedingung für diejenige der Reihe $\sum q_\nu$.

Beweis. Sind für $\nu \geqq n$ die $q_\nu > 0$ und niemals abnehmend, so erkennt man ohne weiteres, dass die beiden Reihen $\sum q_\nu$, $\sum \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}}$ stets divergiren müssen. Sind sie dagegen niemals zunehmend, so hat man:

(12) $$q_\nu \geqq q_{\nu+1} \text{ für } \nu \geqq n,$$

(13) also: $$q_\nu^2 \geqq q_\nu q_{\nu+1} \geqq q_{\nu+1}^2$$

(14) und: $$q_\nu \geqq \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}} \geqq q_{\nu+1} \quad \Big\} (\nu \geqq n)$$

schliesslich:

(15) $$\sum_n^\infty {}^\nu q_\nu \geqq \sum_n^\infty {}^\nu \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}} \geqq \sum_{n+1}^\infty q_\nu,$$

woraus die Richtigkeit des oben ausgesprochenen Satzes unmittelbar hervorgeht.

5. Wendet man diese Resultate zunächst auf das Kettenbruch-Kriterium (A_1) an, so ergiebt sich:

(C_1) Die *Divergenz* der Reihe $\sum \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}}$ bildet eine *hinreichende* Bedingung für die *Convergenz* des Kettenbruches $\left[\frac{1}{q_\nu}\right]_1^\infty$; diese Bedingung ist zugleich eine *nothwendige*, wenn die q_ν zum mindesten von einem bestimmten Index $\nu = n$ ab *monoton* bleiben.

In dieser Form erscheint das gewonnene Kriterium zunächst ohne besonderen Werth (ebenso wie das Kriterium (B_1)), da generell, wenn der Kettenbruch von vornherein in

der Form $\left[\frac{1}{q_\nu}\right]$ vorgelegt ist, die Anwendung des Haupt-Kriteriums (A_1), d. h. die Untersuchung der Reihe $\sum q_\nu$ einfacher erscheint, als diejenige der Reihe $\sum \sqrt{q_\nu q_{\nu+1}}$. Seine Bedeutung tritt erst hervor, wenn die q_ν speciell so beschaffen sind, dass $q_\nu q_{\nu+1}$ merklich einfacher ausfällt als q_ν selbst,[1]) und dies ist namentlich dann der Fall, wenn $q_\nu = r_\nu$ und die r_ν durch Gl. (3) definirt sind. Man findet auf diese Weise:

(C_2) Die *Divergenz* der Reihe $\sum \sqrt{\frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}}$ bildet eine für die *Convergenz* des Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ *hinreichende* Bedingung, die aber im allgemeinen *keine nothwendige* ist. Das letztere ist jedoch der Fall, wenn die mit r_ν bezeichneten Ausdrücke (Gl. (3)) zum mindesten für $\nu \geqq n$ *monoton* bleiben.[2])

Da die Feststellung des monotonen Verhaltens der r_ν im allgemeinen verhältnissmässig complicirt ausfällt, so kommt das obige Kriterium wesentlich nur als hinreichende Bedingung in Betracht und stellt in diesem Sinne thatsächlich eine merkliche Verbesserung der ebenfalls nur hinreichenden Convergenz-Bedingung (B_2) dar: die letztere versagt, wenn $\sum \frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}$ convergirt. Man hat in diesem Falle (zum mindesten für $\nu \geqq n$): $\frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}} < 1$, und daher: $\sqrt{\frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}} > \frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}$, sodass $\sum \sqrt{\frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}}$ eventuell divergiren kann und sodann auf Grund des Kriteriums (C_2) eine Entscheidung liefert.

---

[1]) Dieses Verhältniss ist ein ganz analoges, wie bei den Kriterien erster und zweiter Art für unendliche Reihen — vgl. meine Bemerkungen; Math. Ann. Bd. 35 (1890), p. 308—311.

[2]) Es genügt etwa nicht, dass die $\frac{b_\nu b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}$ monoton ausfallen (s. das Beispiel in Nr. 3).

Eine besonders einfache Gestalt nimmt die fragliche Convergenz-Bedingung für Kettenbrüche von der häufig vorkommenden Form $\left[\frac{p_\nu}{1}\right]_1^\infty$ an: sie reducirt sich in diesem Falle auf die Divergenz der Reihe $\sum \frac{1}{\sqrt{p_\nu}}$. Mit Hülfe dieses Kriteriums erkennt man z. B. ohne alle Rechnung, dass der Kettenbruch $\left[\frac{\nu^p}{1}\right]_1^\infty$ für $0 \leqq p \leqq 2$ convergirt, während das Kriterium (B_2) die Convergenz des Kettenbruches nur für $0 \leqq p \leqq 1$ erkennen lässt.

Bleiben ferner die $\frac{b_{\nu+1}}{a_{\nu+1}}$ d. h. die $\frac{b_\nu}{a_\nu}$ über, also die $\frac{a_\nu}{b_\nu}$ unter einer endlichen Schranke, so genügt auch die Divergenz der einfacheren Reihe $\sum \sqrt{b_\nu}$ für die Convergenz des Kettenbruches.

Nachtrag zu dem Aufsatze:

Zur Theorie des Doppel-Integrals etc.

(p. 39—62 dieses Bandes).

Bei der Abfassung dieses Aufsatzes war mir eine Arbeit über Doppel-Integrale entgangen, welche Herr C. Arzelà in den Abhandlungen der Bologneser Akademie vom Jahre 1892 veröffentlicht hat.[1]) Herr Arzelà untersucht daselbst[2]) zunächst, in wieweit die Existenz des eigentlichen Doppel-Integrals $\int\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y)\, dx\, dy$ diejenigen der beiden einfachen Integrale $\int_{x_0}^{X} f(x, y) \cdot dx$, $\int_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy$ nach sich zieht und gelangt hier-

[1]) „Sugli integrali doppi." Mem. Accad. Bologna, Serie V, T. II, p. 133—147.

[2]) A. a. O. Nr. 4—6.

bei zu ähnlichen Resultaten, wie sie in dem Satze meines § 1 zusammengefasst sind. Immerhin dürfte gerade die Vergleichung beider Darstellungen die grössere Prägnanz und Uebersichtlichkeit der von mir gewählten Bezeichnungsweise deutlich hervortreten lassen.

Sodann[1]) giebt Herr Arzelà eine hinreichende Bedingung für die Existenz der Beziehung:

$$\text{(A)} \qquad \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x, y)\, dx = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy$$

ohne vorausgesetzte Existenz des entsprechenden Doppel-Integrals, die ich etwa in möglichster Kürze als „im allgemeinen gleichmässige, horizontale und vertikale Integrabilität von $f(x, y)$" bezeichnen will. Im Anschlusse hieran möchte ich zur Vervollständigung der auf p. 60 meines Aufsatzes gemachten Bemerkung,

> „dass die Existenz des betreffenden Doppel-Integrals zur Zeit als die weitaus allgemeinste Form einer hinreichenden Bedingung für das Zustandekommen der Beziehung (A) gelten dürfe"

noch folgendes hinzufügen. Es wäre möglich, dass die Bedingung des Herrn Arzelà für allgemeiner zu gelten hat, als die oben genannte. Hierzu müsste aber zuvor zweierlei bewiesen werden, nämlich: erstens, dass es wirklich Functionen $f(x, y)$ giebt, für welche jene Bedingung erfüllt ist, während andererseits das entsprechende Doppel-Integral nicht existirt; zweitens, dass alle $f(x, y)$, für welche das Doppel-Integral existirt, auch eo ipso der fraglichen Bedingung genügen. Aber selbst wenn dieser Beweis geführt werden kann, so wäre die auf diese Weise erzielte Verallgemeinerung der Bedingungen für die Existenz der Beziehung (A) eine verhältnissmässig unerhebliche. Zu der ausserordentlich weit reichenden, durch präcise Umgrenzung der eventuell zulässigen Unstetigkeiten kurz und scharf zu charakteri-

[1]) A. a. O. Nr. 8.

sirenden Klasse von Functionen $f(x, y)$, für welche das Doppel-Integral existirt, würde dann auf Grund der Arzelà-schen Bedingung eine sehr specielle, allenfalls durch künstliche Constructionen mit Beispielen zu belegende Gattung von solchen $f(x, y)$ hinzutreten, denen lediglich die relativ complicirte Eigenschaft der gleichmässigen horizontalen und vertikalen Integrabilität ohne Existenz des Doppel-Integrals zukommt. Keinesfalls werden dann aber etwa alle möglichen $f(x, y)$ umfasst, für welche die Beziehung (A) besteht. Denn, wie auch Herr Arzelà selbst hervorhebt,[1]) die fragliche Bedingung ist zwar eine hinreichende, aber durchaus keine nothwendige. Als Illustration zu dieser Bemerkung können gerade diejenigen Functions-Beispiele dienen, welche ich in § 2 meines Aufsatzes angegeben habe: für diese besteht in der That die Beziehung (A), obschon dieselben, wie leicht zu sehen, der Arzelà'schen Bedingung nicht genügen. Ich möchte darnach sagen, dass man auch im günstigsten Falle den wahren Grundlagen der Beziehung (A) mit Hülfe jener letzteren Bedingung nicht wesentlich näher kommt. —

Schliesslich hätte ich im Interesse der historischen Gerechtigkeit noch folgende zwei Bemerkungen nachzutragen:

In der Fussnote 1) p. 42 ist hervorgehoben, dass Harnack in seinen Elementen der Diff.- und Integr.-Rechnung fälschlich behauptet, dass bei Existenz des Doppel-Integrals $\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)}\int f(x, y) \cdot dx \cdot dy$ die Nicht-Existenz der einfachen Integrale $\int\limits_{x_0}^{X} f(x, y)\, dx$ bezw. $\int\limits_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy$ auf eine unausgedehnte Menge y bezw. x beschränkt sein müsse.

Dem ist hinzuzufügen, dass Harnack selbst späterhin[2]) den fraglichen Irrthum lediglich als Ausfluss einer incorrecten Ausdrucksweise erklärt und eine vollkommen

---

[1]) A. a. O. Nr. 7 am Schlusse.

[2]) Math. Ann. Bd. 26 (1886) p. 567.

richtige Fassung der betreffenden Behauptung angegeben hat.

Ferner ist der von mir benützte und auf p. 56, 57 kurz bewiesene Hülfs-Satz:

$$\underline{\int_{x_0}^{X}} f'(x) \cdot dx \leqq f(X) - f(x_0) \leqq \overline{\int_{x_0}^{X}} f'(x)\, dx,$$

wie ich nachträglich bemerkt habe, in einem von Herrn Pasch[1]) aufgestellten, etwas allgemeineren Satze als specieller Fall enthalten.

---

[1]) Math. Ann. Bd. 30 (1887) p. 153.

Ueber das Verhalten von Potenzreihen auf dem Convergenzkreise.

Von

Alfred Pringsheim.

Aus den Sitzungsberichten der mathematisch-physikalischen Classe
der k. bayer. Akad. d. Wiss. 1900. Bd. XXX. Heft I.

München 1900.

Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub.



Ueber das Verhalten von Potenzreihen auf dem Convergenzkreise.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 2. April.*)

Eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$, die noch für die Stellen $X = R \cdot e^{\vartheta i}$ des Convergenzkreises im allgemeinen convergirt, ist zwar unter gewissen Einschränkungen[1]) allemal eine Fourier'sche Reihe. Immerhin ist man bei der Beurtheilung der Convergenz von $\mathfrak{P}(R\,e^{\vartheta i})$ nicht ausschliesslich auf diejenigen Ergebnisse angewiesen, welche die allgemeine Theorie der Fourier-schen Reihen liefert. Abgesehen von den elementaren Kriterien für unbedingte oder bedingte Convergenz, kommt als ein der Potenzreihe als solcher eigenthümliches Hülfsmittel das Verhalten von $\lim \mathfrak{P}(x)$ bei speciellem oder beliebigem Grenzübergange $\lim x = X$ in Betracht. In § 1 der folgenden Mittheilung wird zunächst in ganz elementarer Weise untersucht, in wieweit aus der Existenz eines endlichen $\lim\limits_{x=X} \mathfrak{P}(x)$ auf die Convergenz von $\mathfrak{P}(X)$ geschlossen werden kann. Die Cauchy'sche bezw. Fourier'sche Integral-Darstellung der Reihen-Coefficienten führt sodann in § 2 zu einem Kriterium für die absolute Convergenz von $\mathfrak{P}(X)$. Daran schliessen sich (§ 3) Betrachtungen über Potenzreihen, welche auf dem Convergenzkreise ausnahmslos und doch nicht absolut convergiren. Schliesslich (§ 4) werden weitere Anhaltspunkte zur Beurtheilung von $\mathfrak{P}(X)$ aus dem Umstande gewonnen, dass $\mathfrak{P}(X)$ durch Trennung des Reellen und Imaginären in zwei von einander abhängige, in ihren Convergenz-Eigenschaften sich gegenseitig bedingende Fourier'sche Reihen zerfällt.

---

1) Vgl. Sitz.-Ber. Bd. 25 (1895), p. 337 ff.

§ 1. Der Abel'sche Grenzwerth-Satz und seine Umkehrungen.

1. Es sei:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu \qquad (a_\nu = \alpha_\nu + \beta_\nu i) \tag{1}$$

eine Potenzreihe mit endlichem Convergenz-Bereiche, d. h. einem mit einem gewissen Radius R um den Nullpunkt beschriebenen Kreise. Da man, sofern nicht schon $R = 1$ ist, $\mathfrak{P}(x)$ mit Hülfe der Substitution $x = Ry$ in die Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(y) = \sum_1^\infty{}^\nu (a_\nu R^\nu) \cdot y^\nu$ mit dem Convergenz-Radius $|y| = 1$ transformiren kann, so dürfen wir, ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit, im folgenden ein für allemal als Convergenz-Radius von $\mathfrak{P}(x)$ den Werth $|x| = 1$ annehmen. Ist dann $\sum a_\nu$ convergent und bedeutet ϱ eine reelle positive Zahl < 1, so besagt der bekannte Abel'sche Grenzwerth-Satz, dass:

$$\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho) = \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu \,, \tag{2}$$

und daraus folgt unmittelbar, dass auch:

$$\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X) = \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu X^\nu \,, \tag{3}$$

falls X eine beliebige Stelle auf dem Convergenzkreise bedeutet, für welche $\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu X^\nu$ convergirt.

Es liegt auf der Hand, dass dieser Satz nicht ohne weiteres umkehrbar ist. Denn für die Convergenz von $\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ an irgend eine einzelne Stelle X der Peripherie ist nicht nur das Verhalten von $\mathfrak{P}(x)$ in der Nähe dieser speciellen Stelle X, sondern dasjenige in der Nähe des gesammten Convergenzkreises maassgebend. So würde z. B. schon das Vorhandensein einer einzigen Stelle X', für welche $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X')$

von der ersten oder höherer Ordnung unendlich wird, die Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ für alle übrigen Stellen X definitiv ausschliessen. Auch folgt aus der Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ für irgend ein bestimmtes X nicht nur die Existenz der Beziehung (3), sondern, auf Grund einer zuerst von Herrn Stolz[1]) bewiesenen Verallgemeinerung jenes Abel'schen Satzes, die weitere Beziehung:

$$(4) \qquad \lim_{x=X} \mathfrak{P}(x) = \sum_{1}^{\infty}{}^{\nu} a_\nu X^\nu,$$

falls x auf einem beliebigen Strahle der Stelle X zustrebt; während andererseits aus der Existenz eines endlichen $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ keineswegs ohne weiteres auf diejenige von $\lim\limits_{x=X} \mathfrak{P}(x)$ in dem eben angegebenem Sinne geschlossen werden kann (Beispiel: $\mathfrak{P}(x) = e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}$ bei $x = 1$).[2])

Ja sogar, wenn auch $\lim\limits_{x=X} \mathfrak{P}(x)$ im obigen Sinne für jede Stelle X einen bestimmten endlichen Werth besitzt, so braucht darum $\mathfrak{P}(X)$ für keinen einzigen Werth X zu convergiren $\left(\text{Beispiel: } \mathfrak{P}(x) = \frac{1}{(x-1)^2} \cdot e^{\frac{1}{x-1}}\right)$.[3])

2. Es giebt einen einzigen, besonders einfachen Fall, in welchem der in Gl. (2) bezw. (3) enthaltene Satz ohne weiteres umkehrbar ist. Um denselben zu erledigen, schicken wir zunächst den folgenden Satz voraus:

Wenn $\sum a_\nu$ *eigentlich* divergirt, so ist $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho) = \infty$ (d. h. $\lim\limits_{\varrho=1} |\mathfrak{P}(\varrho)| = +\infty$). Dabei soll $\sum a_\nu = \sum (\alpha_\nu + \beta_\nu i)$ eigentlich divergent heissen, wenn mindestens eine

---

[1]) Zeitschr. f. Math. Bd. 20 (1875), p. 370. Vgl. auch: Sitz.-Ber. Bd. 27 (1897), p. 374.

[2]) Vgl. auch § 2, Nr. 2.

[3]) Vgl. Math. Ann. Bd. 44 (1894), p. 54.

der beiden Reihen $\sum \alpha_\nu$, $\sum \beta_\nu$ eigentlich d. h. nach $+\infty$ oder $-\infty$ divergirt).[1]

Beweis. Es sei etwa, um irgend eine Festsetzung zu treffen, $\sum_1^\infty{}^\nu \alpha_\nu = +\infty$. Setzt man:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu = \sigma_\nu,$$

so ergiebt sich mit Hülfe der Abel'schen Transformation:

$$(5)\quad \sum_1^n \alpha_\nu \varrho^\nu = \sum_1^{m-1}{}^\nu (\varrho^\nu - \varrho^{\nu+1}) \cdot \sigma_\nu + \sum_m^{n-1}{}^\nu (\varrho^\nu - \varrho^{\nu+1}) \cdot \sigma_\nu + \sigma_n \cdot \varrho^n \quad (n > m).$$

Da $\lim_{\nu=\infty} \sigma_\nu = +\infty$, so besitzen die σ_ν für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ eine endliche untere Grenze g_1 (die eventuell auch negativ sein könnte). Bedeutet dann allgemein g_m die untere Grenze von σ_m, σ_{m+1}, $\sigma_{m+2}, \ldots$, so folgt aus (5):

$$\sum_1^n{}^\nu \alpha_\nu \varrho^\nu > g_1 (\varrho - \varrho^m) + g_m \cdot \varrho^m,$$

und daher, wegen $\varrho < 1$:

$$(6)\qquad \sum_1^n{}^\nu \alpha_\nu \varrho^\nu \left\{ \begin{array}{ll} > g_1 + g_m \varrho^m, & \text{wenn } g_1 < 0, \\ > g_m \varrho^m, & \text{wenn } g_1 \geqq 0. \end{array} \right.$$

---

[1]) Es würde nicht genügen, anzunehmen, dass lediglich:

$$\sum_1^\infty{}^\nu (\alpha_\nu + \beta_\nu i) = \infty,$$

d. h.

$$\lim_{n=\infty} \left| \sum_1^n{}^\nu (\alpha_\nu + \beta_\nu i) \right| = +\infty.$$

Denn aus:

$$\lim_{n=\infty} | A_n + B_n i | = +\infty$$

folgt noch nicht einmal, dass eine der Zahlenfolgen $|A_\nu|$, $|B_\nu|$ den Grenzwerth $+\infty$ haben müsste. Es könnte auch:

$$\overline{\lim_{n=\infty}} | A_n | = \infty, \quad \overline{\lim_{n=\infty}} B_n = \infty,$$

dagegen

$$\underline{\lim_{n=\infty}} | A_n |, \quad \underline{\lim_{n=\infty}} | B_n |$$

endlich sein.

Unterwirft man ϱ der Bedingung:

$$\varrho \geqq \frac{m}{m+1}, \tag{7}$$

so wird:

$$\varrho^m \geqq \frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m} > \frac{1}{e} \text{ für jedes (noch so grosse) } m,$$

und somit:

$$\sum_1^n {}^{\nu}\, a_\nu\, \varrho^\nu > g_1 + \frac{1}{e} \cdot g_m \text{ bezw. } > \frac{1}{e} \cdot g_m. \tag{8}$$

Da, wegen $\lim_{m=\infty} \sigma_m = +\infty$, auch $\lim_{m=\infty} g_m = +\infty$, so kann man m so fixiren, dass g_m, also auch $g_1 + \frac{1}{e} \cdot g_m$ eine beliebig gross vorgeschriebene positive Zahl G übersteigt. Alsdann wird aber nach Ungl. (8):

$$\sum_1^n {}^{\nu}\, a_\nu\, \varrho^\nu > G \tag{9}$$

für jedes $n > m$ und jedes $\varrho \geqq \frac{m}{m+1}$. Mithin ergiebt sich:

$$\lim_{\varrho=1} \sum_1^\infty {}^{\nu}\, a_\nu\, \varrho^\nu = +\infty \tag{10}$$

und schliesslich:

$$\lim_{\varrho=1} \sum_1^\infty {}^{\nu}\, (\alpha_\nu + \beta_\nu i) \cdot \varrho^\nu = \infty, \quad \text{d. h. } \lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho) = \infty, \tag{11}$$

ohne dass über die β_ν eine weitere Voraussetzung gemacht zu werden braucht. — Analog im Falle

$$\sum_1^\infty {}^{\nu}\, \alpha_\nu = -\infty, \text{ bezw. } \sum_1^\infty {}^{\nu}\, \beta_\nu = \pm\infty. —$$

Ersetzt man wiederum noch a_ν durch $a_\nu X^\nu$, so folgt:

Ist $\sum a_\nu X^\nu$ *eigentlich* divergent, so wird:

$$\lim_{\varrho=\infty} \mathfrak{P}(\varrho X) = \infty.$$

3. Hieraus kann man zunächst den folgenden Schluss ziehen:

Besitzt für irgend eine Stelle X (auf dem Convergenzkreise) $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ einen bestimmten Werth, so kann $\sum a_\nu X^\nu$ nur *convergiren* oder *uneigentlich divergiren.*

Da aber die uneigentliche Divergenz definitiv ausgeschlossen erscheint, wenn die reellen wie die imaginären Bestandtheile der $a_\nu X^\nu$, zum mindesten von einem bestimmten Index $\nu = n$ ab, unter sich gleichbezeichnet sind, so gewinnt man den Satz:

Besitzt $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho e^{\vartheta i})$ für irgend eine Stelle $e^{\vartheta i}$ einen bestimmten Werth, und sind (zum mindesten für $\nu \geqq n$) die Terme $(\alpha_\nu \cos \nu \vartheta - \beta_\nu \sin \nu \vartheta)$ unter sich, ebenso die Terme $(\alpha_\nu \sin \nu \vartheta + \beta_\nu \cos \nu \vartheta)$ unter sich *gleichbezeichnet*, so ist $\sum a_\nu e^{\nu \vartheta i}$ *convergent.*

Dabei gestattet die auf die Vorzeichen der Reihenglieder bezügliche Bedingung noch eine kleine Verallgemeinerung, die auf der Bemerkung beruht, dass der Convergenz-Charakter einer Reihe durch Multiplication mit einem Factor von der Form $e^{\lambda i}$ in keiner Weise geändert wird. Da die Bedingung, dass die reellen, sowie imaginären Bestandtheile der $a_\nu X^\nu$ für $\nu \geqq n$ unter sich gleichbezeichnet sein sollen, geometrisch gesprochen den Sinn hat, dass die Punkte $a_\nu X^\nu$ (abgesehen von einer endlichen Anzahl) durchweg im Innern und auf der Begrenzung eines einzigen der vier von den Axen gebildeten rechten Winkel liegen, und da andererseits durch Multiplication mit $e^{\lambda i}$ jeder Punkt lediglich eine Drehung um den Winkel λ erleidet, so kann die geometrische Bedeutung jener verallgemeinerten Bedingung dahin ausgesprochen werden: die Punkte $a_\nu X^\nu$ müssen (zum mindesten für $\nu \geqq n$) im Innern und auf der Begrenzung eines durch irgend zwei vom Nullpunkte ausgehende Strahlen gebildeten rechten Winkels liegen.

4. Sieht man von dem eben betrachteten Falle ab, so muss zu der Existenz eines endlichen $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$, falls man daraus auf die Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ schliessen will, noch irgend eine andere Bedingung hinzukommen, welche in geeigneter Weise von dem Gesammtverhalten des Grenzwerthes $\lim\limits_{x=X} \mathfrak{P}(x)$ für alle möglichen X und jeden beliebigen Grenzübergang abhängen muss. Als einfachste Form einer solchen Bedingung, die sich ja auch unmittelbar als nothwendig für die Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ erweist, würde sich zunächst die Prämisse $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu \doteq 0$ ergeben. Dieselbe scheint indessen nicht hinreichend zu sein, um daraus in Verbindung mit der Existenz eines endlichen $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ die Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ zu erschliessen. Dagegen hat Herr Tauber gezeigt,[1] dass eine andere für die Convergenz von $\sum a_\nu$ nothwendige Bedingung, nämlich: $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_1^n{}^\nu \nu\, a_\nu = 0$, in Verbindung mit der hierzu gleichfalls nothwendigen Existenz eines endlichen $\lim\limits_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho)$, stets auch die Convergenz von $\sum a_\nu$ zur Folge hat. Ich möchte dieses mir bemerkenswerth erscheinende Resultat hier gleichfalls ableiten und zunächst einige auch an sich nützliche Betrachtungen voranschicken, die ich gleich etwas allgemeiner fasse, als für den Zweck des fraglichen Beweises nothwendig wäre.

5. Setzt man:

$$(12) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n = s_n, \quad 1 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + \ldots + n \cdot u_n = s_n',$$

so folgt der Satz, dass für die Existenz eines endlichen $\lim\limits_{n=\infty} s_n$, also für die Convergenz von $\sum u_\nu$, die Beziehung:

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n'}{n} = 0$$

nothwendig erscheint aus einem etwas allgemeineren, zuerst

[1] Monatsh. f. Math. und Phys. Jahrg. 8 (Wien 1897), p. 273.

von Kronecker bewiesenen[1]) Satzes (s. weiter unten Gl. (19)). Dieses Resultat lässt sich indessen auch in sehr einfacher Weise aus einem bekannten Cauchy'schen Grenzwerth-Satze[2]) ableiten. Darnach ist nämlich (mit einer unerheblichen Abweichung in der Formulirung):

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_n}{n} = \lim_{\nu=\infty} (A_n - A_{n-1}), \tag{13}$$

falls der rechts auftretende Grenzwerth existirt. Substituirt man hier:

$$\begin{aligned} A_n &= s_1 + s_2 + \ldots + s_n \\ &= n \cdot u_1 + (n-1) \cdot u_2 + \ldots + 1 \cdot u_n \end{aligned}$$

und multiplicirt die betreffende Gleichung mit:

$$\lim_{n=\infty} \frac{n}{n+1} = 1, \text{ so wird:}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n+1} (n \cdot u_1 + (n-1)\, u_2 + \ldots + 1 \cdot u_n) = \lim_{n=\infty} s_n,$$

falls $\lim\limits_{n=\infty} s_n$ überhaupt (d. h. als endlich oder in bestimmter Weise unendlich) existirt. Ist aber $\lim\limits_{n=\infty} s_n$ zugleich endlich, also $\sum u_\nu$ convergent, so kann man die letzte Gleichung durch die folgende ersetzen:

$$\lim_{n=\infty} \left\{ u_1 + u_2 + \ldots + u_n - \frac{n u_1 + (n-1) \cdot u_2 + \ldots + 1 \cdot u_1}{n+1} \right\} = 0$$

d. h. man findet (wenn man noch der Symmetrie zu Liebe den Nenner $n+1$ durch n ersetzt):

$$\lim_{n=\infty} \frac{1 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + \ldots + n \cdot u_n}{n} = \lim_{n=\infty} \frac{s_n'}{n} = 0. \tag{14}$$

Geht man statt von dem Cauchy'schen Satze (13) von dessen Stolz'scher[3]) Verallgemeinerung aus, nämlich:

$$\lim_{n=\infty} \frac{A_n}{M_n} = \lim_{n=\infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{M_n - M_{n-1}} \tag{15}$$

---

[1]) Comptes rendus, T. 103 (1886), p. 980.

[2]) Analyse algébr., p. 59.

[3]) Math. Ann. Bd. 14 (1879), p. 232. — Allg. Arithm. Bd. 1, p. 173.

(wo die M_ν mit ν monoton in's Unendliche wachsen und wiederum die Existenz des rechts auftretenden Grenzwerthes vorausgesetzt wird) und substituirt:

$$(16)\left\{\begin{aligned} &\frac{A_\nu - A_{\nu-1}}{M_\nu - M_{\nu-1}} = s_{\nu-1}, \\ \text{also: } &\lim_{n=\infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{M_n - M_{n-1}} = \lim_{n=\infty} s_{n-1} = \lim_{n=\infty} s_n, \end{aligned}\right.$$

so wird:

$$A_\nu - A_{\nu-1} = (M_\nu - M_{\nu-1}) \cdot s_{\nu-1}$$

und, wenn man $\nu = 2, 3, \ldots n$ setzt und die betreffenden Gleichungen addirt:

$$(17) \qquad A_n = A_1 + \sum_2^n {}^\nu (M_\nu - M_{\nu-1}) \cdot s_{\nu-1}.$$

Durch Einführung der Beziehungen (16), (17) in Gl. (15) nimmt daher der betreffende Grenzwerthsatz, wenn man noch beachtet, dass: $\lim_{n=\infty} \frac{A_1}{M_n} = 0$, zunächst die folgende Form an:

$$(18) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{M_n} \sum_2^n {}^\nu (M_\nu - M_{\nu-1}) \cdot s_{\nu-1} = \lim_{n=\infty} s_n,$$

sofern $\lim_{n=\infty} s_n$ überhaupt existirt. Die linke Seite dieser Gleichung lässt sich aber noch in folgender Weise transformiren:

$$\begin{aligned} \sum_2^n {}^\nu (M_\nu - M_{\nu-1}) \cdot s_{\nu-1} &= \sum_2^n {}^\nu M_\nu s_{\nu-1} - \sum_1^{n-1} {}^\nu M_\nu s_\nu \\ &= \sum_2^n {}^\nu M_\nu (s_{\nu-1} - s_\nu) - M_1 s_1 + M_n s_n \\ &= M_n s_n - \sum_1^n {}^\nu M_\nu u_\nu \end{aligned}$$

(wegen: $s_1 = u_1$ und für $\nu > 1$: $s_\nu - s_{\nu-1} = u_\nu$), sodass Gl. (18) in die folgende übergeht:

$$\lim_{n=\infty} \left(s_n - \frac{1}{M_n} \sum_1^n {}^\nu M_\nu u_\nu \right) = \lim_{n=\infty} s_n.$$

Ist jetzt wiederum noch $\lim\limits_{n=\infty} s_n$ eine bestimmte Zahl, d. h. $\sum u_\nu$ convergent, so folgt schliesslich:

$$(19) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{M_1 u_1 + M_2 u_2 + \ldots + M_n u_n}{M_n} = 0. \text{ [1]}$$

Diese Beziehung bildet also, geradeso wie die speciellere (14) eine nothwendige Bedingung für die Convergenz von $\sum u_\nu$. Dass die Bedingung (14) für die Convergenz von $\sum u_\nu$ nicht hinreichend ist, folgt unmittelbar aus der Bemerkung, dass es divergente Reihen mit positiven Termen $u_\nu \succ \nu$ giebt: so genügt z. B. die Reihe $\sum \frac{1}{\nu \cdot \lg \nu}$ der Bedingung (14), obschon sie divergirt. Was sodann die Bedingung (19) betrifft, so gelten im Falle $u_\nu > 0$ die folgenden, ohne besondere Schwierigkeit zu beweisenden Sätze:

> Wie stark auch $\sum u_\nu$ divergiren mag, so lassen sich stets monoton in's Unendliche wachsende Folgen M_ν angeben, derart dass die Relation (19) erfüllt ist.[2])
>
> Wie schwach auch $\sum u_\nu$ divergiren mag, so lassen sich stets solche M_ν angeben, für welche der Grenzwerth (19) von Null verschieden ausfällt.

Daraus folgt dann schliesslich:

> Genügen die u_ν (wo $u_\nu > 0$) bei jeder Wahl der M_ν der Beziehung (19), so ist $\sum u_\nu$ convergent.

In diesem Sinne kann also die Bedingung (19) als hinreichend für die Convergenz von $\sum u_\nu$ gelten. —

Schliesslich bemerke ich noch, dass nach dem Cauchyschen Satze Gl. (13):

$$\lim_{n=\infty} \frac{1 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + \ldots + n \cdot u_n}{n} = \lim_{n=\infty} n\, u_n,$$

---

[1]) Das ist die Kronecker'sche Bedingung, die sich noch in gewisser Weise verallgemeinern lässt. Vgl. Kronecker a. a. O. und Jensen, Comptes rendus, T. 106 (188-), p. 835.

[2]) Dieser Satz bleibt natürlich a fortiori auch für beliebige u_ν bestehen.

sobald der rechts stehende Grenzwerth existirt. Somit ist die Beziehung (14) allemal erfüllt, wenn:

$$\lim_{n=\infty} n \cdot u_n = 0 \tag{20}$$

(aber nicht umgekehrt). Entsprechend ergiebt sich aus dem verallgemeinerten Cauchy'schen Satze (Gl. (15), dass die Relation (19) sicher besteht, wenn:

$$\lim_{n=\infty} \frac{M_n}{M_n - M_{n-1}} \cdot u_n = 0 . \tag{21}$$

6. Hülfs-Satz I. Convergirt $\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu$ für $|x| < r \leqq 1$, so gelten für $|x| < r$ die Transformationen:

$$\text{(A)} \quad \mathfrak{P}(x) = (1-x) \cdot \sum_1^\infty {}^\nu s_\nu x^\nu$$

$$\text{(B)} \quad \mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot s'_\nu x^\nu + (1-x) \cdot \sum_1^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu+1} \cdot s'_\nu x^\nu$$

wo:

$$s_\nu = \sum_1^\nu {}^\lambda a_\lambda, \quad s'_\nu = \sum_1^\nu {}^\lambda \lambda \cdot a_\lambda .$$

Beweis. Die Formel (A) ist sehr bekannt, wird jedoch zumeist unter wesentlich engeren Voraussetzungen abgeleitet. Sie wird hauptsächlich, nach dem Vorgange von Dirichlet,[1]) zum Beweise des Abel'schen Grenzwerthsatzes (Gl. (1)) benützt, also unter der Voraussetzung, dass $\sum a_\nu$ convergirt, d. h. $\lim_{n=\infty} s_n$ eine bestimmte Zahl vorstellt. Da in diesem Falle offenbar $\lim_{n=\infty} s_n x^n = 0$, so resultirt die Formel (A) ohne weiteres aus der Abel'schen Transformations-Gleichung:

$$\sum_1^n {}^\nu a_\nu x^\nu = (1-x) \cdot \sum_1^{n-1} {}^\nu s_\nu x^\nu + s_n x^n , \tag{22}$$

wenn man n in's Unendliche wachsen lässt. Wird aber die obige auf $\lim s_n$ bezügliche Annahme nicht gemacht, so müsste,

[1]) Journ. de Math. (2), T. 7 (1863), p. 253. — Ges. Werke, Bd. II, p. 305.

um von Gl. (22) zur Formel (A) zu gelangen, erst feststehen, dass $\lim_{n=\infty} s_n x^n = 0$ für $|x| < r$. Dies lässt sich in der That, auf Grund der vorausgesetzten Convergenz von $\sum a_\nu x^\nu$ für $|x| < r$, ohne Schwierigkeit direkt nachweisen. Noch einfacher gelangt man jedoch, ohne den Weg über die Transformation (22) zu nehmen, zur Formel (A) mit Hülfe der unmittelbar für $|x| < r \leqq 1$ als richtig erkannten Beziehung:

$$(23) \qquad \frac{1}{1-x} \cdot \mathfrak{P}(x) = \sum_0^\infty{}^\nu x^\nu \cdot \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = \sum_1^\infty{}^\nu s_\nu x^\nu .$$

Die Vergleichung mit (22) lehrt dann zugleich, dass allemal: $\lim_{n=\infty} s_n x^n = 0$ für $|x| < r$, sofern nur die Reihe $\mathfrak{P}(x)$ einen von Null verschiedeneren Convergenz-Radius r besitzt, mag s_n im übrigen auch mit n beliebig stark in's Unendliche wachsen.

Zum Beweise der Formel (B) bemerke ich zunächst, dass gleichzeitig mit $\mathfrak{P}(x)$ auch die Reihe $x \cdot \mathfrak{P}'(x) = \sum_1^\infty{}^\nu \nu \cdot a_\nu x^\nu$ für $|x| < r$ convergirt. Daraus folgt aber auf Grund der soeben gemachten Bemerkung, dass auch:

$$(24) \qquad \lim_{n=\infty} s'_n x^n = 0, \quad x \cdot \mathfrak{P}'(x) = \sum_1^\infty{}^\nu s'_\nu x^\nu \text{ für: } |x| < r.$$

Man hat sodann:

$$s'_\nu - s'_{\nu-1} = \nu \cdot a_\nu, \quad \text{also } a_\nu = \frac{s'_\nu - s'_{\nu-1}}{\nu} \; (\nu = 2, 3, 4, \ldots.),$$

und diese Beziehungen gelten auch noch für $\nu = 1$, wenn man s'_0 die Bedeutung von 0 beilegt. Hiernach ergiebt sich:

$$\begin{aligned} \sum_1^n{}^\nu a_\nu x^\nu &= \sum_1^n{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu} \cdot x^\nu - \sum_0^{n-1}{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu+1} \cdot x^{\nu+1} \\ (25) \qquad &= \sum_1^{n-1}{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu+1} \left(\frac{\nu+1}{\nu} - x \right) \cdot x^\nu + \frac{1}{n} s'_n x^n \\ &= \sum_1^{n-1}{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu(\nu+1)} \cdot x^\nu + (1-x) \cdot \sum_1^{n-1}{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu+1} \cdot x^\nu + \frac{1}{n} \cdot s'_n \cdot x^n, \end{aligned}$$

und hieraus, mit Rücksicht auf Gl. (24) und die Convergenz von $\sum s'_\nu x^\nu$ (aus welcher a fortiori diejenige der beiden rechts auftretenden Reihen resultirt):

$$\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = \sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu(\nu+1)} \cdot s'_\nu x^\nu + (1-x) \cdot \sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu+1} \cdot s'_\nu x^\nu, \quad \text{q.e.d.}$$

Zusatz. Für $x = 1$ resultirt aus (25) die späterhin zu benützende Beziehung:

$$\sum_1^n{}^\nu a_\nu = \sum_1^{n-1}{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu(\nu+1)} + \frac{s'_n}{n}. \tag{26}$$

7. Hülfs-Satz II. Ist $\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n} = 0$ (wo wiederum: $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$), so hat man:

$$\lim_{\varrho=1} (1-\varrho) \cdot \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu \varrho^\nu = 0. \text{ [1]} \tag{27}$$

Beweis. Es ist:

$$\mathfrak{P}(\varrho) = \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu \varrho^\nu = \sum_1^n{}^\nu a_\nu \varrho^\nu + \sum_{n+1}^\infty{}^\nu a_\nu \varrho^\nu$$

$$= \sum_1^n{}^\nu a_\nu \varrho^\nu - s_n \varrho^{n+1} + \varrho^{n+1}\left(s_n + \sum_1^\infty{}^\nu a_{\nu+n} \varrho^{\nu-1}\right).$$

Da andererseits:

$$s_n + \sum_1^\infty{}^\nu a_{\nu+n} \varrho^{\nu-1} = s_{n+1} + \sum_2^\infty{}^\nu a_{\nu+n} \varrho^{\nu-1}$$

$$= (1-\varrho) \cdot \sum_1^\infty{}^\nu s_{\nu+n} \varrho^{\nu-1} \quad \text{(mit Benützung der Formel (A))}$$

$$= \frac{1}{\varrho^n}(1-\varrho) \cdot \sum_{n+1}^\infty{}^\nu s_\nu \varrho^{\nu-1},$$

so folgt:

$$\mathfrak{P}(\varrho) = \sum_1^n{}^\nu a_\nu \varrho^\nu - s_n \varrho^{n+1} + \varrho(1-\varrho) \cdot \sum_{n+1}^\infty{}^\nu s_\nu \varrho^{\nu-1}, \tag{28}$$

und daher:

$$|\mathfrak{P}(\varrho)| < \sum_1^n{}^\nu |a_\nu| + |s_n| + (1-\varrho) \cdot \sum_{n+1}^\infty{}^\nu \left|\frac{s_\nu}{\nu}\right| \cdot \nu \varrho^{\nu-1}. \tag{29}$$

---

[1]) Der Satz lässt sich leicht in folgender Weise verallgemeinern: Ist: $\lim_{\nu=\infty} \frac{s_n}{n^p} = 0$, so hat man: $\lim_{\varrho=1} (1-\varrho)^{1-p} \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu \varrho^\nu = 0$.

Wegen $\lim_{\nu=\infty} \frac{s_\nu}{\nu} = 0$ lässt sich nun zu beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ ein n so fixiren, dass:

$$\left| \frac{s_\nu}{\nu} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für: } \nu > n,$$

also, wenn man Ungl. (29) noch mit $(1-\varrho)$ multiplicirt:

$$|(1-\varrho)\cdot\mathfrak{P}(\varrho)| < (1-\varrho)\cdot\left\{\sum_1^n{}^\nu |a_\nu| + |s_n|\right\} + (1-\varrho)^2\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\sum_{n+1}^\infty \nu\,\varrho^{\nu-1}.$$

Da aber:

$$\sum_{n+1}^\infty{}^\nu \nu\,\varrho^{\nu-1} < \sum_1^\infty{}^\nu \nu\,\varrho^{\nu-1} = \frac{1}{(1-\varrho)^2},$$

so resultirt aus der letzten Ungleichung die folgende:

$$(30) \qquad |(1-\varrho)\cdot\mathfrak{P}(\varrho)| < (1-\varrho)\cdot\left\{\sum_1^n{}^\nu |a_\nu| + s_n\right\} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wird jetzt ϱ so eingeschränkt, dass:

$$(31) \qquad (1-\varrho)\cdot\left\{\sum_1^n{}^\nu |a_\nu| + s_n\right\} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{d. h. } \varrho > 1 - \frac{\varepsilon}{2\left(s_n + \sum_1^n{}^\nu |a_\nu|\right)} \quad (\text{aber} < 1),$$

so ergiebt sich:

$$(32) \qquad |(1-\varrho)\cdot\mathfrak{P}(\varrho)| < \varepsilon,$$

und, da ε jede noch so kleine Zahl > 0 bedeuten kann, schliesslich:

$$\lim_{\varrho=1} |(1-\varrho)\,\mathfrak{P}(\varrho)| = 0. \;-$$

Zusätze. (a) Ersetzt man wiederum a_ν durch $a_\nu X^\nu$, wo $|X| = 1$, so folgt:

Ist:

$$(33) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n}{n} = 0,$$

so hat man:

(34) $\lim_{\varrho=1}(1-\varrho)\cdot\mathfrak{P}(\varrho X)=\lim_{\varrho=1}(X-\varrho X)\cdot\mathfrak{P}(\varrho X)=0.$

(b) Die Bedingung (33) ist offenbar für jedes X mit dem absoluten Betrage $|X|=1$ erfüllt, wenn:

(35) $$\lim_{n=\infty}\frac{|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|}{n}=0.$$

In diesem Falle gilt also auch die Relation (34) für jedes X.

(c) Ist $\lim_{n=\infty} a_n=0$, so besteht (nach dem Cauchy'schen Satze, Gl. (13)) allemal auch die Beziehung (35) und somit wiederum auch Gl. (34) für jedes X.

8. Nunmehr beweise ich den oben erwähnten Satz des Herrn Tauber in der folgenden Fassung:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Convergenz von $\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu$ besteht in den beiden Beziehungen:

(I) $\lim_{\varrho=1}\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu\,\varrho^\nu=A$ (d. h. gleich einer bestimmten Zahl)

(II) $\lim_{n=\infty}\frac{s_n'}{n}=0$ (wo: $s_n'=1\cdot a_1+2\cdot a_2+\ldots+n\cdot a_n$).

Beweis. Die Nothwendigkeit der Bedingung (I) folgt aus der Stetigkeit der Potenzreihe, diejenige der Bedingung (II) aus Gl. (14), p. 44.

Um zu zeigen, dass diese Bedingungen auch hinreichen, transformire ich zunächst $\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu\,\varrho^\nu$ mit Hülfe der Formel (B) p. 47, also:

$$\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu\,\varrho^\nu=\sum_1^\infty{}^\nu\frac{s_\nu'}{\nu\cdot(\nu+1)}\cdot\varrho^\nu+(1-\varrho)\cdot\sum_1^\infty{}^\nu\frac{s_\nu'}{\nu+1}\cdot\varrho^\nu.$$

Lässt man ϱ gegen 1 convergiren, so folgt mit Benützung der Voraussetzung (I) und des Hülfssatzes II (dessen Anwendbarkeit aus dem Zusatze c) und der Voraussetzung (II) folgt):

(36)
$$A = \lim_{\varrho=1} \sum_1^\infty{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \varrho^\nu.$$

Da es hierbei gleichgültig ist, welche Folge monoton gegen 1 zunehmender Zahlenwerthe ϱ durchläuft, so hat man speciell:

(37)
$$\begin{aligned} A &= \lim_{n=\infty} \sum_1^\infty{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu \\ &= \lim_{n=\infty} \sum_1^n{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu(\nu+1)} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu + \lim_{n=\infty} \sum_{n+1}^\infty{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu(\nu+1)} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu. \end{aligned}$$

In Folge der Voraussetzung (II) kann man zu beliebig kleinem $\varepsilon > 0$ ein n so fixiren, dass $\left|\frac{s'_\nu}{\nu}\right| < \varepsilon$ für $\nu > n$, also:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n+1}^\infty{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu(\nu+1)} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu \right| &< \frac{\varepsilon}{n+1} \cdot \sum_{n+1}^\infty{}^\nu \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu \\ &< \frac{\varepsilon}{n+1} \cdot \sum_1^\infty{}^\nu \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu = \frac{n}{n+1} \cdot \varepsilon, \end{aligned}$$

d. h. es ist:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{n+1}^\infty{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu = 0,$$

und man kann in Folge dessen die Beziehung (37) durch die folgende (nur noch von einem Grenzübergange abhängige) ersetzen:

(38)
$$A = \lim_{n=\infty} \sum_1^n{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu.$$

Man hat nun ferner, mit Benützung von Gl. (26)

(39)
$$s_n = \sum_1^n{}^\nu a_\nu = \sum_1^n{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} + \frac{s'_n}{n}$$

und daher in Folge der Voraussetzung (II) und Gl. (38):

(40)
$$\lim_{n=\infty} (s_n - A) = \lim_{n=\infty} \sum_1^n{}^\nu \frac{s'_\nu}{\nu \cdot (\nu+1)} \cdot \left\{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\nu\right\}.$$

Da aber:

$$0 < 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\nu} < \frac{\nu}{n} \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

so wird:

$$\left| \sum_1^n {}^{\nu} \frac{s'_\nu}{\nu \cdot (\nu + 1)} \cdot \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\nu} \right\} \right| < \frac{1}{n} \cdot \sum_1^n {}^{\nu} \left| \frac{s'_\nu}{\nu + 1} \right| < \frac{1}{n} \sum_1^n {}^{\nu} \left| \frac{s'_\nu}{\nu} \right|,$$

und da mit Rücksicht auf die Voraussetzung (II) und den Cauchy'schen Satz (Gl. (13)):

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_1^n {}^{\nu} \left| \frac{s'_\nu}{\nu} \right| = 0,$$

so geht Gl. (40) schliesslich in die folgende über:

$$(41) \qquad \lim_{n=\infty} (s_n - A) = 0,$$

d. h. man findet:

$$(42) \qquad \sum_1^\infty {}^{\nu} a_\nu = A,$$

womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist.

9. Substituirt man wiederum $a_\nu X^\nu$ für a_ν, so nimmt der eben bewiesene Satz die folgende Form an:

> Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Convergenz der Potenzreihe $\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty {}^{\nu} a_\nu x^\nu$ für irgend eine Stelle $x = X$, besteht in der Existenz eines endlichen $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ und der Beziehung:

$$(43) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} (1 \cdot a_1 X + 2 \cdot a_2 X^2 + \ldots + n \cdot a_n X^n) = 0.$$

Ist insbesondere $\lim_{n=\infty} n \cdot a_n = 0$, also auch: $\lim_{n=\infty} n \cdot |a_n| = 0$, so hat man (s. die Bemerkung am Schlusse von Nr. 5, Gl. (20)) auch:

$$(44) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} (1 \cdot |a_1| + 2 \cdot |a_2| + \ldots + n \cdot |a_n|) = 0,$$

und somit besteht in diesem Falle die Beziehung (43) für jedes X mit dem absoluten Betrage $|X| = 1$. Man gewinnt daher schliesslich noch den folgenden Satz:

> Ist $\lim_{n=\infty} n \cdot a_n = 0$, so convergirt $\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu$ für *jede* Stelle X mit dem absoluten Betrage 1, für welche $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ einen endlichen Werth besitzt.

Es läge nahe aus den Sätzen in Nr. 8 und 9 durch Einführung der bekannten Integral-Form für die Coefficienten a_ν Convergenz-Bedingungen abzuleiten, welche lediglich von der Beschaffenheit der durch die Gleichung $f(x) = \lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ definirten Randfunction (vgl. den folgenden Paragraphen) abhängen. Es ist mir indessen nicht gelungen, auf diesem Wege weitere Bedingungen zu erhalten, als diejenigen, welche aus der Theorie der Fourier'schen Reihen bereits bekannt sind.

---

§ 2. Ein Kriterium für die absolute Convergenz einer Potenzreihe auf dem Convergenz-Kreise.

1. Es sei wiederum:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu \tag{1}$$

eine Potenzreihe mit dem Convergenz-Radius $|x| = 1$. Dieselbe definirt dann zunächst für $|x| < 1$ eine eindeutige und stetige Function von x, die mit $f(x)$ bezeichnet werden möge. Für die Stellen $X = e^{\vartheta i}$ auf dem Convergenz-Kreise soll sodann $f(x)$ definirt werden durch die Beziehung:

$$f(X) = \lim_{\varrho=1} f(\varrho X) = \lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X), \tag{2}$$

wo ϱ, wie früher, stets eine positive reelle Zahl, kleiner als 1 bedeutet. Für solche Stellen X, für welche ein (endlicher oder unendlich grosser) $\lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ nicht existirt,

mag $f(X)$ als undefinirt gelten. Die auf diese Weise für alle Stellen $|x| \leqq 1$ mit Ausnahme etwaiger Stellen der letztgenannten Art eindeutig definirte Function $f(x)$ soll schlechthin die zur Reihe $\mathfrak{P}(x)$ zugehörige Function und speciell $f(X)$ die zugehörige Randfunction heissen.

Es ist ohne weiteres klar, dass überall, wo $\mathfrak{P}(X)$ convergirt, die Beziehung $f(X) = \mathfrak{P}(X)$ besteht (nach dem Abelschen Satze), und dass an allen Stellen X, über welche hinaus eine analytische Fortsetzung von $\mathfrak{P}(x)$ existirt, $f(X)$ mit dieser analytischen Fortsetzung zusammenfällt. Ist ferner $\mathfrak{P}(x)$ die Reihen-Entwickelung eines gegebenen arithmetischen Ausdruckes $F(x)$, für welchen $F(X) = \lim\limits_{\varrho=1} F(\varrho X)$, so hat man offenbar $f(x) = F(x)$, $f(X) = F(X)$. In diesem Falle lässt sich im allgemeinen das Verhalten der Randfunction $f(X)$ aus der Natur des arithmetischen Ausdruckes $F(x)$ genau beurtheilen, und es handelt sich nun darum, aus diesem Verhalten bestimmte Schlüsse auf die Convergenz der Reihe $\sum a_\nu X^\nu$ zu ziehen. Hierzu ist vor allem erforderlich, dass die Reihe $\sum a_\nu X^\nu$ mit der Fourier'schen Reihe für $f(X)$ sich identisch erweist, was bekanntlich keineswegs ohne weiteres der Fall zu sein braucht, auch wenn für $f(X)$ wirklich eine convergente Fourier'sche Reihe existirt.

Wie ich bei früherer Gelegenheit gezeigt habe,[1]) basirt aber das etwaige Zusammenfallen von $\sum a_\nu X^\nu$ mit der Fourierschen Reihe für $f(X)$ nicht allein auf der Beschaffenheit dieser Randfunction, d. h. auf dem Verhalten von $\lim\limits_{\varrho=1} f(\varrho \cdot e^{\vartheta i})$ als Function der reellen Veränderlichen ϑ, vielmehr auf dem Verhalten von $f(x)$ in der Umgebung der Stellen X — wobei unter der „Umgebung" einer solchen Stelle X immer nur derjenige Theil der Gesammt-Umgebung zu verstehen ist, welcher dem Inneren und der Peripherie des Einheitskreises angehört.

---

[1]) Sitz.-Ber. Bd. 25 (1895), p. 346 ff.

2. Zur Kennzeichnung der eigenthümlichen Eventualitäten, welche bezüglich des Verhaltens von $f(x)$ in der Umgebung der Stellen X thatsächlich eintreten können, bemerke ich, dass aus der Stetigkeit von $f(x)$ längs eines etwa von den Punkten $X_0 = e^{\vartheta_0 i}$, $X_1 = e^{\vartheta_1 i}$ begrenzten Einheitskreis-Bogens und auf jedem Radius $\overline{OX'}$, wo X' jeden beliebigen Punkt jenes Bogens bedeutet,[1] noch keineswegs folgt, dass $f(x)$ in der Umgebung einer solchen Stelle X' stetig sein müsse oder dass daselbst auch nur $|f(x)|$ unter einer endlichen Grenze bleibe. Die hierin ausgesprochene Thatsache, dass nämlich aus der Stetigkeit einer (für ein zweidimensionales Continuum definirten) Function in zwei auf einander senkrechten Richtungen noch keineswegs deren Gebiets-Stetigkeit (im üblichen Sinne) resultirt, ist zwar für Functionen zweier reeller Variabeln längst bekannt.[2] Dass dieselbe aber auch an den Grenzstellen analytischer Functionen einer complexen Veränderlichen vorkommen kann, ist meines Wissens bisher nicht bemerkt worden, und es mag daher nicht überflüssig erscheinen, die fragliche Erscheinung durch ein einfaches Beispiel zu illustriren.

Es sei zunächst für $|x| < 1$:

$$f(x) = e^{-\left(\frac{1}{x-1}\right)^4}.$$

Für jedes von 1 verschiedene $X = e^{\vartheta i}\ (-\pi \leqq \vartheta \leqq +\pi)$, also für jedes von 0 verschiedene ϑ hat man auf Grund der zur Definition der Randfunction gegebenen Festsetzung:

$$f(e^{\vartheta i}) = \lim_{\varrho=1} e^{-\left(\frac{1}{\varrho e^{\vartheta i}-1}\right)^4} = e^{-\left(\frac{1}{e^{\vartheta i}-1}\right)^4},$$

und wegen:

---

[1]) Die Stetigkeit von $f(X')$ in der Richtung des Radius, ist allemal da vorhanden, wo ein bestimmtes endliches $f(X')$ überhaupt existirt, da ja die definirende Existenz-Bedingung $f(X') = \lim_{\varrho=1} f(\varrho X')$ mit der betr. Stetigkeits-Bedingung zusammenfällt.

[2]) Vgl. Encyklopädie der Math. Wissensch. Bd. II, p. 48, Fussn. 254.

$$e^{\vartheta i} - 1 = e^{\frac{1}{2}\vartheta i}\left(e^{\frac{1}{2}\vartheta i} - e^{-\frac{1}{2}\vartheta i}\right) = 2i \cdot e^{\frac{1}{2}\vartheta i} \sin\frac{\vartheta}{2},$$

schliesslich:

$$f(e^{\vartheta i}) = e^{-\frac{1}{16}\cdot\frac{\cos 2\vartheta - i\sin 2\vartheta}{(\sin\frac{1}{2}\vartheta)^4}}$$

(für jedes ϑ ausser $\vartheta = 0$). Ferner wird:

$$f(1) = \lim_{\varrho=1} e^{-\left(\frac{1}{\varrho - 1}\right)^4} = 0,$$

und andererseits auch:

$$\lim_{\vartheta=0} f(e^{\vartheta i}) = 0,$$

sodass also $f(x)$ nicht nur für jede von $x = 1$ verschiedene Stelle, sondern auch noch für $x = 1$ in der Richtung des betreffenden Radius und längs der Peripherie stetig ist.

Zieht man jetzt aber solche Stellen x in Betracht, welche auf der die Punkte i und 1 verbindenden Geraden liegen, d. h. setzt man:

$$x = \xi + (1 - \xi)\cdot i \quad (0 < \xi < 1),$$

so folgt:

$$x - 1 = (\xi - 1)(1 - i),$$

und (wegen $(1 - i)^4 = -4$):

$$f(x) = e^{+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\xi - 1}\right)^4},$$

sodass also $f(x)$ für $\lim \xi = 1$, d. h. wenn x auf der Geraden $\overline{i\,1}$ der Stelle $x = 1$ zustrebt, unendlich gross (von unendlich hoher Ordnung) wird.

Die Function $f(x) = e^{-\left(\frac{1}{x-1}\right)^4}$ ist also für keine noch so kleine Umgebung der Stelle $x = 1$ stetig oder auch nur endlich,[1]) obschon sie auf jedem Radius und längs der Peripherie ausnahmslos stetig ist.

---

[1]) D. h. absolut genommen unter einer festen positiven Zahl bleibend.

Da man sich im übrigen solche Stellen, wie sie die eben betrachtete Function für $x = 1$ besitzt, auf dem Einheitskreise beliebig condensirt denken kann, so ist sogar die Möglichkeit vorhanden, dass eine im Einheitskreise convergirende Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ eine auf jedem Radius und längs der gesammten Peripherie endliche und stetige Randfunction $f(X) = \lim_{\varrho=1} \mathfrak{P}(\varrho X)$ besitzt, ohne dass $f(x)$ in der Umgebung irgend einer einzigen Stelle X stetig ist oder auch nur endlich bleibt.

3. Die Uebereinstimmung von $\sum a_\nu X^\nu$ mit der Fourier-schen Reihe für $f(X)$ hängt wesentlich und ausschliesslich davon ab, dass die Gleichung:

$$\sum_1^\infty{}_\nu\, a_\nu x^\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C_\varrho)} \frac{f(t)}{t-x} \cdot dt \quad (|x| < \varrho), \tag{3}$$

wo C_ϱ einen um den Nullpunkt beschriebenen Kreis mit dem Radius ϱ bedeutet, noch richtig bleibt, wenn man diesen Integrations-Kreis durch den Einheitskreis C_1 ersetzt. Hierzu wäre offenbar hinreichend, dass $f(X)$ für jede einzelne Stelle X einen bestimmten endlichen Werth besitzt und $f(\varrho X)$ bei $\lim \varrho = 1$ durchweg gleichmässig gegen den betreffenden Werth $f(X)$ convergirt. Kann nun aber auch schon das Vorhandensein einer einzigen Stelle X', für welche die eben genannte Bedingung nicht erfüllt, die Existenz der Gleichung (3) für $\varrho = 1$ hinfällig machen, selbst wenn $f(X')$, wie in dem Beispiele von Nr. 2, einen bestimmten, den benachbarten Randwerthen stetig sich anschliessenden Werth besitzt, so ist andererseits jene Bedingung doch sehr weit davon entfernt, eine nothwendige zu sein, da sogar dann, wenn sie für unendlich viele Stellen X' nicht erfüllt ist, noch die Möglichkeit besteht, in der Gleichung (3) C_ϱ durch C_1 zu ersetzen. Diese Möglichkeit beruht nämlich (abgesehen von gewissen, sogleich anzugebenden Einschränkungen) nicht sowohl auf der Anzahl der etwaigen Ausnahmestellen X', als vielmehr auf dem besonderen Verhalten von $f(x)$ in der Umgebung jener

Stellen X'. In dieser Hinsicht sind folgende zwei Eventualitäten vorhanden:

(I) $|f(x)|$ bleibt in der Umgebung von X' durchweg unter einer endlichen Grenze. Wie ich in der oben citirten Abhandlung gezeigt habe,[1]) wird durch das Auftreten einer solchen Stelle die Möglichkeit, in Gl. (3) den Integrationsweg C_ϱ durch C_1 zu ersetzen in keiner Weise alterirt (gleichgültig, ob $f(X')$ selbst einen bestimmten Werth besitzt oder nicht). Das gleiche gilt dann auf Grund bekannter Methoden der Integral-Theorie auch dann noch, wenn Stellen X' der bezeichneten Art, eine unausgedehnte Menge bilden.

(II) $|f(x)|$ nimmt in der Umgebung von X' beliebig grosse Werthe an (wobei es wiederum gleichgültig ist, ob $f(X')$ einen endlichen oder unendlich grossen Werth besitzt oder überhaupt nicht definirt ist). Auch in diesem Falle bleibt Gl. (3) noch für den Integrationsweg C_1 gültig, wenn $f(x)$ bis an die Stelle X' absolut integrabel ist, sobald der Integrationsweg dem Innern oder der Peripherie des Einheitskreises angehört, d. h. wenn das Integral $\int_{x_0}^{X'} |f(x)| \cdot dx$ für jeden solchen Weg gleichzeitig mit der Länge dieses Weges beliebig klein wird. Dieses zunächst für den Fall einer solchen Stelle geltende Resultat bleibt dann wiederum noch bestehen, wenn Stellen X' der bezeichneten Art eine reductible Menge bilden.[2])

Wenn nun $f(\varrho X)$ im allgemeinen, d. h. höchstens mit den soeben sub (I) und (II) als zulässig statuirten Ausnahmen, für $\lim \varrho = 1$ gleichmässig gegen die endlichen Randwerthe $f(X)$ convergirt, so wollen wir den hierdurch definirten Charakter von $f(x)$ durch den Ausdruck bezeichnen: Es sei $f(x)$ und $|f(x)|$ in und auf dem Einheitskreise gleichmässig integrabel. In diesem Falle darf man dann die Gleichung (3) auch durch die folgende ersetzen:

---

[1]) a. a. O. p. 346.

[2]) Vgl. Harnack, Math. Ann. Bd. 24 (1884), p. 224.

$$(4) \quad \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C_1)} \frac{f(t)}{t-x}\cdot dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{f(e^{\vartheta i})\cdot e^{\vartheta i}}{e^{\vartheta i}-x}\cdot d\vartheta \quad (|x|<1),$$

woraus dann weiter folgt, dass:

$$(5) \qquad a_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{\vartheta i})\cdot e^{-\nu\vartheta i}\cdot d\vartheta .$$

Da andererseits zunächst:

$$\int_{(C_\varrho)} f(t)\cdot t^{\nu-1}\cdot dt = 0 \quad \text{für jedes } \varrho<1 \text{ und } \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

und in Folge der vorausgesetzten gleichmässigen Integrabilität von $f(x)$ und $|f(x)|$ auch:

$$\int_{(C_1)} f(t)\cdot t^{\nu-1}\cdot dt = \lim_{\varrho=1}\int_{(C_\varrho)} f(t)\cdot t^{\nu-1}\cdot dt = 0,$$

also:

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{\vartheta i})\cdot e^{\nu\vartheta i}\cdot d\vartheta ,$$

so folgt, wenn man diese letzte Gleichung einmal zu Gl. (5) addirt, das andere Mal davon subtrahirt:

$$(6) \qquad a_\nu = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{\vartheta i})\cdot \cos\nu\vartheta\cdot d\vartheta \\ \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(e^{\vartheta i})\cdot \sin\nu\vartheta\cdot d\vartheta , \end{cases}$$

d. h. die Reihe $\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu\cdot e^{\nu\vartheta i}$ ist mit der Fourier'schen Reihe für $f(e^{\vartheta i})$ identisch.

4. Mit Hülfe dieses Ergebnisses und der Zerlegung:

$$\begin{aligned}\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu e^{\nu\vartheta i} &= \sum_1^\infty{}^\nu (\alpha_\nu + \beta_\nu i)(\cos\nu\vartheta + i\cdot\sin\nu\vartheta) \\ &= \sum_1^\infty{}^\nu (\alpha_\nu\cos\nu\vartheta - \beta_\nu\sin\nu\vartheta) + i\sum_1^\infty{}^\nu (\beta_\nu\cos\nu\vartheta + \alpha_\nu\sin\nu\vartheta)\end{aligned}$$

könnte man aus einem von Harnack[1]) bewiesenen Satze erschliessen, dass die Reihe $\sum (\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2)$, also: $\sum |a_\nu|^2$ convergirt, sobald zu den bereits gemachten Voraussetzungen noch die weitere hinzukommt, dass auch $|f(e^{\vartheta i})|^2$, d. h. $|f(X)|^2$ längs des Einheitskreises, integrabel ist.

Man kann indessen dieses Resultat mit den hier zu Gebote stehenden Hülfsmitteln in etwas einfacherer Weise ableiten, wenn man statt der gleichmässigen Integrabilität von $|f(x)|$ von vornherein diejenige von $|f(x)|^2$ voraussetzt.

Man hat für $\varrho < 1$:

$$\sum_1^\infty{}^\nu (\alpha_\nu + \beta_\nu i) \cdot \varrho^\nu \cdot e^{\nu\vartheta i} = f(\varrho \cdot e^{\vartheta i}), \tag{7}$$

und wenn

$$\sum_1^\infty{}^\nu (\alpha_\nu - \beta_\nu i) \cdot x^\nu = \overline{f(x)} \quad (|x| < 1)$$

gesetzt wird:

$$\sum_1^\infty{}^\nu (\alpha_\nu - \beta_\nu i) \cdot \varrho^\nu \cdot e^{-\nu\vartheta i} = \overline{f(\varrho \cdot e^{-\vartheta i})}. \tag{8}$$

Berücksichtigt man, dass:

$$f(\varrho \cdot e^{\vartheta i}) \cdot \overline{f(\varrho \cdot e^{-\vartheta i})} = |f(\varrho \cdot e^{\vartheta i})|^2,$$

so ergiebt sich durch Multiplication der Gleichungen (7) und (8):

$$\sum_1^\infty{}^\nu (\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2) \cdot \varrho^{2\nu} + \sum_1^\infty{}^\nu \sum_1^\infty{}'^\mu (\alpha_\mu + \beta_\mu i)(\alpha_\nu - \beta_\nu i) \varrho^{\mu+\nu} \cdot e^{(\mu-\nu)\cdot\vartheta i} = |f(\varrho \cdot e^{\vartheta i})|^2, \tag{9}$$

wobei der Accent bei dem Doppelsummen-Zeichen ausdrücken soll, dass die Combination $\mu = \nu$ wegzulassen ist. Da nun:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{(\mu-\nu)\cdot\vartheta i} \cdot d\vartheta = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3, \ldots \mu \gtrless \nu),$$

so folgt aus (9) durch Multiplication mit $d\vartheta$ und Integration in den Grenzen $-\pi$ bis $+\pi$:

---

[1]) Math. Ann. Bd. 19 (1882), p. 255. — Serret-Harnack, Differential- und Integral-Rechnung, Bd. II, 1 (1885), p. 346.

$$(10) \qquad 2\pi \cdot \sum_1^\infty{}^\nu |a_\nu|^2 \cdot \varrho^{2\nu} = \int_{-\pi}^{+\pi} |f(\varrho \cdot e^{\vartheta i})|^2 \cdot d\vartheta.$$

Da ferner, in Folge der vorausgesetzten gleichmässigen Integrabilität von $|f(\varrho \cdot e^{\vartheta i})|$:

$$\lim_{\varrho=1} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(\varrho \cdot e^{\vartheta i})|^2 \cdot d\vartheta = \int_{-\pi}^{+\pi} |f(e^{\vartheta i})|^2 \cdot d\vartheta,$$

so findet man zunächst:

$$\lim_{\varrho=1} \sum_1^\infty{}^\nu |a_\nu|^2 \cdot \varrho^{2\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(e^{\vartheta i})|^2 \cdot d\vartheta$$

und, da die betreffende Reihe ausschliesslich positive Glieder enthält, mit Rücksicht auf Nr. 3 des § 1, schliesslich:

$$(11) \qquad \sum_1^\infty{}^\nu |a_\nu|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(e^{\vartheta i})|^2 \cdot d\vartheta,$$

sodass also $\sum |a_\nu|^2$ als convergent erkannt wird.

Es besteht somit der folgende Satz:

Ist die zur Potenzreihe $\sum a_\nu x^\nu$ zugehörige Function $f(x)$ nebst dem Quadrate ihres absoluten Betrages *in* und *auf* dem Convergenzkreise $|x| = 1$ gleichmässig integrabel,[1]) so convergirt die Reihe $\sum |a_\nu|^2$.

5. Um aus diesem Resultate weitere Schlüsse zu ziehen, formuliren wir zunächst den folgenden Hülfssatz:

---

[1]) Setzt man voraus, dass $|f(x)|$ für $|x| \leqq 1$ durchweg unter einer endlichen Grenze bleibt, so folgt aus der gleichmässigen Integrabilität von $f(x)$ schon eo ipso diejenige von $|f(x)|$ und $|f(x)|^2$. In diesem Falle kann man auch statt der Integrale die von mir zur Darstellung der Mac Laurin'schen Reihen-Coefficienten angewendeten Mittelwerthe (vgl. Sitz.-Ber. Bd. 25 (1895), p. 92; Math. Ann. Bd. 47 (1896), p. 137) einführen und das betreffende Resultat, mit Beibehaltung der im Texte benützten Schlussweise, lediglich mit den Hülfs-Mitteln der elementaren Functionen-Theorie ableiten.

Ist $\sum |a_\nu|^2$ convergent und bedeutet $\sum C_\nu^{-1}$ irgend eine convergente Reihe mit positiven Termen, so convergirt auch die Reihe $\sum C_\nu^{-\frac{1}{2}} \cdot |a_\nu|$.[1])

Derselbe ist lediglich eine besondere Form des auf der bekannten Ungleichung:

$$\sqrt{p_\nu \cdot q_\nu} \leqq \tfrac{1}{2}(p_\nu + q_\nu) \quad (p_\nu > 0,\ q_\nu > 0)$$

beruhenden, schon bei anderer Gelegenheit[2]) von mir benützten Satzes, dass aus der Convergenz der beiden Reihen $\sum p_\nu$, $\sum q_\nu$ stets diejenige von $\sum \sqrt{p_\nu \cdot q_\nu}$ resultirt.

Aus dem obigen Hülfssatze folgt dann, dass unter den bezüglich der Beschaffenheit von $f(x)$ gemachten Voraussetzungen jede Reihe von der Form $\sum C_\nu^{-\frac{1}{2}} \cdot |a_\nu|$, z. B. $\sum \frac{|a_\nu|}{\nu^{\frac{1}{2}+\varepsilon}}$, $\sum \frac{|a_\nu|}{\sqrt{\nu} \cdot \lg \nu}$ etc. convergiren muss.

Angenommen nun, es gehöre zu der Potenzreihe:

$$\text{(12)} \qquad \mathfrak{P}'(x) = \sum_1^\infty {}^\nu\, \nu\, a_\nu \cdot x^{\nu - 1}$$

eine Function $f_1(x)$, welche, ebenso wie $|f_1(x)|^2$, in und auf dem Einheitskreise gleichmässig integrabel ist, so ergiebt sich aus dem Satze der vorigen Nummer zunächst die Convergenz von $\sum \nu^2 \cdot |a_\nu|^2$ und somit auf Grund des obigen Hülfssatzes diejenige jeder Reihe von der Form $\sum C_\nu^{-\frac{1}{2}} \cdot \nu \cdot |a_\nu|$,

z. B. $$\sum \nu^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \cdot |a_\nu|, \quad \sum \frac{\sqrt{\nu}}{\lg \nu} \cdot |a_\nu|.$$

Daraus folgt dann a fortiori, dass $\sum |a_\nu|$ convergirt und somit $\sum a_\nu x^\nu$ auf dem ganzen Einheitskreise absolut convergent ist.

---

[1]) Unrichtig wäre es, mit Harnack (Math. Ann. a. a. O.) aus der Convergenz von $\sum |a_\nu|^2$ auf das Verschwinden von $\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot |a_\nu|^2$ schliessen zu wollen (vgl. meine Bemerkungen Math. Ann. Bd. 35 (1890), p. 343 ff.).

[2]) Sitz.-Ber. Bd. 29 (1899), p. 263.

Die der Function $f_1(x)$ auferlegten Bedingungen sind aber sicher erfüllt, wenn die zu $\mathfrak{P}(x) = \sum a_\nu x^\nu$ gehörige Function $f(x)$ eine Derivirte $f'(x)$ besitzt, welche in der Umgebung[1]) der Peripherie-Stellen X im allgemeinen[2]) stetig ist und deren Quadrat höchstens für eine reductible Menge von Stellen X' von der Ordnung $1 - \varepsilon$ oder doch von einer „hinlänglich"[3]) niedrigeren, als der ersten

$$\left(\text{z. B. wie } \frac{1}{x}\left(\lg\frac{1}{x}\right)^{-(1+\varepsilon)} \text{ etc. bei } x = 0\right)$$

unendlich wird. Denn für $|x| < 1$ hat man ohne weiteres $f_1(x) = f'(x)$ und sodann auf Grund der in Nr. 1 getroffenen Festsetzungen: $f_1(X) = \lim_{\varrho=1} f'(\varrho X) = f'(X)$. Man gewinnt auf diese Weise den folgenden Satz:

> Besitzt die zur Potenzreihe $\sum a_\nu x^\nu$ gehörige Function $f(x)$ eine in der Umgebung der Convergenzkreis-Stellen noch im allgemeinen stetige Derivirte, deren *Quadrat* höchstens für eine reductible Menge solcher Stellen von hinlänglich niedrigerer Ordnung als der *ersten* unendlich wird, so ist $\sum a_\nu x^\nu$ noch auf dem Convergenzkreise *absolut convergent.*

6. Dieses Kriterium ist von erheblich grösserer Tragweite, als das bekannte, auf einer gelegentlichen Bemerkung des Herrn Lipschitz[4]) beruhende, welches die ausnahmslose Stetigkeit der ersten und ausserdem noch die eindeutige Existenz und Endlichkeit der zweiten Derivirten fordert.

---

[1]) Diese Bezeichnung ist wiederum nur in dem am Schlusse von Nr. 1 definirten Umfange zu verstehen.

[2]) D. h. mit eventueller Ausnahme einer unausgedehnten Menge, für welche $f'(X)$ endlich-unstetig wird, bezw. nicht existirt, aber in der Umgebung endlich bleibt.

[3]) D. h. in der Weise, dass $|f'(x)|^2$ integrabel bleibt.

[4]) Lehrbuch der Analysis, Bd. II, p. 492. Vgl. auch Math. Ann. Bd. 25 (1885), p. 425.

Die Convergenz-Theorie der Fourier'schen Reihen würde auf Grund der über $f'(x)$ gemachten Voraussetzungen nur den Schluss gestatten,[1]) dass $\sum a_\nu x^\nu$ auf dem Convergenzkreise noch ausnahmslos convergirt.[2]) Daraus folgt aber noch keineswegs die absolute Convergenz dieser Reihe, wie im folgenden Paragraphen noch des näheren erörtert wird.

Das nämliche Resultat würde sich auch aus dem Satze am Schlusse von § 1 (p. 54) ergeben, wenn man berücksichtigt, dass aus der Integral-Darstellung der a_ν (Gl. (6)) durch partielle Integration (welche wegen der über $f'(x)$ gemachten Voraussetzungen gestattet ist) sich ergiebt:

$$a_\nu = \frac{1}{\nu\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f'(e^{\vartheta i}) \cdot \sin \nu\vartheta \cdot d\vartheta$$

und daher:

$$\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot a_\nu = 0. —$$

Einen Schluss auf die absolute Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ gestattet dagegen ein von Heine[3]) mitgetheilter Satz über die Art des Verschwindens der Fourier'schen Reihen-Coefficienten bei unendlich wachsendem Index. Darnach würde aus der Voraussetzung, dass $f'(e^{\vartheta i})$ nur von niedrigerer Ordnung als der $\frac{1}{2}$-ten unendlich werden darf, folgen, dass $\lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{3}{2}} \cdot a_\nu = 0$, woraus dann ohne weiteres die absolute Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ hervorgeht. Der betreffende Satz gilt indessen nur für den Fall, dass $f'(e^{\vartheta i})$ der Dirichlet'schen Bedingung genügt. Zwar behauptet Heine ausdrücklich seine Gültig-

---

1) S. z. B. Serret-Harnack a. a. O., p. 353. Um das betreffende Resultat anzuwenden, hat man nur zu beachten, dass aus:

$$f(e^{\vartheta i}) = F(\vartheta)$$

sich ergiebt:

$$F'(\vartheta) = i \cdot e^{\vartheta i} \cdot f'(e^{\vartheta i}).$$

2) Dabei bliebe übrigens Schlussweise und Resultat noch gültig, wenn $f'(x)$ selbst (nicht erst $f'(x)^2$) in der angegebenen Art unendlich wird.

3) Handbuch der Kugelfunctionen, Zweite Auflage, Bd. I, p. 63.

keit auch für den Fall, dass die Function an einzelnen Stellen, wo sie nicht unendlich wird, unendlich viele Maxima und Minima besitzt. Sein Beweis aber, wenn ich ihn anders richtig verstehe, scheint mir diesen Fall nicht zu umfassen, und ich möchte sogar den Satz selbst alsdann für unrichtig halten. Gerade durch das Auftreten unendlich vieler Maxima und Minima wird die Regelmässigkeit in der Abnahme der Reihencoefficienten im allgemeinen zerstört, und es tritt eben an die Stelle der Beziehung $\lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{3}{2}} \cdot a_\nu = 0$ lediglich die Convergenz der Reihe $\sum \nu^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \cdot |a_\nu|$ (welche unmittelbar aus der Existenz jener Beziehung folgen würde, aber nicht umgekehrt).

Da alle Schwierigkeiten und Ausnahmefälle in der Theorie der Fourier'schen Reihen von dem eventuellen Vorkommen unendlich vieler Maxima und Minima herrühren, so scheint mir ein wesentlicher Vorzug des oben gegebenen Kriteriums gerade darin zu liegen, dass es in dieser Hinsicht nicht die geringste Einschränkung verlangt.

7. Im übrigen sind die in jenem Satze, bezüglich der Existenz und des Verhaltens von $f'(x)$ für die Stellen X, eingeführten Voraussetzungen sehr weit davon entfernt, für die absolute Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ nothwendige zu sein. Dies geht schon daraus hervor, dass dieselben ja nicht nur die absolute Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$, sondern sogar diejenige von $\sum \nu^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \cdot a_\nu X^\nu$ nach sich ziehen. Man könnte darnach eine schärfere Form des fraglichen Kriteriums etwa dadurch erzielen, dass man statt der ersten Derivirten eine solche mit ächt gebrochenem Index[1]) in Betracht zieht: für seine praktische Anwendbarkeit würde indessen auf diese Weise kaum etwas gewonnen werden.

Andererseits lehrt ein Blick auf die bekannte Weierstrass'sche Function $\sum a_\nu \cdot x^{b^\nu}$ ($a < 1$, b eine ungerade ganze

[1]) Riemann, Ges. Werke, XIX, p. 332. — Hadamard, Journ. de Math. 4ième Série, T. 8 (1892), p. 154.

Zahl, $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$), dass es Potenzreihen giebt, welche auf dem Convergenzkreise absolut convergiren, ohne für irgend eine Stelle desselben eine bestimmte Derivirte zu besitzen. Die Natur dieses Beispiels lässt zugleich deutlich erkennen, dass die Existenz eines im allgemeinen endlichen $f'(X)$ durch die absolute Convergenz von $\sum a_\nu X^\nu$ in keiner Weise präjudicirt wird (ähnlich, wie etwa die Convergenz oder Divergenz von $\sum a_\nu$ über die Existenz eines bestimmten $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}$ nicht das geringste aussagt). Bedeutet nämlich a_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) irgend eine Folge reeller oder complexer Zahlen von der Beschaffenheit, dass $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = 0$, $\lim\limits_{\nu=\infty} |a_\nu|^{\frac{1}{\nu}} = 1$, so besitzt nicht nur die Potenzreihe: $\mathfrak{P}(x) = \sum a_\nu X^\nu$, sondern auch jede aus ihr herausgehobene Potenzreihe: $\overline{\mathfrak{P}(x)} = \sum a_{m_\nu} x^{m_\nu}$ den Convergenzradius 1. Die zu $\mathfrak{P}(x)$ gehörige Function $f(x)$ kann dann auf dem Convergenzkreise das denkbar einfachste Verhalten zeigen, nämlich für alle Stellen mit Ausnahme einer einzigen noch regulär sein, gleichgültig ob $\sum |a_\nu|$ convergirt oder divergirt. Andererseits lässt sich die Folge der natürlichen Zahlen m_ν allemal (auf unendlich viele Arten) so auswählen, dass $\sum |a_{m_\nu}|$ (also $\sum a_{m_\nu} X^{m_\nu}$ absolut) convergirt und zugleich der Convergenzkreis eine singuläre Linie für $\sum a_{m_\nu} x^{m_\nu}$ bildet: bei passender Annahme der a_ν und m_ν kann man insbesondere erzielen, dass die zu $\overline{\mathfrak{P}(x)}$ gehörige Function $\overline{f(x)}$ für unendlich viele, überall dicht liegende Stellen X kein endliches $\overline{f'(x)}$ besitzt. Mit anderen Worten: Gerade derjenige Process, welcher hier die absolute Convergenz der Potenzreihe $\overline{\mathfrak{P}(x)}$ auf dem Convergenzkreise zur Folge hat, nämlich das Herausheben der Theilreihe $\overline{\mathfrak{P}(x)}$ aus der Reihe $\mathfrak{P}(x)$, zerstört in diesem Falle die Existenz einer im allgemeinen endlichen und stetigen Derivirten. Beispiel: Man setze $a_\nu = \frac{1}{\nu}$, $m_\nu = 2^\nu$. Die Reihe

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu} \cdot x^\nu$$

convergirt für $|x| = 1$ nur noch bedingt, ausser für die Stelle $x = 1$, wo sie eigentlich divergirt; für alle übrigen Stellen verhält sich die zugehörige Function regulär, besitzt also endliche Derivirte jeder Ordnung.

Andererseits convergirt die Reihe: $\overline{\mathfrak{P}(x)} = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{1}{2^\nu} \cdot x^{2^\nu}$ auf dem Convergenzkreise noch absolut, die zugehörige Function besitzt aber für alle Stellen $X = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot m\pi i}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ keine endliche Derivirte, da die Reihe $\overline{\mathfrak{P}'(x)} = \frac{1}{x} \cdot \sum_0^\infty {}^\nu x^{2^\nu}$ daselbst eigentlich divergirt und somit

$$\overline{f'(X)} = \lim_{\varrho = 1} \overline{\mathfrak{P}'(\varrho X)} = \infty$$

wird (nach § 1, Nr. 2).

§ 3. Potenzreihen, welche auf dem Convergenzkreise ausnahmslos und dennoch nicht absolut convergiren.

1. Ich habe bei früherer Gelegenheit[1]) darauf aufmerksam gemacht, dass zwar alle bekannteren Potenzreihen, die auf dem Convergenzkreise noch bedingt convergiren, daselbst mindestens eine Divergenzstelle besitzen, dass es nichts destoweniger Potenzreihen giebt, welche auf dem Convergenzkreise ebenfalls nur bedingt, aber ausnahmslos convergiren. Nachdem ich a. a. O. einen allgemeinen Typus von Reihencoefficienten a_ν mitgetheilt, für welche $\sum a_\nu x^\nu$ die fragliche Eigenschaft besitzt, habe ich daran die Frage geknüpft, ob sich nicht auch im Einheitskreise analytische, durch geeignete Singularitäten auf der Peripherie charakterisirte Functionen angeben lassen, deren Mac Laurin'sche Entwickelung

[1]) Math. Ann. Bd. 25 (1885), p. 419.

auf der Peripherie ausnahmslos und doch nur bedingt convergirt. Diese Frage kann auf Grund derjenigen allgemeinen Betrachtungen, welche ich in einer anderen, oben bereits citirten Arbeit[1]) angestellt habe, und durch Angabe sehr einfacher Beispiele in bejahendem Sinne entschieden werden. Man setze etwa:

$$(1) \qquad f(x) = e^{\frac{x}{x-1}},$$

sodass also:[2])

$$(2) \qquad \begin{gathered} f(x) = \sum_0^\infty{}^\nu \, a_\nu \, x^\nu \, , \\ \text{wo: } a_0 = 1 \text{ und für } \nu > 1 : a_\nu = \sum_0^\nu{}^\varkappa \frac{(-1)^\varkappa}{\varkappa!} (\nu - 1)_{\varkappa - 1} . \end{gathered}$$

Die Function ist auf der gesammten Peripherie des Einheitskreises noch regulären Verhaltens mit Ausnahme der Stelle $x = 1$. Hier wird:

$$(3) \qquad f(1) = \lim_{x=1} f(x) = 0,$$

und zwar allemal, wenn x auf einen beliebigen Strahl aus dem Innern der Stelle 1 zustrebt. Andererseits hat man:

$$(4) \qquad f(e^{\vartheta i}) = e^{\frac{1}{2}} \left\{ \cos\left(\tfrac{1}{2}\cot\frac{\vartheta}{2}\right) - i \cdot \sin\left(\tfrac{1}{2}\cot\frac{\vartheta}{2}\right) \right\} \quad (\vartheta \lesseqgtr 0),$$

sodass also $f(e^{\vartheta i})$ bei $\vartheta = 0$ mit unendlich vielen Oscillationen endlich-unstetig wird. Die Fourier'sche Reihe für $f(e^{\vartheta i})$, welche in Folge der Bedingung (3) und des im übrigen durchweg regulären Verhaltens von $f(x)$, mit der Reihe $\sum a_\nu e^{\nu \vartheta i}$ zusammenfällt, ist alsdann für $-\pi \leqq \vartheta \leqq \pi$ ausnahmslos[3])

---

[1]) Sitz.-Ber. Bd. 25 (1895), p. 346.

[2]) A. a. O. p. 355.

[3]) Vermöge eines sinnentstellenden Druckfehlers heisst es a. a. O., dass die fragliche Reihe für $\vartheta = 0$, also für $x = 1$, divergirt. Dass es sich hierbei wirklich nur um einen Druckfehler handelt, geht daraus hervor, dass ich an anderer Stelle (Math. Ann. Bd. 44 (1894), p. 54, Fuss-

convergent. Sie kann indessen keinesfalls absolut convergiren, weil in diesem Falle die dargestellte Function $f(e^{\vartheta i})$ ausnahmslos stetig sein müsste. Somit ist die Potenzreihe $\sum a_\nu x^\nu$ auf dem Convergenzkreise zwar ausnahmslos, jedoch lediglich bedingt convergent. Für $x = 1$ ergiebt sich dabei insbesondere, auf Grund der Beziehung (3) und des Abel-schen Satzes:

$$\sum_0^\infty {}^\nu a_\nu = 0. \quad (5)$$ [1]

Dieses Beispiel lässt zugleich deutlich erkennen, durch welche Art von Singularitäten $X' = e^{\vartheta' i}$ die fragliche Convergenz-Erscheinung hervorgebracht wird: es muss $\lim_{x=X'} f(x)$ einen eindeutig bestimmten Werth besitzen, wenn x auf einem beliebigen Strahle von innen her der Stelle X' zustrebt; andererseits muss $f(e^{\vartheta i})$ bei $\vartheta = \vartheta'$ eine Unstetigkeit erleiden, welche immerhin noch die Convergenz der betreffenden Fourier'schen Reihe für $\vartheta = \vartheta'$ bestehen lässt, die aber dann eo ipso deren absolute Convergenz definitiv ausschliesst.[2]

note) ausdrücklich die Convergenz dieser Reihe (bezw. der damit gleichartigen:

$$e^{-\frac{1}{x}} = \sum c_\nu (x-1)^\nu \quad \text{für } x = 0)$$

hervorgehoben habe. Die Convergenz für $\vartheta = 0$ folgt im übrigen aus den von Du Bois Reymond angestellten Untersuchungen über Fourier'sche Reihen (Abh. der Bayer. Akad. II. Cl. Bd. XII[2], p. 37. 44), etwas einfacher aus § 4, Nr. 4 dieses Aufsatzes. — Wie ich inzwischen bemerkt habe, hat Herr Saalschütz die Coefficienten der Reihe: $e^{\frac{1}{x-1}} = \frac{1}{e}\sum_0^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu$ zum Gegenstande einer sehr ausführlichen Untersuchung gemacht (Archiv der Math. und Phys. (2), Bd. 6 (1888), p. 305—350) und hierbei auch einen (mir freilich nicht ganz einwurfsfrei erscheinenden), auf asymptotischer Integration einer für die Coefficienten a_ν bestehenden Recursionsformel beruhenden Beweis für die Convergenz von $\sum a_\nu$ mitgetheilt.

[1]) Uebereinstimmend mit dem von Herrn Saalschütz (a.a.O. p. 334) durch asymptotische Betrachtungen berechneten Resultate.

[2]) Vgl. auch § 4, Nr. 6.

2. Die von mir früher mitgetheilten, am Anfange dieses Paragraphen erwähnten Potenzreihen (mit ausnahmslos bedingter Convergenz für $|x| = 1$) sind von der Form:

$$\sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu = \sum_1^\infty {}^\nu \frac{\varepsilon_\nu}{M_\nu} \cdot x^\nu, \tag{6}$$

wo ε_ν in bestimmter Abwechselung die Werthe ± 1 besitzt, während die M_ν eine monoton in's Unendliche wachsende Folge positiver Zahlen vorstellen, von der Beschaffenheit, dass zwar:

$$M_\nu > \nu \tag{7}$$

ist, dagegen $\sum \frac{1}{M_\nu}$ divergirt $\left(\text{z. B. } M_\nu = \frac{1}{\nu \cdot \lg \nu}\right)$. Ich will nun zeigen, dass man, bei etwas anders gewählter Anordnung jener Glieder-Vorzeichen ε_ν, Reihen von analogem Verhalten gewinnen kann, bei welchen die monotone Zunahme der M_ν nur in dem Maasse erforderlich ist, dass $\sum \frac{1}{M_\nu^2}$ convergirt, sodass also im wesentlichen[1]) nur

$$M_\nu > \sqrt{\nu}$$

zu sein braucht. Abgesehen davon, dass die in diesem Falle zulässige Wahl $M_\nu = \nu$ ein besonders einfaches Beispiel einer Reihe von der fraglichen Beschaffenheit giebt, so scheint mir das betreffende Resultat aus dem Grunde besonders lehrreich, weil es eine bemerkenswerthe Ergänzung zu dem Satze in Nr. 4 des vorigen Paragraphen liefern wird.

Ich setze, wie in Gl. (6):

$$\sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu = \sum_1^\infty {}^\nu \frac{\varepsilon_\nu}{M_\nu} \cdot x^\nu, \quad \text{wo: } \varepsilon_\nu = (-1)^{[\sqrt{\nu}]-1}, \tag{8}$$

---

[1]) Genauer gesagt:

$$M_\nu \gtrsim \sqrt{\nu} \cdot m_\nu,$$

wo m_ν nur so in's Unendliche zu wachsen braucht, dass $\sum \frac{1}{\nu \cdot m_\nu}$ convergirt (cf. Gl. (20)).

(dabei soll $[\sqrt{\nu}]$ die grösste in $\sqrt{\nu}$ enthaltene ganze Zahl bedeuten), und will darauf ausgehen, die schwächste monotone Zunahme der M_ν zu bestimmen, bei welcher die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ für $|x| = 1$ noch ausnahmslos convergirt.

Damit dies zunächst an der Stelle $x = 1$ stattfinde, also $\sum a_\nu$ convergire, ist nach p. 46, Gl. (19) jedenfalls nothwendig, dass:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{M_1 a_1 + M_2 a_2 + \ldots + M_n a_n}{M_n} = 0$$

d. h.

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_n}{M_n} = 0, \text{ wo: } \sigma_n = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n. \tag{9}$$

Die aus bestimmten Gruppen positiver und negativer Einheiten bestehende Summe σ_n nimmt bei successive wachsendem n unter anderen Werthen eine Reihe von Minimal- bezw. Maximal-Werthen an, welche allemal dann auftreten, wenn ε_n das Schlussglied einer Gruppe negativer bezw. positiver Einheiten bildet. Da $\varepsilon_\nu = (-1)^{[\sqrt{\nu}]-1}$ und $[\sqrt{\nu}]$ jedesmal um 1 zunimmt, wenn ν gerade eine Quadratzahl m^2 erreicht, wobei dann also ε_ν das Vorzeichen wechselt, so sind jene Minimal- und Maximalwerthe von σ_n charakterisirt durch die Bedingung $n = m^2 - 1$; und zwar ist das betreffende Schlussglied ε_n ein negatives bezw. positives, der entsprechende Werth von σ_n also ein Minimum bezw. Maximum, je nachdem n gerade oder ungerade. Man hat nun für $n = (2\mu + 1)^2 - 1 = 4\mu^2 + 4\mu$:

$$\sigma_{4\mu^2+4\mu} = \sum_1^3{}^\nu |\varepsilon_\nu| - \sum_4^8{}^\nu |\varepsilon_\nu| + \sum_9^{15}{}^\nu |\varepsilon_\nu| - \sum_{16}^{24}{}^\nu |\varepsilon_\nu| + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{(2\mu-1)^2}^{(2\mu)^2-1}{}^\nu |\varepsilon_\nu| - \sum_{(2\mu)^2}^{(2\mu+1)^2-1}{}^\nu |\varepsilon_\nu|$$

$$= (3-5) + (7-9) + \ldots + (4\mu - 1) - (4\mu + 1)$$

$$= -2\mu, \tag{10}$$

und für $n = (2\mu)^2 - 1 = 4\mu^2 - 1$:

$$\sigma_{4\mu^2-1} = (3-5) + (7-9) + \ldots + (4\mu - 1)$$

$$= 2\mu + 1. \tag{11}$$

Hieraus ergiebt sich zunächst, dass:

$$\text{(12)} \qquad \lim_{\mu=\infty} \frac{\sigma_{4\mu^2+4\mu}}{\sqrt{4\mu^2+4\mu}} = -1, \quad \lim_{\mu=\infty} \frac{\sigma_{4\mu^2-1}}{\sqrt{4\mu^2-1}},$$

und da die Folge der $\sigma_{4\mu^2+4\mu}$ $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$ offenbar den unteren, die Folge der $\sigma_{4\mu^2-1}$ den oberen Limes von σ_n definirt, schliesslich:

$$\text{(13)} \qquad \underline{\lim_{n=\infty}} \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}} = -1, \quad \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\sigma_n}{\sqrt{n}} = +1.$$

Daraus folgt aber, dass die nothwendige Bedingung (9) für die Convergenz von $\sum a_\nu$ dann und nur dann erfüllt ist, wenn:

$$\text{(14)} \qquad M_\nu > \sqrt{\nu},$$

sodass man also setzen kann:

$$\text{(15)} \qquad M_\nu = \sqrt{\nu} \cdot m_\nu, \text{ wo: } \lim_{\nu=\infty} m_\nu = \infty.$$

Man hat nun mit Hülfe der Abel'schen Transformation:

$$\sum_1^n {}^\nu a_\nu = \sum_1^n {}^\nu \frac{\varepsilon_\nu}{M_\nu} = \sum_1^{n-1} {}^\nu \sigma_\nu \left(\frac{1}{M_\nu} - \frac{1}{M_{\nu+1}}\right) + \frac{\sigma_n}{M_n}$$

$$= \sum_1^{n-1} {}^\nu \frac{\sigma_\nu}{M_\nu} \cdot \frac{M_{\nu+1} - M_\nu}{M_{\nu+1}} + \frac{\sigma_n}{M_n},$$

und daher, mit Berücksichtigung von Gl. (15) und (13):

$$\sum_1^\infty {}^\nu a_\nu = \sum_1^\infty {}^\nu \frac{\sigma_\nu}{\sqrt{\nu}} \cdot \frac{\sqrt{\nu+1} \cdot m_{\nu+1} - \sqrt{\nu} \cdot m_\nu}{\sqrt{\nu+1} \cdot m_{\nu+1} \cdot m_\nu}.$$

Daraus folgt, dass $\sum a_\nu$ gleichzeitig mit der rechts stehenden Reihe, also wegen: $\overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{\sigma_\nu}{\sqrt{\nu}} = 1$, gleichzeitig mit der Reihe

$$\sum \frac{\sqrt{\nu+1} \cdot m_{\nu+1} - \sqrt{\nu} \cdot m_\nu}{\sqrt{\nu+1} \cdot m_{\nu+1} \cdot m_\nu}$$

convergirt.

Man hat nun:

$$\frac{\sqrt{\nu+1}\cdot m_{\nu+1}-\sqrt{\nu}\cdot m_\nu}{\sqrt{\nu+1}\cdot m_{\nu+1}\cdot m_\nu}=\frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot m_{\nu+1}-m_\nu}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot m_{\nu+1}\cdot m_\nu}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{\vartheta_\nu}{2\nu}\right)\cdot m_{\nu+1}-m_\nu}{\vartheta'_\nu\cdot m_{\nu+1}\cdot m_\nu} \quad \left(\text{wo: } \lim_{\nu=\infty}\vartheta_\nu=1,\ \lim_{\nu=\infty}\vartheta'_\nu=1\right)$$

$$(16) \qquad =\frac{1}{\vartheta'_\nu}\cdot\frac{m_{\nu+1}-m_\nu}{m_{\nu+1}\cdot m_\nu}+\frac{\vartheta_\nu}{2\vartheta'_\nu}\cdot\frac{1}{\nu\cdot m_\nu}.$$

Da $\frac{m_{\nu+1}-m_\nu}{m_{\nu+1}\cdot m_\nu}$ das allgemeine Glied einer convergenten Reihe bildet, sofern nur überhaupt m_ν mit ν monoton (wenn auch beliebig langsam) in's Unendliche wächst,[1]) so wird die fragliche Reihe dann und nur dann convergiren, wenn $\sum\frac{1}{\nu\cdot m_\nu}$ convergirt. Darnach ergiebt sich also zunächst:

Für die Convergenz der Reihe $\sum a_\nu$, wo: $a_\nu=(-1)^{[\sqrt{\nu}]-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{\nu}\cdot m_\nu}$ ist *nothwendig*, dass $\lim_{\nu=\infty} m_\nu=\infty$, *hinreichend*, dass die m_ν monoton zunehmen und $\sum\frac{1}{\nu\cdot m_\nu}$ convergirt.

3. Es lässt sich nun leicht zeigen, dass alsdann gleichzeitig mit $\sum a_\nu$ auch $\sum a_\nu X^\nu$ für jedes von 1 verschiedene X mit dem absoluten Betrage $|X|=1$ convergirt. Man hat nämlich:

$$\sum_1^n{}^\nu a_\nu X^\nu=\sum_1^{n-1}{}^\nu(a_\nu-a_{\nu-1})(X+X^2+\ldots+X^\nu)+a_n(X+X^2+\ldots+X^n),$$

also für jedes von 1 verschiedene X:

$$(17)\quad \sum_1^n{}^\nu a_\nu X^\nu=\frac{X}{1-X}\cdot\sum_1^{n-1}{}^\nu(a_\nu-a_{\nu-1})\cdot(1-X^\nu)+a_n\cdot\frac{X(1-X^n)}{1-X}$$

[1]) Math. Ann. Bd. 35 (1890), p. 327.

und, wegen $\lim_{n=\infty} a_n = 0$, $\overline{\lim_{n=\infty}} \, | 1 - X^n | \leqq 2$:

$$(18) \qquad \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu X^\nu = \frac{X}{1-X} \sum_1^\infty {}^\nu (a_\nu - a_{\nu+1}) \cdot (1 - X^\nu).$$

Da für (jedes X und ν): $| 1 - X^\nu | \leqq 2$, so convergirt die rechts stehende Reihe sicher, wenn $\sum | a_\nu - a_{\nu+1} |$ convergent ist. Da je zwei auf einander folgende Terme a_ν, $a_{\nu+1}$ gleiches Vorzeichen haben, ausser wenn:

$$\nu = (\lambda + 1)^2 - 1 = \lambda(\lambda + 2), \; \nu + 1 = (\lambda + 1)^2 \; (\lambda = 1, 2, 3, \ldots),$$

so findet man:

$$\sum_1^\infty {}^\nu | a_\nu - a_{\nu+1} | = \sum_1^\infty {}'^\nu \left(\frac{1}{M_\nu} - \frac{1}{M_{\nu+1}} \right) + \sum_1^\infty {}^\lambda \left(\frac{1}{M_{\lambda(\lambda+2)}} + \frac{1}{M_{(\lambda+1)^2}} \right),$$

wo der Accent an dem ersten Summenzeichen der rechten Seite andeuten soll, dass die Werthe: $\nu = \lambda(\lambda + 2)$ $(\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$ auszuschliessen sind: an die Stelle der betreffenden Glieder treten die in der zweiten Summe vereinigten. Setzt man diese letztere in die Form:

$$\sum_1^\infty {}^\lambda \left(\frac{1}{M_{\lambda(\lambda+2)}} - \frac{1}{M_{(\lambda+1)^2}} \right) + 2 \sum_1^\infty {}^\lambda \frac{1}{M_{(\lambda+1)^2}},$$

und fügt die Glieder der ersten Summe noch zu denjenigen der Summe $\sum'$, so wird:

$$(19) \quad \sum_1^\infty {}^\nu | a_\nu - a_{\nu+1} | = \sum_1^\infty {}^\nu \left(\frac{1}{M_\nu} - \frac{1}{M_{\nu+1}} \right) + 2 \sum_1^\infty {}^\lambda \frac{1}{M_{(\lambda+1)^2}},$$

sodass sich unmittelbar die Convergenz von $\sum | a_\nu - a_{\nu+1} |$ ergiebt, wenn man noch beachtet, dass nach Gl. (15):

$$M_{(\lambda+1)^2} = (\lambda + 1) \cdot m_{(\lambda+1)^2}$$

und sodann, wegen $m_{(\lambda+1)^2} > m_{\lambda+1}$:

$$M_{(\lambda+1)^2} > (\lambda + 1) \cdot m_{\lambda+1} > \lambda \cdot m_\lambda,$$

also $\sum \frac{1}{M_{(\lambda+1)^2}} < \sum \frac{1}{\lambda \cdot m_\lambda}$ d. h. convergent ist.

Man findet somit schliesslich:

Die Reihe $\sum_1^\infty{}^\nu a_\nu X^\nu$, wo: $a_\nu = (-1)^{[\sqrt{\nu}]-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\nu}\cdot m_\nu}$ ist für $|X| = 1$ ausnahmslos convergent, wenn die m_ν monoton in dem Maasse zunehmen, dass $\sum \frac{1}{\nu \cdot m_\nu}$ *convergirt.* Sie convergirt also nur *bedingt*, wenn andererseits die m_ν so angenommen werden, dass $\sum \frac{1}{\sqrt{\nu}\cdot m_\nu}$ *divergirt.* Man setze z. B.:

$$(20) \quad m_\nu = (\sqrt{\nu})^\varepsilon,\ m_\nu = (\lg \nu)^{1+\varepsilon},\ m_\nu = \lg \nu \cdot (\lg_2 \nu)^{1+\varepsilon}, \text{ etc. } (\varepsilon > 0).$$ [1]

4. Da mit der Reihe $\sum \frac{1}{\nu \cdot m_\nu}$ a fortiori auch $\sum \frac{1}{\nu \cdot m_\nu^2}$ convergirt und $|a_\nu| = \frac{1}{\sqrt{\nu}\cdot m_\nu}$, so folgt zunächst, dass bei den Reihen $\sum a_\nu x^\nu$ der betrachteten Art stets $\sum |a_\nu|^2$ convergent ist. Andererseits können aber die m_ν so langsam zunehmen (z. B. $m_\nu = (\lg \nu)^{1+\varepsilon}$), dass keine niedrigere Potenz, als das Quadrat der $|a_\nu|$ eine convergente Reihe liefert. Mithin erhält man das folgende Resultat:

---

[1]) Ein besonders einfaches, für Vorlesungszwecke geeignetes Beispiel resultirt, wie bereits oben bemerkt wurde, für:

$$m_\nu = \sqrt{\nu}, \text{ also: } M_\nu = \nu.$$

Die Gleichung (19) nimmt in diesem Falle die Form an:

$$\sum_1^\infty{}^\nu |a_\nu - a_{\nu+1}| = \sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu(\nu+1)} + 2\sum_1^\infty{}^\lambda \frac{1}{(\lambda+1)^2},$$

welche ohne weiteres die Convergenz der betreffenden Reihe erkennen lässt. Andererseits ergiebt sich die Convergenz von $\sum a_\nu$ hier unmittelbar aus der (durch einfache Rechnung leicht zu verificirenden) Bemerkung, dass die positiven und negativen Glieder sich zu Gruppen alternirenden Vorzeichens vereinigen lassen, deren Zahlenwerthe monoton gegen Null abnehmen.

Es giebt Potenzreihen $\mathfrak{P}(x) = \sum a_\nu x^\nu$ mit dem Convergenzradius 1, welche für $|x| = 1$ noch ausnahmslos *bedingt* convergiren, während $k = 2$ der *kleinste* Exponent ist, für welchen $\sum |a_\nu|^k$ (also $\sum a_\nu^k X^\nu$ *absolut*) convergirt.

Die zur Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ gehörige Function $f(x)$ besitzt hier für jede einzelne Stelle X der Peripherie einen bestimmten endlichen Werth (nämlich den Werth $\sum_1^\infty {}^\nu a_\nu X^\nu$). Da ferner die aus Gl. (17) durch Substitution von x für X resultirende Beziehung:

$$\sum_1^n {}^\nu a_\nu x^\nu = \frac{x}{1-x} \sum_1^{n-1} {}^\nu (a_\nu - a_{\nu+1})(1 - x^\nu) + a_n x \cdot \frac{1-x^n}{1-x}$$

erkennen lässt, dass die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ gleichmässig convergirt im Innern und auf der Begrenzung desjenigen Bereiches, welcher entsteht, wenn man aus der Fläche des Einheitskreises eine beliebig kleine Umgebung der Stelle 1 ausscheidet, so folgt weiter, dass $f(x)$ nicht nur längs der gesammten Peripherie mit eventuellem Ausschlusse der Stelle 1, sondern in der Umgebung jeder von 1 verschiedenen Stelle X vollkommen stetig ist. In der Nähe der Stelle $x = 1$ kann dagegen $\sum a_\nu x^\nu$ (und speciell auch $\sum a_\nu X^\nu$) ungleichmässig convergiren (ich vermuthe, dass dies auch wirklich der Fall sein dürfte, obschon es mir andererseits bisher nicht gelungen ist, einen vollständigen Beweis dafür zu erbringen). In Folge dessen braucht auch $|f(x)|$, wiewohl für jede einzelne Stelle x (incl. X) einen bestimmten endlichen Werth besitzend, in der Umgebung der Stelle $x = 1$ nicht unter einer festen Grenze zu bleiben. Für das etwaige Anwachsen von $|f(x)|$ in der Nähe der Stelle 1 lässt sich leicht eine obere Grenze angeben. Da nämlich:

$$\left| \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu \cdot (\varrho X)^\nu \right| \leqq \sum_1^\infty {}^\nu |a_\nu| \cdot \varrho^\nu \quad \text{d. h.} \leqq \sum_1^\infty {}^\nu \frac{\varrho^\nu}{\sqrt{\nu} \cdot m_\nu} = F(\varrho),$$

so kann der Werth von $|f(x)|$ für $x = \varrho \cdot e^{\vartheta i}$ niemals denjenigen von $F(\varrho)$ übersteigen. Dabei wird $F(\varrho)$ für $\lim \varrho = 1$ schwächer unendlich als $(1 - \varrho)^{\frac{1}{2}}$, ja sogar um so viel schwächer, dass nicht nur $F(\varrho)$, sondern auch $F(\varrho)^2$ für $\varrho \leqq 1$ integrabel bleibt.[1]) Hieraus kann nun zwar die Integrabilität von $|f(x)|^2$ auf jedem in den Punkt 1 von Innen her einmündenden Strahle erschlossen werden: ob aber diese Eigenschaft auch längs der Peripherie erhalten bleibt, ist auf diesem Wege nicht ohne weiteres zu erkennen.[2]) Es kann dies indessen aus der hier a priori feststehenden (absoluten) Convergenz der Reihe $\sum a_\nu^2$ durch Umkehrung der in § 2, Nr. 4 benützten Schlussweise gefolgert werden.

Hiernach genügt also $f(x) = \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ den sämmtlichen für die Gültigkeit des Satzes § 2, Nr. 4 geforderten Bedingungen und sogar noch den weiteren, für jede Stelle X einen endlichen Werth zu besitzen und, mit eventueller Ausnahme der einzigen Stelle $X = 1$, auch vollkommen stetig zu bleiben. Trotzdem giebt es, bei geeigneter Auswahl von m_ν, keinen Exponenten $k < 2$, derart dass $\sum |a_\nu|^k$ convergirt. Man kann darnach sagen, dass der fragliche Satz das äusserste leistet, was aus den ihm zu Grunde liegenden Voraussetzungen gefolgert werden kann.

---

[1]) Die Richtigkeit der ersten Behauptung folgt unmittelbar aus p. 49, Fussnote; die der zweiten aus einem ähnlichen, den Zusammenhang zwischen der Abnahme (bezw. Zunahme) der $|a_\nu|$ und dem Unendlichwerden von $\lim_{\varrho=1} \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu \varrho_\nu$ noch genauer präcisirenden Satze, den ich bei späterer Gelegenheit mittheilen werde.

[2]) Die gleichmässige Integrabilität von $f(x)$ selbst steht wegen der absoluten Convergenz der Reihe $\sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu+1} \cdot a_\nu X^{\nu+1} = \int_0^X f(x)\, dx$ von vornherein ausser Frage.

§ 4. Zusammenhang zwischen dem reellen und imaginären Theile der Randfunction.

1. Man hat, mit Beibehaltung der bisher angewendeten Bezeichnungen:

$$f(\varrho \cdot e^{\vartheta i}) = \sum_1^\infty {}^\nu (\alpha_\nu + \beta_\nu i)\, \varrho^\nu \cdot e^{\nu \vartheta i} \text{ für } \varrho < 1, \tag{1}$$

und daher, wenn:

$$f(\varrho \cdot e^{\vartheta i}) = \varphi(\varrho, \vartheta) + i \cdot \psi(\varrho, \vartheta) \tag{2}$$

gesetzt wird:

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi(\varrho, \vartheta) &= \sum_1^\infty {}^\nu (\alpha_\nu \cos \nu \vartheta - \beta_\nu \sin \nu \vartheta) \cdot \varrho^\nu, \\ \psi(\varrho, \vartheta) &= \sum_1^\infty {}^\nu (\beta_\nu \cos \nu \vartheta + \alpha_\nu \sin \nu \vartheta) \cdot \varrho^\nu, \end{aligned} \right. \qquad (\varrho < 1). \tag{3}$$

Für die Randwerthe $e^{\vartheta i}$ ergiebt sich sodann:

$$f(e^{\vartheta i}) = \varphi(\vartheta) + i \cdot \psi(\vartheta), \tag{4}$$

wenn $\varphi(\vartheta)$, $\psi(\vartheta)$ definirt werden durch die Beziehungen:

$$\varphi(\vartheta) = \lim_{\varrho = 1} \varphi(\varrho, \vartheta), \quad \psi(\vartheta) = \lim_{\varrho = 1} \psi(\varrho, \vartheta). \tag{5}$$

Es werde nun angenommen, dass $f(x)$ diejenigen (in § 2, Nr. 3 näher erörterten) Integrabilitäts-Eigenschaften besitzt, welche das Zusammenfallen von $\sum (\alpha_\nu + \beta_\nu i) \cdot e^{\nu \vartheta i}$ mit der Fourier'schen Reihe für $f(e^{\vartheta i})$ zur Folge haben. Alsdann wird nach Gl. (6), p. 60:

$$\begin{aligned} \alpha_\nu + \beta_\nu i &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (\varphi(\eta) + i \cdot \psi(\eta)) \cdot \cos \nu \eta \cdot d\eta \\ &= \frac{1}{\pi i} \int_{-\pi}^{+\pi} (\varphi(\eta) + i \cdot \psi(\eta)) \cdot \sin \nu \eta \cdot d\eta, \end{aligned}$$

also:

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
a_\nu &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\eta)\cdot\cos\nu\eta\cdot d\eta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \psi(\eta)\cdot\sin\nu\eta\cdot d\eta\,,\\
\beta_\nu &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\eta)\cdot\sin\nu\eta\cdot d\eta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \psi(\eta)\cdot\cos\nu\eta\cdot d\eta\,,
\end{aligned}
\right.
$$

und:

$$
(7)\qquad \lim_{n=\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n=\infty} \beta_n = 0.
$$

Wenn die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ für irgend eine Stelle $x = e^{\vartheta i}$ convergirt, so müssen die beiden Reihen:

$$
(8)\quad \sum_1^\infty{}^\nu (a_\nu \cos\nu\vartheta - \beta_\nu \sin\nu\vartheta), \quad \sum_1^\infty{}^\nu (\beta_\nu \cos\nu\vartheta + a_\nu \sin\nu\vartheta)
$$

gleichzeitig convergiren — vice versa; und man hat sodann nach dem Abel'schen Satze:[1])

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
\varphi(\vartheta) &= \lim_{n=\infty} \sum_1^n{}^\nu (a_\nu \cos\nu\vartheta - \beta_\nu \sin\nu\vartheta),\\
\psi(\vartheta) &= \lim_{n=\infty} \sum_1^n{}^\nu (\beta_\nu \cos\nu\vartheta + a_\nu \sin\nu\vartheta).
\end{aligned}
\right.
$$

Zur Beurtheilung der Convergenz oder Divergenz dieser Reihen können dann zunächst die bekannten Kriterien aus der Theorie der Fourier'schen Reihen dienen, wobei also in der Reihe für $\varphi(\vartheta)$ die Coefficienten a_ν, β_ν als Functionen von $\varphi(\vartheta)$ erscheinen, und als Convergenz-Bedingungen gewisse Stetigkeits-Eigenschaften von $\varphi(\vartheta)$ resultiren (entsprechend sodann für $\psi(\vartheta)$). Da sich aber a_ν, β_ν nach Gl. (6) auch als Functionen von $\psi(\vartheta)$ darstellen lassen, so ergiebt sich hier auch noch die folgende, gänzlich ausserhalb der gewöhnlichen Theorie

---

[1]) Der Vollständigkeit halber bemerke ich, dass, wie ein Blick auf die Gleichungen (3) und (5) lehrt, das entsprechende Theilresultat auch erhalten bleibt, wenn nur eine der beiden fraglichen Reihen convergirt. Und man hat nach § 1, Nr. 2 auch: $\varphi(\vartheta) = \pm\infty$ bezw. $\psi(\vartheta) = \pm\infty$, wenn die betreffende Reihe eigentlich divergirt.

der Fourier'schen Reihen liegende Fragestellung: Welche Stetigkeits-Eigenschaften von $\psi(\vartheta)$ sind erforderlich oder hinreichend, damit die Reihe für $\varphi(\vartheta)$ bei einem bestimmten Werthe ϑ überhaupt convergire?[1]) Die hierauf zu erzielende Antwort gilt dann in Folge der zwischen $\varphi(\vartheta)$ und $\psi(\vartheta)$ bestehenden Reciprocität (s. Gl. (9) und (6)) mutatis mutandis auch bezüglich der Convergenz der Reihe für $\psi(\vartheta)$.[2])

2. Setzt man:

$$\sum_1^n {}^{\nu} (\alpha_\nu \cos \nu \vartheta - \beta_\nu \sin \nu \vartheta) = \varphi_n(\vartheta), \tag{10}$$

so handelt es sich also um die Untersuchung von $\lim_{n=\infty} \varphi_n(\vartheta)$ unter der Voraussetzung, dass für α_ν, β_ν der zweite der in Gl. (6) angegebenen Integral-Ausdrücke eingesetzt wird. Man erhält auf diese Weise zunächst:

$$\varphi_n(\vartheta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \psi(\eta) \cdot \sum_1^n {}^{\nu} \sin \nu (\eta - \vartheta) \cdot d\eta, \tag{11}$$

und da:

$$\begin{aligned} \sum_1^n {}^{\nu} \sin \nu \lambda &= \frac{\cos \frac{1}{2}\lambda - \cos (n + \frac{1}{2})\lambda}{2 \sin \frac{1}{2}\lambda} \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\cot \frac{\lambda}{2} - \cos n\lambda \cdot \cot \frac{\lambda}{2} + \sin n\lambda\right) \end{aligned}$$

so wird:

$$2\pi \cdot \varphi_n(\vartheta) = \int_{-\pi}^{+\pi} \psi(\eta) \cdot \cot \frac{\eta - \vartheta}{2} \cdot (1 - \cos n(\eta - \vartheta)) \cdot d\eta + \Delta_n, \tag{12}$$

wo:

---

[1]) Dass ihre Summe alsdann stets den Werth $\varphi(\vartheta)$ hat, folgt wieder unmittelbar aus dem Abel'schen Satze (s. auch die vorige Fussnote).

[2]) Eine ähnliche Untersuchung des Herrn Tauber (Monatsh. f. Math. und Phys. Jahrg. 2 (1891), p. 79—118) beruht theilweise auf anderen Voraussetzungen und verfolgt im wesentlichen andere Ziele.

$$(13)\qquad \begin{cases} \Delta_n = \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \psi(\eta)\cdot \sin n(\eta-\vartheta) \\ \quad = \pi(\alpha_n \cos n\vartheta - \beta_n \sin n\vartheta) \end{cases}$$

also:

$$(14)\qquad \lim_{n=\infty} \Delta_n = 0$$

und zwar gleichmässig für alle möglichen ϑ. Bezeichnet man das andere in Gl. (12) auftretende Integral mit $J_n(\vartheta)$, so ergiebt sich, indem man $\eta - \vartheta = \alpha$ substituirt:

$$(15)\qquad J_n(\vartheta) = \int\limits_{-\pi-\vartheta}^{+\pi-\vartheta} \psi(\vartheta+\alpha)\cdot \cot\frac{\alpha}{2}\cdot(1-\cos n\alpha)\cdot d\alpha,$$

und wenn man sodann das Integrations-Intervall durch Einschaltung des Theilpunktes $-\pi$ in zwei Theile zerlegt und beachtet, dass, mit Hülfe der Substitution: $\alpha = \alpha' - 2\pi$ und mit Rücksicht auf die Periodicität von $\psi(\vartheta)$:

$$\int\limits_{-\pi-\vartheta}^{-\pi} \psi(\vartheta+\alpha)\cdot \cot\frac{\alpha}{2}\cdot(1-\cos n\alpha)\cdot d\alpha$$

$$= \int\limits_{\pi-\vartheta}^{\pi} \psi(\vartheta+\alpha')\cdot \cot\frac{\alpha'}{2}\cdot(1-\cos n\alpha')\cdot d\alpha',$$

so folgt:

$$(16)\qquad \begin{aligned} J_n(\vartheta) &= \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \psi(\vartheta+\alpha)\cdot \cot\frac{\alpha}{2}\cdot(1-\cos n\alpha)\cdot d\alpha \\ &= \int\limits_{0}^{+\pi} \{\psi(\vartheta+\alpha)-\psi(\vartheta-\alpha)\}\cdot \cot\frac{\alpha}{2}\cdot(1-\cos n\alpha)\cdot d\alpha. \end{aligned}$$

Bedeutet ε eine beliebig kleine positive Zahl und zerlegt man $J_n(\vartheta)$ in die beiden Theil-Integrale:

(17) $$J_n(\vartheta) = J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta) + J_{n,\varepsilon}(\vartheta),$$

wo:

(18) $$J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta) = \int_0^\varepsilon \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1 - \cos n a) \cdot da,$$

(19) $$J_{n,\varepsilon}(\vartheta) = \int_\varepsilon^\pi \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot (1 - \cos n a) \cdot da,$$

so hat zunächst $J_{n,\varepsilon}(\vartheta)$, in Folge der ausnahmslosen Stetigkeit von $\cot\frac{a}{2}$ für $\varepsilon \leqq a \leqq \pi$ und der vorausgesetzten Integrabilität von $\psi(\vartheta)$ und $|\psi(\vartheta)|$, nicht nur für jedes noch so grosse n einen bestimmten Werth, sondern es ist auch insbesondere:

(20) $$\lim_{n=\infty} J_{n,\varepsilon}(\vartheta) = \int_\varepsilon^\pi \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot da,$$

da nach einem bekannten Fundamentalsatze:

(21) $$\lim_{n=\infty} \int_\varepsilon^\pi \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot \cos n a \cdot da = 0$$

wird. Diese Beziehungen gelten für jedes noch so klein angenommene constante $\varepsilon > 0$. Soll aber die Existenz von $\lim_{n=\infty} J_{n,\varepsilon}(\vartheta)$ auch bei unbegrenzter Verkleinerung von ε erhalten bleiben, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass ausserdem noch $\lim_{n=\infty} J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta)$ gleichzeitig mit ε verschwindet, d. h. durch Wahl einer oberen Schranke für ε beliebig klein gemacht werden kann. Und sollen die beiden Gleichungen (20), (21) für $\varepsilon = 0$ einen Sinn behalten, so ist des weiteren erforderlich, dass die beiden Bestandtheile von $\lim_{n=\infty} J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta)$, nämlich:

$$(22)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\varepsilon} \{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)\}\cdot\cot\frac{a}{2}\cdot da, \\ \displaystyle\lim_{n=\infty}\int_0^{\varepsilon} \{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)\}\cdot\cot\frac{a}{2}\cdot\cos na\cdot da, \end{cases}$$

einzeln genommen die eben angegebene Eigenschaft besitzen. In diesem Falle geht dann Gl. (20) in die folgende über:

$$(23)\qquad \lim_{n=\infty} J_n(\vartheta) = \int_0^{\pi} \{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)\}\cdot\cot\frac{a}{2}\cdot da.$$

Dabei lässt sich noch das Integral $J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta)$, wie auch jedes der Theil-Integrale (22), durch ein etwas einfacheres ersetzen. Da nämlich die identische Umformung besteht:

$$(24)\quad J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta) = 2\int_0^{\varepsilon} \frac{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)}{a}(1-\cos na)\cdot da$$
$$+\int_0^{\varepsilon}\{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)\}(1-\cos na)\left(\cot\frac{a}{2}-\frac{2}{a}\right)\cdot da,$$

und da:

$$(25)\qquad \cot\frac{a}{2}-\frac{2}{a} = \frac{a\cdot\cos\frac{a}{2}-2\sin\frac{a}{2}}{a\cdot\sin\frac{a}{2}} = -\frac{a}{6}-\ldots$$

für $a=0$ verschwindet, so wird das letzte Integral in Gl. (24) gleichzeitig mit ε beliebig klein, und zwar unabhängig von n, insbesondere also auch für $\lim n=\infty$. Hiernach wird also $\lim\limits_{n=\infty} J_n^{(\varepsilon)}(\vartheta)$ allemal dann gleichzeitig mit ε gegen Null convergiren, wenn:

$$(26)\qquad \lim_{n=\infty}\int_0^{\varepsilon} \frac{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)}{a}(1-\cos na)\cdot da$$

diese Eigenschaft besitzt, und das analoge gilt für die beiden Theil-Integrale (22).

Bemerkt man schliesslich noch, dass aus Gl. (12) die eigentliche Divergenz von $\sum(a_\nu \cos\nu\vartheta - \beta_\nu \sin\nu\vartheta)$ resultirt, falls $\lim_{n=\infty} J_n(\vartheta) = \pm\infty$ ist,[1]) so kann man das Ergebniss dieser Untersuchung in folgender Weise zusammenfassen:

Es ist:

$$(27)\quad \varphi(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\cdot\lim_{n=\infty}\int_0^\pi \{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)\}\cdot\cot\frac{a}{2}\cdot(1-\cos na)\cdot da,$$

sobald dieser Grenzwerth *existirt;* d. h. die Reihe

$$\varphi(\vartheta) = \sum_1^\infty{}^\nu (a_\nu \cos\nu\vartheta - \beta\sin\nu\vartheta)$$

ist *convergent* oder *eigentlich divergent*, je nachdem der obige Grenzwerth *endlich* oder *unendlich gross* ausfällt. Als nothwendig und hinreichend für die *Convergenz* ergiebt sich, dass:

$$(\mathrm{A})\quad \lim_{n=\infty}\int_0^\varepsilon \frac{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)}{a}\cdot(1-\cos na)\cdot da$$

gleichzeitig mit ε gegen Null convergirt. Besitzen schon die beiden Bestandtheile dieses Ausdruckes, nämlich:

$$(\mathrm{B})\quad \int_0^\varepsilon \frac{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)}{a}\cdot da$$

$$(\mathrm{C})\quad \lim_{n=\infty}\int_0^\varepsilon \frac{\psi(\vartheta+a)-\psi(\vartheta-a)}{a}\cdot\cos na\cdot da$$

---

[1]) Hierfür ist wiederum hinreichend, wenn der Grenzwerth (26) für irgend ein $\varepsilon > 0$ unendlich gross ausfällt.

diese Eigenschaft, so reducirt sich zugleich die Beziehung (27) auf die folgende:

$$(28) \quad \varphi(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \{\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)\} \cdot \cot\frac{a}{2} \cdot d\,a.$$ [1]

3. Vergleicht man die Darstellungs-Formel (27) mit der gewöhnlichen (Dirichlet'schen) Summationsformel:

$$(29) \quad \varphi(\vartheta) = \frac{1}{\pi} \lim_{n=\infty} \int_0^\varepsilon \{\varphi(\vartheta + a) + \varphi(\vartheta - a)\} \frac{\sin n\,a}{a} \cdot d\,a,$$

$$= \tfrac{1}{2}\{\varphi(\vartheta + 0) + \varphi(\vartheta - 0)\} + \frac{1}{\pi} \int_0^\varepsilon F(a) \cdot \frac{\sin n\,a}{a} \cdot d\,a,$$

wo:

$$F(a) = \{\varphi(\vartheta + a) - \varphi(\vartheta + 0)\} + \{\varphi(\vartheta - a) - \varphi(\vartheta - 0)\},$$

so ergeben sich die folgenden fundamentalen Unterschiede:

1) Der Werth des Grenz-Ausdruckes (29) hängt lediglich von den Functionswerthen $\varphi(\vartheta)$ in unmittelbarer Nähe der betrachteten Stelle ϑ ab, derjenige des Ausdruckes (27) von der Gesammtheit der Werthe, welche $\psi(\vartheta)$ für $-\pi \leqq \vartheta \leqq +\pi$ annimmt.

2) Die Convergenz von (29) basirt auf dem Verhalten der Summe $\varphi(\vartheta + a) + \varphi(\vartheta - a)$, diejenige von (27) bezw. (A) auf dem Verhalten der Differenz $\psi(\vartheta + a) - \psi(\vartheta - a)$ in unmittelbarer Nähe der fraglichen Stelle ϑ.

3) Von den beiden für die Beschaffenheit der Grenz-Ausdrücke (29) und (27) bezw. (A) charakteristischen Integralen:

---

[1] Herr Tauber beweist die Gültigkeit von Gl. (28) auch unter der Voraussetzung, dass nur das Integral (B) der angegebenen Bedingung genügt und dass an die Stelle der auf (C) bezüglichen Bedingung die Convergenz der Reihe $\psi(\vartheta) = \sum (\beta_\nu \cos \nu\,\vartheta + \alpha_\nu \sin \nu\,\vartheta)$ tritt (a. a. O. p. 87).

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\sin n\alpha}{\alpha}\, d\alpha, \quad \int_0^{\varepsilon} \frac{1 - \cos n\alpha}{\alpha} \cdot d\alpha$$

ist das erstere bei $\lim n = \infty$ convergent, das zweite dagegen divergent.

Nach alledem kommt die Convergenz des Ausdruckes (29) zu Stande, wenn $\varphi(\vartheta)$ sowohl rechts, als links von der betrachteten Stelle ϑ gewisse Stetigkeits-Eigenschaften besitzt, während dieselbe durch das Vorhandensein eines Sprunges zwischen $\varphi(\vartheta + 0)$ und $\varphi(\vartheta - 0)$ nicht alterirt wird. Dagegen würde das Auftreten eines Sprunges zwischen $\psi(\vartheta + 0)$ und $\psi(\vartheta - 0)$ die Convergenz des Grenzwerthes (27) bezw. (A) definitiv ausschliessen,[1] während dieselbe allemal dann zu Stande kommt, wenn $\psi(\vartheta)$ zu beiden Seiten der Stelle ϑ sich symmetrisch oder doch nahezu symmetrisch verhält, mögen dabei die Werthe von $\psi(\vartheta \pm \alpha)$ bei unbegrenzt abnehmendem α auch über alle Grenzen wachsen oder unendlich viele Oscillationen mit beliebig grosser Amplitude aufweisen.

Eine hinreichende Bedingung für die Convergenz des Integrals (C) bildet offenbar diejenige des Integrals:

(D) $$\int_0^{\varepsilon} \left| \frac{\psi(\vartheta + \alpha) - \psi(\vartheta - \alpha)}{\alpha} \right| \cdot d\alpha,$$

also die absolute Integrabilität von $\frac{1}{\alpha}\{\psi(\vartheta + \alpha) - \psi(\vartheta - \alpha)\}$ in der Umgebung von $\alpha = 0$. Dieselbe zieht dann, wegen $|\cos n\alpha| \leqq 1$, sofort auch die Convergenz des Grenzwerthes (C) und somit schliesslich diejenige der Reihe für $\varphi(\vartheta)$, sowie die Gültigkeit der Beziehung (28) nach sich. Setzt man für den gerade betrachteten Werth ϑ:

(30) $$\psi(\vartheta + \alpha) - \psi(\vartheta - \alpha) = \Delta(\alpha),$$

so mag $\Delta(\alpha)$ als das mittlere Stetigkeitsmaass von $\psi(\vartheta)$

[1]) Näheres s. Nr. 6 dieses Paragraphen.

für jene Stelle ϑ bezeichnet werden. Die Convergenz des Integrals (D) ist dann gesichert, wenn bei $\lim \alpha = +0$:

$$(31) \quad |\varDelta(\alpha)| \underset{\infty}{\leq} \left(\lg_1 \frac{1}{\alpha} \cdot \lg_2 \cdot \frac{1}{\alpha} \ldots \lg_k \frac{1}{\alpha}\right)^{-1} \cdot \left(\lg_k \frac{1}{\alpha}\right)^{-\varrho} \quad (\varrho > 0),$$

da in diesem Falle

$$\left|\frac{\psi(\vartheta+\alpha) - \psi(\vartheta-\alpha)}{\alpha}\right| \underset{\infty}{\leq} \frac{d}{d\alpha}\left(\lg_k \frac{1}{\alpha}\right)^{-\varrho},$$

also in der Umgebung von $\alpha = 0$ integrabel ausfällt. Dabei darf eventuell $\varDelta(\alpha)$ im Intervalle $0 \leqq \alpha \leqq \varepsilon$ noch unendlich oft das Vorzeichen wechseln. Findet dies wirklich statt, so ist die Convergenz des Integrals (D) und somit auch die Bedingung (31) sehr weit davon entfernt, eine für die Convergenz des Integrals (B), (C) und somit für diejenige der Reihe $\varphi(\vartheta)$ nothwendige Bedingung zu liefern. Setzt man z. B. $\psi(\vartheta) = \sin \frac{1}{\vartheta}$, so nimmt das Integral (B) für $\vartheta = 0$ die Form an:

$$(32) \qquad 2\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\alpha} \cdot \sin \frac{1}{\alpha} \cdot d\alpha \quad \left(= 2\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot d\alpha\right),$$

ist also convergent, während $\varDelta(\alpha) = 2 \sin \frac{1}{\alpha}$ in diesem Falle überhaupt nicht mit α verschwindet, sondern mit unendlich vielen Zeichenwechseln um Null oscillirt. Ja es convergirt hier sogar auch der Grenzwerth (C), d. h.:

$$(33) \qquad \lim_{n=\infty} 2\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\alpha} \cdot \sin \frac{1}{\alpha} \cdot \cos n\alpha \cdot d\alpha,$$

also schliesslich die Reihe $\varphi(0)$, d. h. die Reihe für $\cos \frac{1}{\vartheta}$ an der Stelle $\vartheta = 0$. Dies kann zwar aus den bereits oben[1]) citirten allgemeinen Untersuchungen Du Bois Reymond's gefolgert werden. Da es indessen bei der complicirten Be-

[1]) p. 70, Fussnote.

schaffenheit derselben ziemlich schwierig und zeitraubend ist, in die betreffenden Entwickelungen genügende Einsicht zu erlangen, so mag es vielleicht nicht ganz überflüssig erscheinen, den Weg anzugeben, auf welchem das fragliche Resultat direkt abgeleitet werden kann.

4. Man schreibe in dem Integrale (33) m^2 statt n und bringe dasselbe sodann auf die Form:

$$(34)\qquad \begin{aligned} &2\int_0^{\varepsilon} \sin\frac{1}{\alpha}\cos m^2\alpha\cdot\frac{d\alpha}{\alpha} \\ &= \int_0^{\varepsilon} \sin\left(m^2\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\frac{d\alpha}{\alpha} - \int_0^{\varepsilon} \sin\left(m^2\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\frac{d\alpha}{\alpha}. \end{aligned}$$

Substituirt man in dem ersten der beiden rechts stehenden Integrale:

$$m^2\alpha+\frac{1}{\alpha}=2\beta,$$

so folgt zunächst:

$$\alpha=\frac{1}{m^2}(\beta\pm\sqrt{\beta^2-m^2}),\quad \frac{d\alpha}{d\beta}=\frac{1}{m^2}\left(1\pm\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2-m^2}}\right)=\pm\frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2-m^2}}.$$

Da $\beta=+\infty$ für $\alpha=+0$ und β mit wachsendem α zunächst abnimmt, bis es bei $\alpha=\frac{1}{m}$ den Minimalwerth $\beta=m$ erreicht, so hat man zu setzen

für $0\leqq\alpha\leqq\frac{1}{m}$: $\alpha=\frac{1}{m^2}(\beta-\sqrt{\beta^2-m^2}),\ d\alpha=-\frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2-m^2}}\cdot d\beta,$

für $\frac{1}{m}\leqq\alpha\leqq\varepsilon$: $\alpha=\frac{1}{m^2}(\beta+\sqrt{\beta^2-m^2}),\ d\alpha=\frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2-m^2}}\cdot d\beta,$

sodass also:

$$(35)\qquad \begin{aligned} &\int_0^{\varepsilon}\sin\left(m^2\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\frac{d\alpha}{\alpha} \\ &=\int_m^{\infty}\frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2-m^2}}\cdot d\beta+\int_m^{\frac{1}{2}\left(m^2\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\right)}\frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2-m^2}}\cdot d\beta. \end{aligned}$$

Da für $\beta = m$ der Nenner nur von der Ordnung $\frac{1}{2}$ unendlich wird, so wird die Convergenz der Integrale hierdurch nicht alterirt. Man hat zunächst:

$$\left| \int_m^{m+p} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{p^2 - m^2}} \cdot d\beta \right| < \int_m^{m+p} \frac{d\beta}{\sqrt{\beta^2 - m^2}} = \lg \frac{m + p + \sqrt{2pm + p^2}}{m}$$

also:

$$(36) \qquad \lim_{m=\infty} \int_m^{m+p} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2 - m^2}} \cdot d\beta = 0,$$

wenn p eine feste endliche (oder auch schwächer als m in's Unendliche wachsende) Zahl bedeutet. Die restirenden Integrale:

$$(37) \qquad \int_{m+p}^{\infty} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2 - m^2}} \cdot d\beta, \qquad \int_{m+p}^{\frac{1}{2}\left(m^2\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2 - m^2}} \cdot d\beta$$

können durch Zerlegung des Integrations-Intervalles in Theil-Intervalle von der Form $[k\pi, (k + \frac{1}{2})\pi]$, $[(k + \frac{1}{2})\pi, (k + 1)\pi]$ in eine unendliche bezw. endliche Reihe von numerisch beständig abnehmenden Termen mit alternirendem Vorzeichen umgeformt werden. Da es freisteht p und ε so zu wählen, dass $m + p$, $\frac{1}{2}\left(m^2\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)$ ganze Multipla von π sind, so ist die Summe einer jeden dieser Reihen kleiner als das Anfangsglied:

$$\int_{m+p}^{m+p+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2 - m^2}} d\beta \ \ (\text{wo } m + p = k\pi), \text{ d. h.} < \frac{1}{\sqrt{2pm + p^2}},$$

sodass die betreffenden Grenzwerthe für $\lim m = \infty$ verschwinden. Durch Zusammenfassung dieses Resultates mit Gl. (36) ergiebt sich also:

$$(38) \qquad \lim_{m=\infty} \int_0^{\varepsilon} \sin\left(m^2\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \frac{d\alpha}{\alpha} = 0.$$

Noch etwas einfacher gestaltet sich der entsprechende Beweis für das letzte Integral der Gleichung (34). Die Substitution:

$$m^2 \alpha - \frac{1}{\alpha} = 2\beta$$

liefert zunächst:

$$\alpha = \frac{1}{m^2}\left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + m^2}\right), \quad \frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{1}{m^2}\left(1 \pm \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + m^2}}\right) = \pm \frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2 + m^2}}.$$

Da aber $\beta = -\infty$ für $\alpha = +0$ und sodann β mit wachsendem α beständig zunimmt, so entfällt hier die Zerlegung des betreffenden Integrations-Intervalles in zwei Theile, und zwar hat man zu setzen:

$$\alpha = \frac{1}{m^2}\left(\beta + \sqrt{\beta^2 + m^2}\right), \quad d\alpha = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2 - m^2}} \cdot d\beta$$

also:

$$(39) \qquad \int_0^{\varepsilon} \sin\left(m^2 \alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \frac{d\alpha}{\alpha}$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}\left(m^2\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\right)} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2 + m^2}}\, d\beta = \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}\left(m^2\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\right)} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2 + m^2}} \cdot d\beta$$

(da allgemein: $\int_{-A}^{+A} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2 + m^2}} \cdot d\beta = 0$) und, wenn man schliesslich noch $-\beta$ statt β als Integrations-Variable einführt:

$$(40) \qquad \int_0^{\varepsilon} \sin\left(m^2 \alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \frac{d\alpha}{\alpha} = -\int_{\frac{1}{2}\left(m^2\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\right)}^{\infty} \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{\beta^2 + m^2}} \cdot d\beta,$$

ein Integral, dessen Verschwinden für $\lim m = \infty$ sich in derselben Weise ergiebt, wie für das erste der Integrale (37). Somit findet man schliesslich, wie behauptet (Gl. (33)):

$$\lim_{n=\infty} \int_0^\varepsilon \sin\frac{1}{a} \cdot \cos n\,a \cdot \frac{d\,a}{a} = 0.$$

Ich bemerke hierzu noch, dass das Verschwinden von

$$(41) \qquad \lim_{n=\infty} \int_0^\varepsilon \sin\frac{1}{a} \cdot \sin n\,a \cdot \frac{d\,a}{a}, \quad \lim_{n=\infty} \int_0^\varepsilon \cos\frac{1}{a} \cdot \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} n\,a \cdot \frac{d\,a}{a}$$

in analoger Weise bewiesen werden kann. Und da die Integrale:

$$(42) \qquad \int_0^\varepsilon \sin\left(\frac{1}{2}\cot\frac{a}{2}\right) \cdot \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} n\,a \cdot \frac{d\,a}{a}, \quad \int_0^\varepsilon \cos\left(\frac{1}{2}\cot\frac{a}{2}\right) \cdot \left.\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\} n\,a \cdot \frac{d\,a}{a}$$

(wegen: $\frac{1}{a} - \frac{1}{2}\cot\frac{a}{1} \cong \frac{a}{12}$, s. Gl. (25)) offenbar das analoge Verhalten zeigen, so ergiebt sich (durch jede der beiden Formeln (27) und (29)) die Convergenz der in § 3, Nr. 1 betrachteten Reihe:

$$(43) \qquad f(e^{\vartheta i}) = e^{\frac{1}{2}} \left\{ \cos\left(\frac{1}{2}\cot\frac{\vartheta}{2}\right) - i \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\cot\frac{\vartheta}{2}\right) \right\}$$

für $\vartheta = 0$, d. h. der Mac Laurin'schen Entwickelung von $e^{\frac{x}{x-1}}$ an der Stelle $x = 1$.

5. Erleidet $\varDelta(a)$ (Gl. (30)) in der Umgebung der betrachteten Stelle ϑ nicht unendlich viele Zeichenwechsel,[1]) so wird bei hinlänglicher Verkleinerung von a durchweg $\varDelta(a) = |\varDelta(a)|$ oder $= -|\varDelta(a)|$, und die Bedingung der absoluten Integrabilität von $\frac{1}{a} \cdot \varDelta(a)$ ist dann keine andere als die der einfachen Integrabilität. Auch in diesem Falle ist die Bedingung (31) keine nothwendige für die Convergenz der Integrale (B), (C), aber sie nähert sich bei unbegrenzter Vergrösserung

---

[1]) Damit ist keineswegs ausgeschlossen, dass $\psi(\vartheta)$ in der fraglichen Umgebung noch unendlich viele Maxima und Minima besitzen kann.

von $\varkappa$ und Verkleinerung von ϱ dem Charakter einer nothwendigen Bedingung in dem Sinne, dass im Falle:

$$(44) \qquad |\varDelta(\alpha)| \geqq \left(\lg_1 \frac{1}{\alpha} \cdot \lg_2 \frac{1}{\alpha} \cdots \lg_\varkappa \frac{1}{\alpha}\right)^{-1} = \lambda_\varkappa(\alpha),$$

nicht nur jedes der Integrale (B) und (C), sondern auch der Grenzwerth (A) und somit schliesslich die Reihe $\varphi(\vartheta)$ eigentlich divergirt.

Um dies nachzuweisen, werde also angenommen, dass für $0 < \alpha \leqq \varepsilon$:

$$(45) \qquad \varDelta(\alpha) \geqq g \cdot \lambda_\varkappa(\alpha) \quad \text{bezw.} \leqq -g \cdot \lambda_\varkappa(\alpha)$$

(wobei ε von vornherein so klein anzunehmen ist, dass $\lg_\varkappa \frac{1}{\varepsilon}$ und somit auch $\lambda_\varkappa(\alpha)$ positiv ausfällt). Alsdann hat man behufs Abschätzung des Grenzwerthes (A) zunächst:

$$(46) \qquad \left|\int_0^\varepsilon \frac{\varDelta(\alpha)}{\alpha} \cdot (1 - \cos n\alpha) \cdot d\alpha\right| \geqq g \cdot \int_0^\varepsilon \frac{\lambda_\varkappa(\alpha)}{\alpha} (1 - \cos n\alpha) \cdot d\alpha,$$

und, wenn n von vornherein so gross angenommen wird, dass $\frac{1}{n} < \varepsilon$:

$$(47) \qquad \int_0^\varepsilon \frac{\lambda_\varkappa(\alpha)}{\alpha} \cdot (1 - \cos n\alpha) \cdot d\alpha = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\lambda_\varkappa(\alpha)}{\alpha} \cdot (1 - \cos n\alpha) \cdot d\alpha$$

$$+ \int_{\frac{1}{n}}^\varepsilon \frac{\lambda_\varkappa(\alpha)}{\alpha} \cdot d\alpha - \int_{\frac{1}{n}}^\varepsilon \frac{\lambda_\varkappa(\alpha)}{\alpha} \cdot \cos n\alpha \cdot d\alpha$$

$$= N_1 + N_2 - N_3.$$

Dabei ergiebt sich unmittelbar:

$$(48) \qquad N_2 = \int_{\frac{1}{n}}^\varepsilon \frac{d\alpha}{\alpha \cdot \lg_1 \frac{1}{\alpha} \cdots \lg_\varkappa \frac{1}{\alpha}} = -\left[\lg_{\varkappa+1} \frac{1}{\alpha}\right]_{\frac{1}{n}}^\varepsilon = \lg \frac{\lg_\varkappa n}{\lg_\varkappa \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Die Integrale N_1 und N_3 nehmen durch Einführung von $\frac{\alpha}{n}$ an Stelle von α die folgende Form an:

$$(49) \quad N_1 = \int_0^1 \lambda_\varkappa\left(\frac{\alpha}{n}\right) \cdot \frac{1-\cos\alpha}{\alpha} d\alpha, \quad N_3 = \int_1^{n\varepsilon} \frac{\lambda_\varkappa\left(\frac{\alpha}{n}\right)}{\alpha} \cdot \cos\alpha \cdot d\alpha.$$

Da $\lambda_\varkappa\left(\frac{\alpha}{n}\right)$ für $\alpha = 0$ verschwindet und gleichzeitig mit α monoton zunimmt, so hat man:

$$N_1 < \lambda_\varkappa\left(\frac{1}{n}\right) \int_0^1 \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \cdot d\alpha < \lambda_\varkappa\left(\frac{1}{n}\right)$$

d. h.

$$(50) \qquad N_1 = \frac{\vartheta}{\lg_1 n \ldots \lg_\varkappa n}, \text{ wo } 0 < \vartheta < 1,$$

sodass also N_1 für $\lim n = \infty$ verschwindet.

Um zur Abschätzung von N_3 den zweiten Mittelwerthsatz anzuwenden, soll zunächst gezeigt werden, dass $\frac{1}{\alpha} \cdot \lambda_\varkappa\left(\frac{\alpha}{n}\right)$ für $1 \leqq \alpha \leqq n\varepsilon$ monoton, nämlich beständig abnehmend, verläuft. Man hat:

$$\frac{\alpha}{\lambda_\varkappa\left(\frac{\alpha}{n}\right)} = \alpha \cdot \lg_1\left(\frac{n}{\alpha}\right) \cdot \lg_2\left(\frac{n}{\alpha}\right) \cdot\;\; . \lg_\varkappa\left(\frac{n}{\alpha}\right),$$

und daher:

$$(51) \quad \begin{aligned} D_\alpha\left(\frac{\alpha}{\lambda_\varkappa\left(\frac{\alpha}{n}\right)}\right) &= \lg_1\frac{n}{\alpha} \ldots \lg_\varkappa\frac{n}{\alpha}\left\{1 - \frac{\alpha \cdot D_\alpha\left(\lg_1\frac{n}{\alpha} \ldots \lg_\varkappa\frac{n}{\alpha}\right)}{\lg_1\frac{n}{\alpha} \ldots \lg_\varkappa\frac{n}{\alpha}}\right\} \\ &= \lg_1\frac{n}{\alpha} \ldots \lg_\varkappa\frac{n}{\alpha}\left\{1 - \frac{1}{\lg_1\frac{n}{\alpha}} - \frac{1}{\lg_1\frac{n}{\alpha} \cdot \lg_2\frac{n}{\alpha}} - \ldots - \frac{1}{\lg_1\frac{n}{\alpha} \ldots \lg_\varkappa\frac{n}{\alpha}}\right\}. \end{aligned}$$

Da im Integrale N_3 (Gl. (49)):

$$1 \leqq a \leqq n\varepsilon, \quad \text{also: } \frac{1}{\varepsilon} \leqq \frac{n}{a} \leqq n,$$

so ist $\frac{1}{\varepsilon}$ der kleinste Werth, den das Argument $\frac{n}{a}$ bei der Integration annimmt. Man kann nun ε von vornherein klein genug fixiren, sodass $\lg_\varkappa \frac{1}{\varepsilon} > 1$, also um so mehr für jedes in Betracht kommende a: $\lg_\varkappa \frac{n}{a} > 1$. Alsdann wird aber:

$$\lg_{\varkappa-1} \frac{n}{a} > e, \ \lg_{\varkappa-2} \frac{n}{a} > e^e, \text{ u. s. f.},$$

sodass als Summe der in (51) auftretenden k negativen Glieder ein durch Wahl von ε beliebig klein zu machender ächter Bruch resultirt. Hiernach hat man aber für das fragliche Integrations-Intervall:

$$D_a \left(\frac{a}{\lambda_\varkappa\left(\frac{a}{n}\right)} \right) > 0, \tag{52}$$

d. h. $\frac{a}{\lambda_\varkappa\left(\frac{a}{n}\right)}$ nimmt daselbst beständig zu, also $\frac{1}{a} \cdot \lambda_\varkappa\left(\frac{a}{n}\right)$ beständig ab. Und man findet somit auf Grund des zweiten Mittelwerth-Satzes:

$$\begin{aligned} N_3 &= \lambda_\varkappa\left(\frac{1}{n}\right) \int_1^\xi \cos a \cdot d\,a + \frac{1}{n\varepsilon}\, \lambda_\varkappa(\varepsilon) \int_\xi^{n\varepsilon} \cos a \cdot d\,a \\ &= 2\left(\pm \vartheta' \cdot \lambda_\varkappa\left(\frac{1}{n}\right) \pm \frac{\vartheta''}{n\varepsilon} \cdot \lambda_\varkappa(\varepsilon)\right), \quad \text{wo: } 0 < \begin{Bmatrix} \vartheta' \\ \vartheta'' \end{Bmatrix} < 1, \end{aligned} \tag{53}$$

d. h. auch N_3 verschwindet für $\lim n = \infty$.

Mit Berücksichtigung der Gleichungen (48), (50), (53) geht dann schliesslich Gl. (47) in die folgende über:

$$
(54) \qquad \begin{aligned} &\int_0^\varepsilon \frac{\lambda_\varkappa(\alpha)}{\alpha} \cdot (1 - \cos n\,\alpha) \cdot d\,\alpha \\ &= \lg \frac{\lg_\varkappa n}{\lg_\varkappa \frac{1}{\varepsilon}} + (\vartheta \mp 2\,\vartheta')\,\lambda_\varkappa\left(\frac{1}{n}\right) \mp 2\,\vartheta'' \cdot \frac{\lambda_\varkappa(\varepsilon)}{n\,\varepsilon}, \end{aligned}
$$

sodass also dieses Integral für $\lim n = \infty$ so unendlich wird, wie $\lg \frac{\lg_\varkappa n}{\lg_\varkappa \frac{1}{\varepsilon}}$. Aus Ungl. (46) folgt sodann, dass der absolute Werth des zu untersuchenden Integrals d. h. des Grenzwerthes (26) bezw. (A), also auch[1]) derjenige des Grenzwerthes (27) mindestens in derselben Weise unendlich wird und somit die Reihe für $\varphi(\vartheta)$ an der fraglichen Stelle eigentlich divergirt. Man gewinnt auf diese Weise den folgenden Satz:

Die Reihe

$$
\varphi(\vartheta) = \sum_1^\infty{}^\nu (\alpha_\nu \cos \nu\,\vartheta - \beta_\nu \sin \nu\,\vartheta)
$$

ist *eigentlich divergent,* wenn $\psi(\vartheta + \alpha) - \psi(\vartheta - \alpha)$ für $\alpha < \varepsilon$ constantes Vorzeichen besitzt und für $\lim \alpha = 0$ nicht stärker gegen Null convergirt, als $\left(\lg_1 \frac{1}{\alpha} \cdot \lg_2 \frac{1}{\alpha} \cdots \lg_\varkappa \frac{1}{\alpha}\right)^{-1}$ bei beliebig grossem k.

6. Hieraus ergiebt sich aber insbesondere, dass die Reihe für $\varphi(\vartheta)$ an jeder Stelle ϑ eigentlich divergiren muss, in deren Umgebung die Differenz $\psi(\vartheta + \alpha) - \psi(\vartheta - \alpha)$ über einer positiven oder unter einer negativen Zahl bleibt. Dies wird allemal dann der Fall sein, wenn $\psi(\vartheta)$ an der fraglichen Stelle einen gewöhnlichen Sprung[2]) erleidet, d. h. wenn $\psi(\vartheta + 0)$ und $\psi(\vartheta - 0)$ beide existiren und von

---

[1]) s. p. 80, Fussnote.

[2]) Nach Dini's Bezeichnung eine Unstetigkeit erster Art. Vgl. Encykl. der Math. Wissensch. Bd. II, p. 29.

einander verschieden sind; aber auch dann, wenn nur $\underline{\lim}_{\alpha=0}\, \psi(\vartheta+\alpha) > \overline{\lim}_{\alpha=0}\, \psi(\vartheta-\alpha)$ oder $\overline{\lim}_{\alpha=0}\, \psi(\vartheta+\alpha) < \underline{\lim}_{\alpha=0}\, \psi(\vartheta-\alpha)$.[1]) Bezeichnet man jede derartige Unstetigkeit als einen Sprung schlechthin, so kann man also sagen, dass $\varphi(\vartheta)$ allemal eigentlich divergirt, wenn $\psi(\vartheta)$ einen Sprung erleidet. Und da offenbar analog das Auftreten eines Sprunges bei $\varphi(\vartheta)$ die eigentliche Divergenz der Reihe für $\psi(\vartheta)$ nach sich zieht, so ergiebt sich der folgende Satz:

> Die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ mit absolut und beim Uebergange zur Convergenzkreis-Peripherie im allgemeinen gleichmässig integrabler Randfunction $f(e^{\vartheta i})$ ist *eigentlich divergent* an allen Sprungstellen von $f(e^{\vartheta i})$.

Bezeichnet man andererseits als sprunglose Unstetigkeiten solche, bei denen

$$\underline{\lim}_{\alpha=0}\, \psi(\vartheta+\alpha) < \overline{\lim}_{\alpha=0}\, \psi(\vartheta-\alpha), \quad \overline{\lim}_{\alpha=0}\, \psi(\vartheta+\alpha) > \underline{\lim}_{\alpha=0}\, \psi(\vartheta-\alpha)$$

und $\psi(\vartheta)$ in der Nähe der betreffenden Stelle alle zwischen jenen Limites enthaltenen Werthe durchläuft, (wie $\sin\frac{1}{\vartheta}$ bei $\vartheta = 0$), so zeigt das Beispiel der Potenzreihe für $e^{\frac{x}{x-1}}$ (s. den Schluss von Nr. 4 dieses Paragraphen), dass deren Vorkommen die Convergenz der Potenzreihe an der betreffenden Stelle nicht ausschliesst.

Man gelangt also auf Grund dieser Betrachtungen zu dem folgenden, wie mir scheint, neuen und nicht unwichtigen End-Ergebnisse:

> Eine für irgend ein zusammenhängendes Bogenstück ihres Convergenzkreises *convergirende* Potenzreihe unterscheidet sich, als eine aus *zwei*

[1]) Beispiel:

$$\psi(\vartheta) = \lim_{n=\infty} \frac{1-\vartheta^n}{1+\vartheta^n} \cdot \left(1 + \sin^2 \frac{1}{\vartheta - 1}\right)$$

für $\vartheta = 1$.

von einander *abhängigen Fourier*'schen Reihen zusammengesetzte Reihe, in sofern wesentlich von einer *gewöhnlichen Fourier'schen* Reihe, als ihre Summe *niemals Sprünge* erleiden kann. Dagegen ist das Auftreten sprungloser Unstetigkeiten keineswegs ausgeschlossen.

In Folge dieses letzteren Umstandes, muss also jeder Versuch,[1]) aus der blossen Convergenz von $\mathfrak{P}(x)$ auf dem Convergenzkreise die Gleichmässigkeit dieser Convergenz oder auch nur die Stetigkeit der Reihensumme erschliessen zu wollen, von vornherein aussichtslos erscheinen.

In wieweit dagegen umgekehrt aus der Stetigkeit von $f(e^{\vartheta i})$ auf die Convergenz von $\mathfrak{P}(e^{\vartheta i})$ geschlossen werden könne (NB. allemal unter Voraussetzung der Identität von $\mathfrak{P}(e^{\vartheta i})$ mit der Fourier'schen Reihe für $f(e^{\vartheta i})$) — diese Frage erscheint vorläufig noch als eine offene. Denn wenn auch aus den Untersuchungen Du Bois Reymond's[2]) hervorgeht, dass es Functionen $\psi(\vartheta)$ giebt, deren Fourier'sche Entwickelung $\sum (b_\nu \cos \nu \vartheta + a_\nu \sin \nu \vartheta)$ an einer Stetigkeitsstelle $\vartheta = \vartheta'$ divergirt, so bleibt doch immerhin fraglich, ob nun auch das zugehörige $\varphi(\vartheta) = \sum (a_\nu \cos \nu \vartheta - b_\nu \sin \nu \vartheta)$ für $\vartheta = \vartheta'$ ebenfalls stetig ausfällt. Hiernach erscheint es zum mindesten nicht ausgeschlossen, dass die Stetigkeit von $f(e^{\vartheta i})$, d. h. die gleichzeitige Stetigkeit von $\varphi(\vartheta)$ und $\psi(\vartheta)$, stets die Convergenz von $\mathfrak{P}(e^{\vartheta i})$ zur Folge habe. Eine hinreichende Bedingung für diese letztere ergiebt sich im Anschlusse an die Bedingung (31), p. 88, wenn man beachtet, dass:

$$(55) \quad \Delta(\alpha) = \{\psi(\vartheta + \alpha) - \psi(\vartheta)\} - \{\psi(\vartheta - \alpha) - \psi(\vartheta)\},$$

und dass im Falle der Stetigkeit von $\psi(\vartheta)$, wegen: $\psi(\vartheta \pm 0) = \psi(\vartheta)$, die Bedingung:

$$(56) \quad |\psi(\vartheta \pm \alpha) - \psi(\vartheta)| \underset{\sim}{<} \left(\lg_1 \frac{1}{\alpha} \cdots \lg_\varkappa \frac{1}{\alpha}\right)^{-1} \cdot \left(\lg_\varkappa \frac{1}{\alpha}\right)^{-\varrho} \quad (\varrho > 0)$$

---

[1]) Vgl. Zeitschr. f. Math. 20 (1875), p. 370; desgl. 29 (1884), p. 128.

[2]) Vgl. p. 70, Fussnote.

einerseits die Convergenz der Reihe $\psi(\vartheta)$, andererseits mit Rücksicht auf Gl. (55) die Existenz der Beziehung (31) und somit auch die Convergenz der Reihe $\varphi(\vartheta)$ nach sich zieht. In Folge der zwischen $\psi(\vartheta)$ und $\varphi(\vartheta)$ bestehenden Reciprocität gewinnt man also noch den folgenden Satz:

> Die Reihe $\mathfrak{P}(e^{\vartheta i})$ *convergirt* an jeder Stelle ϑ, für welche der reelle *oder* imaginäre Theil von $f(e^{\vartheta i})$ *stetig* ist und ein der Bedingung (56) genügendes (rechtes und linkes) *Stetigkeitsmaass* besitzt.

7. Die Relation (28), p. 86, nämlich:

$$\varphi(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \{\psi(\vartheta + \alpha) - \psi(\vartheta - \alpha)\} \cdot \cot\frac{\alpha}{2} \cdot d\alpha$$

kann zuweilen mit Vortheil sowohl als Summationsformel, als auch zur Auswerthung gewisser bestimmter Integrale angewendet werden. Dabei ist aber zu beachten, dass sie in der obigen Form nur dann gilt, wenn $\psi(\vartheta)$ über das Intervall $(-\pi, +\pi)$ hinaus periodisch fortgesetzt wird (vgl. p. 86 den Uebergang von Gl. (15) zu Gl. (16)). Wird dagegen $\psi(\vartheta)$ durch einen arithmetischen Ausdruck dargestellt, welcher an sich eine nicht-periodische Fortsetzung besitzt, so hat man die obige Formel durch die folgende, aus Gl. (12), (14), (15) hervorgehende, ohne die betreffende Verschiebung des Integrations-Intervalls zu ersetzen:

$$(57) \qquad \varphi(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-\vartheta}^{\pi-\vartheta} \psi(\vartheta + \alpha) \cdot \cot\frac{\alpha}{2} \cdot d\alpha .$$

Um ein einfaches Beispiel zu geben, werde etwa gesetzt:

$$\psi(\vartheta) = \sum_1^\infty{}^{\nu} (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\sin\nu\vartheta}{\nu} \quad \text{d. h.} = \frac{\vartheta}{2} \quad \text{für } -\pi < \vartheta < +\pi .$$

Alsdann wird:

$$\varphi(\vartheta) = \sum_1^\infty{}^{\nu} (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\cos\nu\vartheta}{\nu},$$

und daher mit Benützung von Gl. (57):

$$\sum_1^\infty {}^\nu (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\cos \nu \vartheta}{\nu} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi-\vartheta}^{\pi-\vartheta} (\vartheta + a) \cdot \cot \frac{a}{2} \cdot d\,a$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi-\vartheta}^{\pi-\vartheta} a \cdot \cot \frac{a}{2} \cdot d\,a,$$

(da: $\int_{-\pi-\vartheta}^{\pi-\vartheta} \vartheta \cdot \cot \frac{a}{2} \cdot d\,a = \vartheta \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cot \frac{a}{2} \cdot d\,a = 0$). Ferner hat man:

$$\int_{-\pi-\vartheta}^{\pi-\vartheta} a \cdot \cot \frac{a}{2} \cdot d\,a = \int_{-\pi-\vartheta}^{-\pi} a \cdot \cot \frac{a}{2} \cdot d\,a + \int_{-\pi}^{\pi-\vartheta} a \cdot \cot \frac{a}{2} \cdot d\,a$$

$$= \int_{\pi-\vartheta}^{\pi} (a - 2\pi) \cdot \cot \frac{a}{2} \cdot d\,a + \int_{-\pi}^{\pi-\vartheta} a \cdot \cot \frac{a}{2} \cdot d\,a$$

$$= -4\pi \cdot \left[\lg \sin \frac{a}{2} \right]_{\pi-\vartheta}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} a \cdot \cot \frac{a}{2} \cdot d\,a,$$

also:

$$\sum_1^\infty {}^\nu (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\cos \nu \vartheta}{\nu} = \lg \cos \frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} a \cdot \cot \frac{a}{2} \cdot d\,a.$$

Daraus ergiebt sich für $\vartheta = 0$:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} a \cdot \cot \frac{a}{2} \cdot d\,a = \sum_1^\infty {}^\nu (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{\nu} = \lg 2$$

(wie Legendre[1]) auf anderem Wege gefunden hat) und somit schliesslich:

$$\sum_1^\infty {}^\nu (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\cos \nu \vartheta}{\nu} = \lg \left(2 \cos \frac{\vartheta}{2} \right).$$

---

[1]) Exercices sur le calcul intégral, T. II, p. 200.

Ueber den sogenannten zweiten Mittelwerthsatz für endliche Summen und Integrale.

Von

Alfred Pringsheim.

Aus den Sitzungsberichten der mathematisch-physikalischen Classe der k. bayer. Akad. d. Wiss. 1900. Bd. XXX. Heft II.

München 1900.

Druck der Akademischen Buchdruckerei von F. Straub.



Ueber den sogenannten zweiten Mittelwerthsatz für endliche Summen und Integrale.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 13. Juni.*)

Der sogenannte zweite Mittelwerthsatz der Integral-Rechnung existirt in zwei verschiedenen Formen:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(I)} & \int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx = f(a)\int_a^\xi \varphi(x)\cdot dx \\ \text{(II)} & \int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx = f(a)\cdot\int_a^\xi \varphi(x)\cdot dx + f(b)\int_\xi^b \varphi(x)\cdot dx\end{array}\right\}(a \leqq \xi \leqq b),$$

die erste im wesentlichen von O. Bonnet,[1] die zweite von P. Du Bois-Reymond[2] herrührend. Dabei wird $f(x)$ in Gl. (I) für $a \leqq x \leqq b$ als positiv und niemals zunehmend, in (II) lediglich als monoton (niemals zu- oder niemals abnehmend) vorausgesetzt. Trotzdem nun der Satz (I) unter specielleren Voraussetzungen besteht, als der Satz (II), so ist er doch der allgemeinere von beiden. Denn während es,

[1]) Journal de Math. T. 14 (1849), p. 249. — Mémoires Acad. Belg. T. 23 (1850), p. 8. — B. giebt statt Gl. (I) die Ungleichungen:

$$A\cdot f(a) \leqq \int_a^b \varphi(x)\cdot dx \leqq B\cdot f(a),$$

wo A, B das Minimum und Maximum von $\int_a^\xi \varphi(x)\cdot dx$ für $a \leqq \xi \leqq b$ bedeuten.

[2]) Journ. f. Math. Bd. 69 (1868), p. 82.

ausser in dem besonderen Falle $f(b) = 0$, zunächst unmöglich ist, den Satz (I) aus (II) herzuleiten, so ergiebt sich, wenn auch $f(x)$ lediglich als monoton vorausgesetzt wird, allemal die Anwendbarkeit des Satzes (I) auf $\pm f(x) + C$ (bei passender Wahl des zweifelhaften Vorzeichens und Limitirung von C), sodass ein noch etwas allgemeinerer Satz, als (II) resultirt, der schliesslich durch Specialisirung von C auch Gl. (II) liefert. Mit anderen Worten: Satz (I) ist keineswegs ein specieller Fall von (II), vielmehr erscheint (II) als ein blosses Corollar zu (I). Und da die Gleichung (I) für mancherlei Anwendungen die bei weitem bequemere ist, so findet man auch in den meisten Lehrbüchern zunächst die Bonnet'sche Form (I) als den eigentlichen Hauptsatz bewiesen und die Du Bois-Reymond'sche Form (II) auf dem eben angegebenen Wege daraus abgeleitet.[1]) Sogar Herr C. Neumann, der in der Vorrede (p. IV) seines Buches über Kugel-Functionen (Leipzig 1881)[2]) den Bonnet'schen Satz sehr kurz als einen „speciellen Fall" des Du Bois-Reymond'schen abthut, um dann diesen letzteren über Gebühr zu preisen, beweist schliesslich (p. 29 ff.) doch vor allem den Bonnet'schen Satz (I) unter der falschen Bezeichnung des „Du Bois-Reymond'schen" Mittelwerthsatzes[3]) und gewinnt daraus den Satz (II) als „Allgemeinere Form des Du Bois'schen Satzes" — eine Bezeichnung, die ebenfalls nicht correct erscheint, da der Satz (II), wie bemerkt, den Satz (I) zunächst nicht in sich enthält.

Nun existirt aber in der That eine solche allgemeinere Form des Satzes (II), die mir freilich in keiner seiner zahl-

---

[1]) Dabei wird dann gewöhnlich in (II) statt $f(a)$, $f(b)$ noch speciell $f(a+0)$, $f(b-0)$ geschrieben.

[2]) Der vollständige Titel lautet: Ueber die nach Kreis-, Kugel- und Cylinder-Functionen fortschreitenden Entwickelungen, unter durchgängiger Anwendung des Du Bois-Reymond'schen Mittelwerthsatzes.

[3]) Ebenso wenig scheint es angemessen, wenn Herr C. Jordan in seinem Cours d'Analyse (T. II, 2ième éd., p. 220) den Satz (II) schlechthin als von Bonnet herrührend bezeichnet, ohne den Namen Du Bois-Reymond's überhaupt zu erwähnen.

reichen Darstellungen begegnet ist, die aber von Du Bois-Reymond zwar nicht bei jener oben erwähnten ersten Formulirung oder einer späteren Vervollständigung des betreffenden Beweises,[1]) sondern bei anderer Gelegenheit kurz angegeben worden ist. In einer Besprechung der Thomae'schen Schrift: „Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale“ (Halle, 1875)[2]) bemerkt er nämlich ausdrücklich, dass man in (II) statt $f(a)$ bezw. $f(b)$ auch jede Zahl $< f(a+0)$ bezw. $\geqq f(b-0)$ (scil., wenn $f(x)$ als niemals abnehmend vorausgesetzt wird) substituiren kann, ohne dass ξ das Intervall $a \leqq \xi \leqq b$ verlässt. Die dafür einzig gegebene Begründung: „das Integral links bleibt dabei unverändert“ — scheint mir freilich unzulänglich; denn das Integral links bleibt ja auch unverändert, wenn man $f(a)$, $f(b)$ durch irgendwelche ganz beliebige Zahlen ersetzt. Es wäre daher zur genaueren Prüfung jener Bemerkung eine nochmalige Revision des betreffenden Beweises erforderlich,[3]) die dann in der That ihre Richtigkeit ergiebt. Man gewinnt auf diese Weise an Stelle des Satzes (II) den folgenden:

$$\text{(III)} \quad \begin{aligned} &\int_a^b f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx \\ &= A\int_a^\xi \varphi(x) \cdot dx + B\int_\xi^b \varphi(x) \cdot dx \begin{cases} \text{wo:} & A \leqq f(a+0) < f(b-0) \leqq B, \\ \text{oder:} & A \geqq f(a+0) > f(b-0) \geqq B, \end{cases} \end{aligned}$$

welcher dann in der That nicht nur diesen letzteren, sondern auch den Satz (I) als speciellen Fall enthält.[4]) Hierbei

---

[1]) Journ. f. Math. Bd. 79 (1875), p. 42, Fussnote.

[2]) Zeitschr. f. Math. Bd. 20 (1875), Hist.-lit. Abth., p. 126.

[3]) Man kann sich dabei mit Vortheil der gerade von Herrn Thomae (a. a. O. p. 18) benützten Methode bedienen, dass man setzt:

$$\int_a^b f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx = \int_{a'}^{b'} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx,$$

wo: $a' < a < b < b'$ und $\varphi(x) = 0$ für $a' \leqq x \leqq a$ und $b \leqq x < b'$, während $f(x)$ in den hinzugefügten Intervallen bis auf die Monotonie-Bedingung willkürlich bleibt.

[4]) Vgl. Du Bois-Reymond, Zur Geschichte der trigonometrischen Reihen (Tübingen, [1880]), p. 58.

frappirt nun zunächst die ausserordentlich grosse Willkürlichkeit der beiden mit A, B bezeichneten Zahlen, und es gewinnt wohl zunächst den Anschein, als ob dieselbe auf einer infinitesimalen Eigenschaft des bestimmten Integrals beruhe, nämlich auf dem Umstande, dass die zu integrirende Function für die Stellen einer beliebigen unausgedehnten Punktmenge ganz willkürlich gedacht bezw. abgeändert werden darf, ohne dass der Integralwerth selbst eine Veränderung erleidet. Es erschien mir nun nicht ohne Interesse, festzustellen, dass die Willkürlichkeit in der Auswahl jener Zahlen A, B in Wahrheit ganz elementaren arithmetischen Ursprunges ist, indem nämlich auch für gewöhnliche endliche Summen ein Mittelwerthsatz besteht, der genau die Bauart der Formel (III) besitzt und deren eigentliche Grundlage bildet. Dieser, aus einer einfachen und sehr naheliegenden Umformung der bekannten Abel'schen Transformationsformel (partiellen Summation) hervorgehende Mittelwerthsatz wird in § 1 der folgenden Mittheilung zunächst abgeleitet und des näheren discutirt. In § 2 gebe ich dann einen darauf beruhenden Beweis der Integral-Formel (III), der mir mehr als irgend einer der bisherigen Beweise die äusserst erreichbare Allgemeinheit mit genügender Einfachheit zu verbinden scheint. Zur näheren Begründung dieser Ansicht werden dann noch in § 3 einige historische und kritische Bemerkungen über jene früheren Beweise hinzugefügt.

---

§ 1. Die Abel'sche Transformation und die daraus resultirenden Mittelwerthsätze für endliche Summen.

1. Es seien u_ν, v_ν $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ beliebig vorgelegte Zahlen und

$$S_n = \sum_1^n{}^{\nu}\, u_\nu\, v_\nu\,. \tag{1}$$

Setzt man sodann:

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_\nu = V_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots n), \tag{2}$$

so ergiebt sich mit Hülfe der Substitution von

$$v_1 = V_1, \quad v_\nu = V_\nu - V_{\nu-1} \quad (\nu = 2, \dots n)$$

in Gl. (1) die bekannte Abel'sche Transformations-Gleichung:

$$(3) \qquad S_n = \sum_1^{n-1} {}^\nu (u_\nu - u_{\nu+1}) \cdot V_\nu + u_n V_n .$$

Um derselben eine etwas allgemeinere, für die weiteren Schlüsse zweckmässige Gestalt zu geben, bezeichne ich mit u_0, u_{n+1} zwei vollkommen willkürlich anzunehmende Zahlen, mit V_0 die Null. Alsdann besteht die Identität:

$$(4) \qquad 0 = (u_0 - u_1) \cdot V_0 - u_{n+1} V_n + u_{n+1} V_n$$

und es ergiebt sich, wenn man dieselbe zu Gleichung (3) addirt:

$$(\mathrm{A}) \qquad S_n = \sum_0^{n} {}^\nu (u_\nu - u_{\nu+1}) \cdot V_\nu + u_{n+1} V_n .$$

2. Es seien jetzt die Zahlen $u_1, u_2, \dots u_n$ reell und so gegeben, dass sie eine monotone (gleichgültig ob niemals zu- oder niemals abnehmende) Folge bilden; und es mögen sodann u_0, u_{n+1} im übrigen zwar willkürlich, jedoch so angenommen werden, dass sie sich dieser monotonen Folge anschliessen (welcher Bedingung u. a. stets genügt wird, wenn man speciell $u_0 = u_1$, $u_{n+1} = u_n$ setzt). Ferner werde allgemein durch die Symbole:

$$\operatorname*{Max}_{\nu=m}^{\nu=m+p} (a_\nu) \qquad \operatorname*{Min}_{\nu=m}^{\nu=m+p} (a_\nu) \qquad \operatorname*{\mathfrak{M}}_{\nu=m}^{\nu=m+p} (a_\nu)$$

das Maximum, das Minimum, ein Mittelwerth

aus irgendwelchen Zahlen $a_m, a_{m+1}, \dots a_{m+p}$ bezeichnet.

Alsdann ergeben sich im Falle $u_\nu - u_{\nu+1} \geq 0$ aus Gl. (A) die Ungleichungen:

$$(\mathrm{B}) \qquad S_n \begin{Bmatrix} > (u_0 - u_{n+1}) \cdot \operatorname*{Min}_{\nu=0}^{\nu=n} (V_\nu) \\ < (u_0 - u_{n+1}) \cdot \operatorname*{Max}_{\nu=0}^{\nu=n} (V_\nu) \end{Bmatrix} + u_{n+1} V_n$$

und entsprechend im Falle $u_\nu - u_{\nu+1} \leqq 0$ die durch Vertauschung der Zeichen $\gtrless$ hieraus hervorgehenden. Man erhält daher in jedem dieser beiden Fälle, d. h. wenn die u_ν eine monotone Folge bilden, den folgenden Mittelwerthsatz:

$$\text{(C)} \qquad S_n = (u_0 - u_{n+1}) \cdot \mathfrak{M}_{\nu=0}^{\nu=n} (V_\nu) + u_{n+1} V_n$$
$$= u_0 \cdot \mathfrak{M}_{\nu=0}^{\nu=n} (V_\nu) + u_{n+1} (V_n - \mathfrak{M}_{\nu=0}^{\nu=n} (V_n)).$$

Da $\mathfrak{M}_{\nu=0}^{\nu=n} (V_\nu)$ einen mittleren Werth aus den Zahlen $V_0, V_1, \ldots V_n$ bedeutet, so muss es entweder mindestens ein bestimmtes $m < n$ geben,[1]) sodass:

$$\text{(5)} \qquad \mathfrak{M}_{\nu=0}^{\nu=n} (V_\nu) = V_m;$$

oder es tritt in der Reihe $V_0, V_1, \ldots V_n$ mindestens bei einem bestimmten Index m (wo: $0 \leqq m < n$) der Fall ein:

$$\text{(6)} \qquad V_m < \mathfrak{M}_{\nu=0}^{\nu=n} (V_\nu) < V_{m+1}.$$

Man kann also beide Fälle dahin zusammenfassen, dass:

$$\text{(7)} \qquad \mathfrak{M}_{\nu=0}^{\nu=n} (V_\nu) = V_m + \vartheta (V_{m+1} - V_m), \text{ wo: } 0 \leqq \vartheta < 1,$$

d. h. mit Rücksicht auf die Beziehung: $V_{m+1} - V_m = v_{m+1}$:

$$\text{(8)} \qquad \mathfrak{M}_{\nu=0}^{\nu=n} (V_\nu) = \begin{cases} V_m + \vartheta\, v_{m+1} \\ V_{m+1} - (1 - \vartheta) \cdot v_{m+1}. \end{cases}$$

Durch Einführung der Ausdrücke (6) in den Mittelwerthsatz (C) nimmt dann derselbe noch die folgende Form an:

---

[1]) Wäre $m = n$ d. h. n der erste Index, für welchen:

$$\mathfrak{M}_{\nu=0}^{\nu=n} (V_\nu) = V_n,$$

so müssen $V_0, V_1, \ldots V_{n-1}$ theils unterhalb, theils oberhalb $\mathfrak{M}_{\nu=0}^{\nu=n} (V_\nu)$ liegen, sodass also für ein $m < n - 1$ eine Ungleichung von der Form (6) besteht.

(D) $$S_n = u_0(V_m + \vartheta \cdot v_{m+1}) + u_{n+1}((1-\vartheta)\cdot v_{m+1} + (V_n - V_{m+1}))$$
$$= u_0\left(\sum_1^m{}^{\nu} v_\nu + \vartheta \cdot v_{m+1}\right) + u_{n+1}\left((1-\vartheta)\, v_{m+1} + \sum_{m+2}^n{}^{\nu} v_\nu\right),$$

wo also m eine bestimmte (möglicherweise auf mehrfache Art wählbare) Zahl aus der Reihe $0, 1, \ldots (n-1)$ bedeutet und $0 \leqq \vartheta < 1$. Dabei ist noch anzumerken, dass für die beiden äussersten Fälle $m = 0$ bezw. $m = n - 1$ die Beziehungen bestehen: $V_m \equiv V_0 = 0$ bezw. $V_n - V_{m+1} \equiv V_n - V_n = 0$, sodass man also den in diesen Fällen bei der zweiten Schreibweise auftretenden Symbolen: $\sum_1^0{}^{\nu} v_\nu$ bezw. $\sum_{n+1}^n v_\nu$ die Bedeutung von 0 beizulegen hat.

3. Sind die u_ν nicht nur monoton, sondern auch gleichbezeichnet, in welchem Falle also auch die numerischen Werthe der u_ν eine monotone Folge bilden, so kann man, falls die letzteren niemals zunehmen, also: $|u_\nu| \geqq |u_{\nu+1}|$, über u_{n+1} so verfügen, dass man $u_{n+1} = 0$ setzt; während man $u_0 = 0$ annehmen kann, wenn die $|u_\nu|$ niemals abnehmen, also: $|u_\nu| \leqq |u_{\nu+1}|$. Der Mittelwerthsatz (C) liefert also in diesen beiden Fällen die folgenden Beziehungen:

(E) $$\begin{cases} (1)\ S_n = u_0 \cdot \mathfrak{M}_{\nu=0}^{\nu=n}(V_\nu) & (|u_\nu| \geqq |u_{\nu+1}|), \\ (2)\ S_n = u_{n+1} \cdot (V_n - \mathfrak{M}_{\nu=0}^{\nu=n}(V_\nu)) & (|u_\nu| \leqq |u_{\nu+1}|), \end{cases}$$

die sich mit Hülfe von (D) auch in die folgende Form setzen lassen:

(F) $$\begin{cases} (1)\ S_n = u_0\left(\sum_1^m{}^{\nu} v_\nu + \vartheta \cdot v_{m+1}\right) & (|u_\nu| \geqq |u_{\nu+1}|), \\ (2)\ S_n = u_{n+1}\left((1-\vartheta)\, v_{m+1} + \sum_{m+2}^n{}^{\nu} v_\nu\right) & (|u_\nu| \leqq |u_{\nu+1}|). \end{cases}$$

Hierzu bemerke ich, dass man Gl. (E, 1), nicht aber Gl. (E, 2) auch unmittelbar, d. h. ohne den Weg über Gl. (C) zu nehmen, aus der Fundamental-Formel (A) herleiten kann: man hat dabei nur zu beachten, dass bei gleichbezeichneten u_ν und

$|u_\nu| \geqq |u_{\nu+1}|$ die Differenzen $u_\nu - u_{\nu+1}$ mit den u_ν, also speciell auch mit u_{n+1} gleiches Vorzeichen haben.

Andererseits ist aber hervorzuheben, dass Gl. (E, 1), trotzdem sie durch Einführung einer specielleren Voraussetzung über die u_ν und durch Specialisirung der willkürlichen Grösse u_{n+1} aus Gl. (C) hervorging, doch genau dieselbe Tragweite besitzt, wie die formal allgemeinere Gleichung (C), d. h. dass man auch umgekehrt Gl. (C) ohne weiteres aus Gl. (E, 1) herleiten kann. Denn angenommen, es stehe von den u_ν nur soviel fest, dass $u_\nu \geqq u_{\nu+1}$ $(\nu = 0, 1, \ldots (n-1))$, so wähle man $u_{n+1} \leqq u_n$, im übrigen beliebig. Alsdann bestehen die Beziehungen:

$$(9) \qquad u_\nu - u_{n+1} \geqq u_{\nu+1} - u_{n+1} \geqq 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots (n-1)),$$

sodass also auch:

$$|u_\nu - u_{n+1}| \geqq |u_{\nu+1} - u_{n+1}|.$$

Hat man dagegen: $u_\nu \leqq u_{\nu+1}$ $(\nu = 0, 1, \ldots (n-1))$ und wird sodann $u_{n+1} \geqq u_n$ angenommen, so ergiebt sich:

$$(10) \qquad u_\nu - u_{n+1} \leqq u_{\nu+1} - u_{n+1} \leqq 0,$$

und daher wiederum:

$$|u_\nu - u_{n+1}| \geqq |u_{\nu+1} - u_{n+1}|.$$

Die Terme $(u_\nu - u_{n+1})$ genügen somit, wenn nur die u_ν überhaupt monoton sind, allemal derselben Bedingung, wie die u_ν im Falle der Gleichung (E, 1). Wendet man also diese letztere auf die $(u_\nu - u_{n+1})$ an, so resultirt:

$$(11) \qquad \sum_1^n {}^\nu (u_\nu - u_{n+1}) \cdot v_\nu = (u_0 - u_{n+1}) \cdot \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}} (V_\nu)$$

d. h.

$$\sum_1^n {}^\nu u_\nu v_\nu = u_0 \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) + u_{n+1} \left(V_n - \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\mathfrak{M}}} (V_\nu) \right)$$

in Uebereinstimmung mit Gl. (C).

4. Diese Beziehungen erleiden eine merkliche Verschiebung, wenn man statt von der verallgemeinerten Abelschen Transformations-Formel (A) von deren ursprünglicher

Form (3) ausgeht. An die Stelle des Mittelwerthsatzes (C) tritt dann offenbar der folgende:

$$(C') \qquad S_n = u_1 \mathop{\mathfrak{M}}_{\nu=1}^{\nu=n-1} (V_\nu) + u_n \left(V_n - \mathop{\mathfrak{M}}_{\nu=1}^{\nu=n-1} (V_\nu) \right),$$

dem man (durch Anwendung einer der Relation (8) analogen Transformation auf $\left. \mathop{\mathfrak{M}}_{\nu=1}^{\nu=n-1} (V_\nu) \right)$ auch die folgende Form geben kann:

$$(D') \quad S_n = u_1 \left(\sum_1^m {}^\nu v_\nu + \vartheta \cdot v_{m+1} \right) + u_n \left((1-\vartheta)\, v_{m+1} + \sum_{m+2}^n {}^\nu v_\nu \right),$$

wo jetzt m eine gewisse Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots (n-2)$ bedeutet.[1])

Werden jetzt wiederum die u_ν noch dahin eingeschränkt, dass ausser der Monotonie der u_ν noch die Beziehung $|u_\nu| \geqq |u_{\nu+1}|$ vorausgesetzt wird, so gelangt man von der Gl. (3) zu dem bekannten Abel'schen Lemma:

$$(E') \qquad S_n = u_1 \cdot \mathop{\mathfrak{M}}_{\nu=1}^{\nu=n} (V_\nu),$$

während es andererseits schlechterdings unmöglich erscheint, diese Relation direkt[2]) aus der unter allgemeineren Voraussetzungen bestehenden Formel (C') zu erschliessen. Dagegen kann man umgekehrt durch Anwendung der Formel (E') auf

---

[1]) Es ist das, beiläufig bemerkt, diejenige Formel, welche Du Bois-Reymond (Freiburger Antrittsprogramm, p. 2) sonderbarer Weise als Folgerung aus dem entsprechenden Integralsatze herleitet, während sie doch unmittelbar aus der Abel'schen Transformation resultirt und gerade die Grundlage jenes Integralsatzes bildet.

[2]) D. h. ohne die Formel (C') durch Hinzufügung eines weiteren Summanden u_{n+1}, v_{n+1}, (wo $v_{n+1} = 0$, u_{n+1} nur der Monotonie-Bedingung zu genügen hat) ähnlich wie in Nr. 1 und 2 in die folgende überzuführen:

$$S_n = u_1 \mathop{\mathfrak{M}}_{\nu=1}^{\nu=n} (V_\nu) + u_{n+1} \left(V_n - \mathop{\mathfrak{M}}_{\nu=1}^{\nu=n} (V_\nu) \right),$$

und sodann analog, wie beim Uebergange von Formel (C) zu (E) zu verfahren.

die Terme $(u_\nu - u_n)$, welche wiederum stets der Bedingung $|u_\nu - u_n| \geqq |u_{\nu+1} - u_n|$ genügen, auch wenn von den u_ν lediglich die Monotonie vorausgesetzt wird, ohne weiteres die mit Gl. (C′) im wesentlichen gleichwerthige Beziehung erhalten:

$$S_n = u_0 \mathop{\mathfrak{M}}_{\nu=1}^{\nu=n} (V_\nu) + u_n \left(V_n - \mathop{\mathfrak{M}}_{\nu=1}^{\nu=n} (V_\nu) \right).$$

Es besitzt also hier die unter specielleren Voraussetzungen bestehende Gleichung (E′) in Wahrheit einen weiteren Wirkungskreis, als die unter allgemeineren Bedingungen geltende Formel (C′), d. h. es besteht zwischen den Formeln (E′) und (C′) genau dasselbe Verhältniss, wie zwischen dem Bonnet'schen und dem Du Bois-Reymond'schen Satze (I) und (II).

---

§ 2. Der zweite Mittelwerthsatz für bestimmte Integrale.

1. Lehrsatz. Ist im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ die Function $f(x)$ *endlich* und *monoton*, $\varphi(x)$ und $f(x) \cdot \varphi(x)$ *integrabel*,[1]) so hat man:

$$\int_{x_0}^{X} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx = y_0 \cdot \int_{x_0}^{\xi} \varphi(x) \cdot dx + Y \int_{\xi}^{X} \varphi(x) \cdot dx,$$

wo ξ einen gewissen, der Bedingung $x_0 \leqq \xi \leqq X$ genügenden Werth besitzt, während y_0, Y zwei der *monotonen* Folge der $f(x)$-Werthe bei $x = x_0$ und $x = X$ sich anschliessende, im übrigen willkürliche Zahlen bedeuten, sodass also entweder:

$$y_0 \geqq f(x_0 + 0) > f(X - 0) \geqq Y,$$

oder:

$$y_0 \leqq f(x_0 + 0) < f(X - 0) \leqq Y.$$

---

[1]) Ich nenne $\varphi(x)$ im Intervalle $x_0 \leqq x \leqq X$ integrabel, wenn nicht nur $\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\, dx$, sondern auch $\int_{x_0}^{\xi} \varphi(x)\, dx$ für $x_0 \leqq \xi \leqq X$ existirt.

Bezüglich der in die Voraussetzung aufgenommenen Integrabilitäts-Eigenschaften von $\varphi(x)$ und $f(x) \cdot \varphi(x)$ bemerke ich folgendes. Die Function $f(x)$ ist auf Grund der vorausgesetzten Endlichkeit und Monotonie allemal integrabel, auch wenn sie im übrigen beliebig viele Unstetigkeiten besitzt.[1] Ist dann $\varphi(x)$ endlich und integrabel oder besitzt $\varphi(x)$ nur solche Unendlichkeitsstellen,[2] dass nicht nur $\varphi(x)$, sondern auch $|\varphi(x)|$ integrabel ausfällt, so ist jedesmal $f(x) \cdot \varphi(x)$ eo ipso integrabel.[3] Dies gilt sogar auch dann noch, wenn die als integrabel vorausgesetzte Function $\varphi(x)$ eine endliche Anzahl von Unendlichkeitsstellen besitzt, in deren Umgebung die absolute Integrabilität nicht vorhanden ist.[4] Nur wenn Punkte der letztgenannten Art in unbegrenzter Anzahl auftreten, muss ausser der Integrabilität von $\varphi(x)$ noch diejenige von $f(x) \cdot \varphi(x)$ ausdrücklich in die Voraussetzung aufgenommen werden. Schliesslich sei noch hervorgehoben, dass die Aussage, eine Function $\varphi(x)$, die in irgend einem Intervalle unendlich viele Unendlichkeits-Stellen besitzt, sei daselbst integrabel, allemal die Voraussetzung involvirt, dass jene Stellen eine unausgedehnte Menge bilden: hiermit ist nämlich, meines Wissens, die äusserste Grenze bezeichnet, bis zu welcher der Integral-Begriff überhaupt noch definirbar erscheint.[5]

---

[1]) S. z. B. Dini-Lüroth, p. 338, § 187, 6.

[2]) Also z. B., wie $\frac{1}{x^{1-\varepsilon}}$, $\frac{1}{x^{1-\varepsilon}} \cdot \sin\frac{1}{x}$ bei $x = 0$.

[3]) Dini-Lüroth, p. 346, § 190, 5; — p. 419, § 226.

[4]) Ebendas. p. 422, § 227.

[5]) Herr Dini (a. a. O. p. 406, § 217) beschränkt die Definition auf den Fall, dass die Unendlichkeitsstellen eine Menge erster Gattung bilden (welche dann eo ipso auch unausgedehnt ist — s. z. B. Dini-Lüroth, p. 25, § 14) und beweist auch die Gültigkeit des Mittelwerthsatzes für diesen Fall: Serie di Fourier etc. (Pisa, 1880), p. 22. — Harnack (Math. Ann. Bd. 21 [1883], p. 325; ausführlicher Bd. 24 (1884), p. 220) definirt das Integral für den Fall, dass die Unendlichkeitsstellen eine beliebige unausgedehnte (von ihm als „discret" bezeichnete) Menge ausmachen und beweist (an der zuerst citirten Stelle) ebenfalls

2. Beweis des Lehrsatzes. Man theile das Intervall (x_0, X) durch Einschaltung der Punkte $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ in n Theil-Intervalle, sodass also:

$$(1) \quad J \equiv \int_{x_0}^{X} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx = \sum_1^n{}^{\nu} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx \quad (\text{wo: } x_n = X)$$

gesestzt werden kann. Auf jedes dieser Theil-Integrale wende man die identische Umformung an:

$$(2) \quad \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx = f_\nu(x) \cdot \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx + \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \{f(x) - f(x_\nu)\} \cdot \varphi(x) \cdot dx,$$

und zwar mag hier, falls etwa $f(x)$ an der Stelle x_ν unstetig sein sollte, unter $f_\nu(x)$ der (allemal eindeutig bestimmte) Werth $f(x_\nu - 0)$ verstanden werden: die Zahlen $f(x_\nu)$ bilden dann für $\nu = 1, 2, \ldots n$, wegen der Monotonie von $f(x)$, stets eine monotone Folge.

Durch Einführung der Umformung (2) in die rechte Seite von Gl. (1) ergiebt sich:

$$(3) \qquad J = J_n + R_n$$

wo:

---

den Mittelwerthsatz in dem entsprechenden Umfange. Doch reichen die Erörterungen Harnack's nicht aus, um die Existenz des Integrals in dem Sinne zu gewährleisten, dass gleichzeitig mit $\int_{x_0}^{X} \varphi(x) \cdot dx$ auch das Integral über jedes Theil-Intervall existirt (vgl. Stolz, Wiener Sitz.-Ber. Bd. 107[2] [1898], p. 3; Grundzüge der Diff.- und Integr.-Rechnung, Bd. III, p. 277). Dies ist, wenn die Unendlichkeits-Stellen eine Menge zweiter Gattung bilden, dann und nur dann der Fall, wenn ausser $\varphi(x)$ auch $|\varphi(x)|$ im Harnack'schen Sinne integrabel ist (vgl. Stolz, a. a. O. und Wiener Sitz.-Ber. Bd. 28[2] [1899], p. 1235). Für nicht absolut integrable $\varphi(x)$ muss es daher wohl bei der Dini'schen Voraussetzung sein Bewenden haben, dass die Unendlichkeitsstellen höchstens eine Menge erster Gattung bilden (so auch bei De La Vallée-Poussin, Journ. de Math. (4), T. 8 [1892], p. 453).

(4) $$J_n = \sum_1^n {}^{\nu} f(x_\nu) \cdot \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx$$

(5) $$R_n = \sum_1^n {}^{\nu} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \{ f(x) - f(x_\nu) \} \cdot \varphi(x) \cdot dx.$$

Der ganze Beweis des fraglichen Satzes besteht nun in der Anwendung der Abel'schen Transformation bezw. der daraus resultirenden Mittelwerth-Relation auf J_n und sodann in dem Nachweise, dass R_n bei hinlänglicher Vergrösserung von n beliebig klein wird.

Setzt man, mit Bezugnahme auf die in § 1 benützten Bezeichnungen, für $\nu = 1, 2, \ldots n$:

$$u_\nu = f_\nu(x), \quad v_\nu = \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx, \quad \text{also:} \quad V_\nu = \sum_1^\nu {}^{\nu} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx = \int_{x_0}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx$$

und ausserdem: $u_0 = y_0$, $u_{n+1} = Y$, so nehmen die Ungleichungen (B), welche noch die Voraussetzung $f(x_\nu) \geqq f(x_{\nu+1})$, also $f(x_0) > f(X)$ erheischen, die folgende Form an:

(6) $$J_n \begin{cases} > (y_0 - Y) \cdot \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\text{Min}}} \int_{x_0}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx \\ < (y_0 - Y) \cdot \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\text{Max}}} \int_{x_0}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx \end{cases} + Y \cdot \int_{x_0}^{X} \varphi(x) \cdot dx.$$

Dabei hätte man $Y \leqq f(x_n - 0) = f(X - 0)$ und zunächst nur $y_0 \geqq f(x_1 - 0)$ anzunehmen: dieser letzteren Bedingung wird aber (unabhängig von der Wahl des x_1) a fortiori genügt, wenn man $y_0 \geqq f(x_0 + 0)$ festsetzt.

Zieht man jetzt statt der n Integrale $\int_{x_0}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx \; (\nu = 1, 2, \ldots n)$ alle möglichen Werthe des Integrals $\int_{x_0}^{x'} \varphi(x) \cdot dx$ für $x_0 \leqq x' < X$ in Betracht, so bestehen offenbar die Beziehungen:

$$(7)\quad \underset{x'=x_0}{\overset{x'=X}{\text{Min}}} \int_{x_0}^{x'} \varphi(x)\cdot dx \leqq \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\text{Min}}} \int_{x_0}^{x_\nu} \varphi(x)\cdot dx, \quad \underset{x'=x_0}{\overset{x'=X}{\text{Max}}} \int_{x_0}^{x'} \varphi(x)\cdot dx \geqq \underset{\nu=0}{\overset{\nu=n}{\text{Max}}} \int_{x_0}^{x_\nu} \varphi(x)\cdot dx,$$

sodass aus den Ungleichungen (6) a fortiori die folgenden sich ergeben:

$$(8)\qquad J_n \left\{ \begin{array}{l} > (y_0 - Y)\cdot \underset{x'=x_0}{\overset{x'=X}{\text{Min}}} \int_{x_0}^{x'} \varphi(x)\cdot dx \\ < (y_0 - Y)\cdot \underset{x'=x_0}{\overset{x'=X}{\text{Max}}} \int_{x_0}^{x'} \varphi(x)\cdot dx \end{array} \right\} + Y\cdot \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\cdot dx,$$

bei denen jetzt der Einfluss von n auf der rechten Seite vollständig eliminirt erscheint. Angenommen nun, man könne durch passende Vergrösserung von n bei jedem $\varepsilon > 0$ erzielen, dass:

$$(9)\qquad |R_n| < \varepsilon, \text{ also } R_n \left\{ \begin{array}{l} > -\varepsilon \\ < +\varepsilon, \end{array} \right.$$

so ergiebt sich durch Addition der beiden letzten Ungleichungen zu den entsprechenden Ungleichungen (8):

$$(10)\qquad J \left\{ \begin{array}{l} > (y_0 - Y)\cdot \underset{x'=x_0}{\overset{x'=X}{\text{Min}}} \int_{x_0}^{x'} \varphi(x)\cdot dx - \varepsilon \\ < (y_0 - Y)\cdot \underset{x'=x_0}{\overset{x'=X}{\text{Max}}} \int_{x_0}^{x'} \varphi(x)\cdot dx + \varepsilon \end{array} \right\} + Y\cdot \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\cdot dx$$

und somit, da ε die untere Grenze Null besitzen sollte:

$$(11)\qquad J \left\{ \begin{array}{l} \geqq (y_0 - Y)\cdot \underset{x'=x_0}{\overset{x'=X}{\text{Min}}} \int_{x_0}^{x'} \varphi(x)\cdot dx \\ \leqq (y_0 - Y)\cdot \underset{x'=x_0}{\overset{x'=X}{\text{Max}}} \int_{x_0}^{x'} \varphi(x)\cdot dx \end{array} \right\} + Y\cdot \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\cdot dx.$$

Die entsprechenden Beziehungen mit Vertauschung der Zeichen $\gtreqless$ ergeben sich im Falle $f(x_0) > f(X)$. Man hat also, sofern nur $f(x)$ für $x_0 \leqq x < X$ monoton ist,

$$(12)\qquad J = (y_0 - Y)\cdot \underset{x'=x_0}{\overset{x'=X}{\mathfrak{M}}} \left(\int_{x_0}^{x'} \varphi(x)\, dx \right) + Y\cdot \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\cdot dx$$

und da man dem betreffenden Mittelwerthe wegen der Stetigkeit von $\int_{x_0}^{x'} \varphi(x) \cdot dx$ die Form: $\int_{x_0}^{\xi} \varphi(x) \cdot dx$, wo: $x_0 \leqq \xi < X$ geben kann, schliesslich, wie behauptet:

$$(13) \qquad J = (y_0 - Y) \cdot \int_{x_0}^{\xi} \varphi(x) \cdot dx + Y \cdot \int_{x_0}^{X} \varphi(x) \cdot dx$$
$$= y_0 \cdot \int_{x_0}^{\xi} \varphi(x) \cdot dx + Y \cdot \int_{\xi}^{X} \varphi(x) \cdot dx.$$

Es handelt sich somit einzig und allein noch um den Nachweis der Beziehung (9). Hierbei werde zunächst vorausgesetzt, dass nicht nur $\varphi(x)$, sondern auch $|\varphi(x)|$ in dem fraglichen Intervalle integrabel sei.[1]) Aus Gl. (5) folgt zunächst:

$$(14) \qquad |R_n| \leqq \sum_{1}^{n}{}^{\nu} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} |f(x) - f(x_\nu)| \cdot |\varphi(x)| \cdot dx.$$

Da nun, wegen der Monotonie von $f(x)$, für jedes einzelne Integrations-Intervall $x_{\nu-1} \leqq x \leqq x_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ die Beziehung besteht:

$$(15) \quad |f(x) - f(x_\nu)| \equiv |f(x) - f(x_\nu - 0)| \leqq |f(x_{\nu-1} + 0) - f(x_\nu - 0)|.$$

so ergiebt sich weiter:

$$(16) \quad |R_n| \leqq \sum_{1}^{n}{}^{\nu} |f(x_{\nu-1} + 0) - f(x_\nu - 0)| \cdot \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} |\varphi(x)| \cdot dx.$$

Wird jetzt $\varepsilon' > 0$ beliebig klein vorgeschrieben, so kann man die Theil-Intervalle $(x_{\nu-1}, x_\nu)$ so weit verkleinern,[2]) dass:

---

[1]) Diese Bedingung ist an sich schon erfüllt, wenn die als integrabel vorausgesetzte Function endlich bleibt. Im übrigen beschränkt sie lediglich den Charakter, nicht aber die Anzahl der etwa zulässigen Unendlichkeitsstellen.

[2]) Dies ist ohne weiteres klar, wenn $\varphi(x)$ durchweg endlich bleibt, folgt aber auch für den Fall eines absolut integrablen, unendlichwerdenden $\varphi(x)$ unmittelbar aus der entsprechenden Definition eines Integrales von der Form $\int_a^b |\varphi(x)| \cdot dx$.

$$(17) \qquad \int\limits_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} |\varphi(x)| \cdot dx < \varepsilon' \quad (\nu = 1, 2, \ldots n).$$

Alsdann wird aber:

$$|R_n| < \varepsilon' \cdot \sum_1^n{}^{\nu} |f(x_{\nu-1}+0) - f(x_\nu - 0)|,$$

und da die Differenzen $f(x_{\nu-1}+0) - f(x_\nu - 0)$ wegen der vorausgesetzten Monotonie von $f(x)$ sämmtlich gleichbezeichnet (eventuell auch Null) sind, also:

$$\sum_1^n{}^{\nu} |f(x_{\nu-1}+0) - f(x_\nu - 0)| = |\sum_1^n{}^{\nu} \{f(x_{\nu-1}+0) - f(x_\nu - 0)\}|$$
$$\leq |f(x_0+0) - f(X-0)|,$$

schliesslich:

$$(18) \qquad |R_n| < \varepsilon' \cdot |f(x_0+0) - f(X-0)|,$$

sodass also in der That $|R_n|$ — unter Voraussetzung eines absolut integrablen $\varphi(x)$ — durch passende Vergrösserung von n beliebig klein gemacht werden kann.[1])

Es möge nun zweitens $\varphi(x)$ auch solche Unendlichkeitsstellen α besitzen, dass zwar nicht mehr $|\varphi(x)|$, wohl aber $\varphi(x)$ und $f(x) \cdot \varphi(x)$ durchweg integrabel bleiben. Da die α im äussersten Falle eine unausgedehnte[2]) Menge bilden, so besagt die obige Integrabilitäts-Voraussetzung folgendes: Wird $\varepsilon'' > 0$ beliebig klein vorgeschrieben, so lassen sich die Stellen

---

[1]) Man kann dieses Resultat auch noch in anderer Weise erschliessen. Da $f(x)$ monoton ist und endlich bleibt, so kann es nur eine endliche Anzahl von Stellen x' geben, in deren Umgebung die Schwankung von $f(x)$ eine (beliebig klein vorzuschreibende) positive Zahl ε' erreicht oder übersteigt. Bei hinlänglicher Verkleinerung der Theil-Intervalle wird die Gesammtlänge der Intervalle, welche jene Punkte x' enthalten eine beliebig kleine Zahl δ, und zugleich in allen übrigen Intervallen:

$$|f(x_{\nu-1}+0) - f(x_\nu - 0)| < \varepsilon'.$$

Man findet daher aus Ungl. (16):

$$|R_n| < \varepsilon' \cdot \int\limits_{x_0}^{X} |\varphi(x)| \cdot dx + \delta \cdot |f(x_0+0) - f(X-0)|.$$

[2]) Vgl. übrigens p. 220, Fussnote.

a in eine endliche Anzahl von Intervallen: $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_p$, wo etwa:

$$(19) \qquad \delta_\varkappa = x_{m_\varkappa} - x_{m_\varkappa - 1} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots p),$$

einschliessen, so dass:

$$(20) \quad (a) \ \left| \sum_1^\lambda {}^\varkappa \int_{x_{m_\varkappa - 1}}^{x_{m_\varkappa}} \varphi(x) \cdot dx \right| < \varepsilon'', \quad (b) \ \left| \sum_1^\lambda {}^\varkappa \int_{x_{m_\varkappa - 1}}^{x_{m_\varkappa}} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx \right| < \varepsilon''$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots p).$$

Bezeichnet man sodann mit $\varphi_1(x)$ eine Function, die ausserhalb der Intervalle $\delta_\varkappa$ mit $\varphi(x)$ übereinstimmt, dagegen für $x_{m_\varkappa - 1} < x < x_{m_\varkappa}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots p)$ verschwindet, so lässt sich R_n in die Form setzen:

$$(21) \ R_n = \sum_1^n {}^\nu \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \{f(x) - f(x_\nu)\} \cdot \varphi_1(x) \cdot dx + \sum_1^p {}^\varkappa \int_{x_{m_\varkappa - 1}}^{x_{m_\varkappa}} \{f(x) - f(x_{m_\varkappa})\} \cdot \varphi(x) dx.$$
$$= R'_n + S_p.$$

Da $\varphi_1(x)$ endlich bleibt, so gilt für R'_n das zuvor in Bezug auf R_n gefundene Ergebniss Ungl. (18), d. h. man erhält bei passender Vergrösserung von n:

$$(22) \qquad |R'_n| < \varepsilon' \cdot |f(x_0 + 0) - f(X - 0)|.$$

Ferner hat man:

$$(23) \qquad S_p = \sum_1^p {}^\varkappa \int_{x_{m_\varkappa - 1}}^{x_{m_\varkappa}} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx + \sum_1^p {}^\varkappa f(x_{m_\varkappa}) \cdot \int_{x_{m_\varkappa - 1}}^{x_{m_\varkappa}} \varphi(x) \cdot dx.$$

Die erste dieser Summen liegt nach Ungl. (20^b) numerisch unter ε''. Auf die zweite kann man, wegen der Monotonie von $f(x_{m_\varkappa})$ für $\varkappa = 1, 2, \ldots p$, den Mittelwerthsatz (C) des vorigen Paragraphen (p. 214) anwenden. Beachtet man, dass jede der in Betracht kommenden Summen und folglich auch jeder aus ihnen gezogene Mittelwerth nach Ungl. (20^a) numerisch unter ε'' liegt, so ergiebt sich:

$$(24) \ \left| \sum_1^p {}^\varkappa f(x_{m_\varkappa}) \cdot \int_{x_{m_\varkappa - 1}}^{x_{m_\varkappa}} \varphi(x) \cdot dx \right| < |f(x_0 + 0) - f(X - 0)| \cdot \varepsilon'' + |f(X - 0)| \cdot \varepsilon'',$$

und daher schliesslich:

$$(25)\quad |R_n| < (\varepsilon' + \varepsilon'') \cdot |f(x_0+0) - f(X-0)| + \varepsilon''(1 + |f(X-0)|).$$

Damit ist aber der ausgesprochene Satz jetzt vollständig bewiesen.

3. Setzt man speciell: $y_0 = f(x_0 + 0)$, $Y = f(X - 0)$, so erhält man die zumeist übliche Form des fraglichen Satzes:

$$(26)\quad \int_{x_0}^{X} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx = f(x_0+0) \cdot \int_{x_0}^{\xi} \varphi(x) \cdot dx + f(X-0) \cdot \int_{\xi}^{X} \varphi(x) \cdot dx.$$

Und wenn sodann die $f(x)$-Werthe nicht nur monoton, sondern auch gleichbezeichnet sind, sodass man setzen kann: $Y = 0$, falls $|f(x_0 + 0)| > |f(X - 0)|$, dagegen $y_0 = 0$, falls $|f(x_0 + 0)| < |f(X - 0)|$, so folgt:

$$(27)\quad \int_{x_0}^{X} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx = f(x_0+0) \cdot \int_{x_0}^{\xi} \varphi(x) \cdot dx \quad (|f(x_0+0)| > |f(X-0)|).$$

$$(28)\quad \int_{x_0}^{X} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx = f(X-0) \cdot \int_{\xi}^{X} \varphi(x) \cdot dx \quad (|f(x_0+0)| < |f(X-0)|).$$

Will man lediglich — etwa im Rahmen einer Elementar-Vorlesung — die für die Anwendungen wichtigsten Formeln (26) (27) beweisen, so wird man am einfachsten im Anschlusse an das gewöhnliche Abel'sche Lemma[1]) und unter Einhaltung des (natürlich sich entsprechend vereinfachenden) Beweisverfahrens von Nr. 2 zunächst Gl. (27) und hieraus nach der in

---

[1]) In der bekannten, aus Gl. (3) des vorigen Paragraphen unmittelbar hervorgehenden Form:

$$u_1 \cdot \underset{\nu=1}{\overset{\nu=n}{\mathrm{Min}}} (V_\nu) < S_n < u_1 \cdot \underset{\nu=1}{\overset{\nu=n}{\mathrm{Max}}} (V_\nu).$$

Kehrt man die Reihenfolge der Glieder um, so ergiebt sich entsprechend:

$$u_n \underset{\nu=1}{\overset{\nu=n}{\mathrm{Min}}} (V_{\nu,n}) < S_n < u_n \underset{\nu=1}{\overset{\nu=n}{\mathrm{Max}}} (V_{\nu,n})$$

$$(\text{wo: } V_{\nu,n} = v_\nu + v_{\nu+1} + \ldots + v_n),$$

eine Beziehung, aus der dann analog Gl. (28) resultiren würde.

der Einleitung angedeuteten Methode Gl. (26) ableiten.[1]) Man gewinnt dabei gegenüber den sonst üblichen Beweisen immer noch den Vortheil, dass das Auftreten von Unendlichkeits-Stellen, welche die absolute Integrabilität von $\varphi(x)$ bestehen lassen, sowie dasjenige unendlich vieler Zeichenwechsel bei $\varphi(x)$ den Haupttheil des Beweises in keiner Weise complicirt.

---

§ 3. Ueber die bisherigen Beweise des zweiten Mittelwerthsatzes der Integralrechnung.

1. Bonnet bezeichnet seinen Integralsatz (Fussn. 1, p. 209) als eine unmittelbare Folge des Abel'schen Lemma's, ohne in eine genauere Discussion der erforderlichen Grenzübergänge einzutreten. Das entsprechende gilt von dem sogenannten Hankel'schen Beweise des Satzes in der gewöhnlichen Du Bois-Reymond'schen Form (p. 209, Gl. II).[2]) Hankel beweist in Wahrheit nur nochmals die Abel'sche Transformation für $\sum_{n}^{0}{}^{\nu}\, u_\nu v_\nu$ und leitet daraus diejenige Summen-Relation ab, welche der Mittelwerth-Formel (C') des § 1 bei Umkehrung der Gliederfolge entspricht. Im übrigen begnügt er sich mit dem Hinweise, dass daraus durch einen passenden Grenzübergang die fragliche Integralformel hervorgehe.

Immerhin lehren diese Beweis-Andeutungen so viel, dass der eigentliche Kern des fraglichen Satzes in der Abel'schen Transformation liegt, und zwar gleichgültig, ob man auf den Beweis der Bonnet'schen (I), der gewöhnlichen (II) oder der verallgemeinerten (III) Du Bois-Reymond'schen Form ausgeht: gelingt es nur, die Abel'sche Transformation in an-

---

[1]) Die directe Ableitung von Gl. (26) scheint mir aus dem Grunde unvortheilhaft, weil man alsdann die zur Abschätzung von Integralen mit der oberen Grenze ∞ besonders nützliche Formel (27) überhaupt nicht erhält. (So z. B. bei Thomae, a. a. O. p. 18; Stolz, Grundzüge der Diff.- und Int.-R., Bd. I, p. 420).

[2]) Zeitschr. f. Math. Bd. 14 (1869), p. 436.

gemessener Weise auf das Integral $\int_{x_0}^{X} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx$ anzuwenden, so hängt die besondere Form des Endresultates lediglich davon ab, ob man (je nachdem $f(x)$ als monoton und gleichbezeichnet oder nur als monoton vorausgesetzt wird) für den Endschluss das gewöhnliche Abel'sche Lemma (E'), die Mittelwerth-Relation (C') oder deren verallgemeinerte Form (C) des § 1 (bezw. die diesen Gleichungen zu Grunde liegenden Ungleichungen) benützt. Was nun aber die Möglichkeit betrifft, jenes Integral mit Hülfe der Abel'schen Transformation umzugestalten, so ergeben sich hier zwei verschiedene Wege.

2. Am nächsten liegt es offenbar, die Umgestaltung des Integrals in eine Summe von der Form $\sum_{1}^{n} {}^{\nu}\, u_\nu\, v_\nu$ dadurch zu ermöglichen, dass man auf dessen Definition als Grenzwerth einer solchen Summe zurückgeht:

$$(1) \qquad J = \int_{x_0}^{X} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx = \lim_{n=\infty} \sum_{1}^{n} {}^{\nu}\, f(x_\nu) \cdot (\varphi(x_\nu) \cdot \delta_\nu).$$

Der erste Beweis dieser Art — und zwar für die Satzform (II) — ist wohl derjenige des Herrn Thomae (1875),[1]) etwas übersichtlicher (Satzform (I)) der des Herrn Dini (1878).[2]) Unvollständig scheint mir ein ebenfalls hierher gehöriger Beweis von Kronecker (1885),[3]) der auch in die von Herrn Netto herausgegebenen Vorlesungen über die Theorie der Integrale übergegangen ist,[4]) während andererseits der von Kron-

---

[1]) A. a. O. p. 18.

[2]) Dini-Lüroth, p. 387, § 204.

[3]) Mathesis, T. 5, p. 100. Es fehlt die Erörterung der Beziehung zwischen den dort mit m, M und m_0, M_0 bezeichneten Zahlen.

[4]) A. a. O. p. 59. Die in der vorigen Fussnote mit m, M und m_0, M_0 bezeichneten Zahlenpaare sind hier beide mit M_0, M bezeichnet. Dabei bedeuten M_0, M einmal eine untere und obere Schranke für

$$\sum_{1}^{\varkappa} {}^{\nu}\, \varphi(x_\nu) \cdot \delta_\nu \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots n),$$

ecker bei dieser Gelegenheit ausgesprochene Zweifel, ob das Integral allemal eine stetige Function seiner oberen Grenze sei, schwerlich von vielen Mathematikern getheilt werden dürfte. Die bei dem Kronecker'schen Beweise nach meinem Dafürhalten bestehende Lücke ist wohl am zweckmässigsten in dem von Herrn Hölder[1]) gegebenen Beweise ausgefüllt, weniger scharf bei C. Jordan.[2])

Im übrigen scheint mir diese ganze Beweis-Methode bei vollkommen strenger Durchführung eine gewisse Schwerfälligkeit und Unübersichtlichkeit mit sich zu bringen, die gerade aus dem Zurückgreifen auf die Summen-Definition entspringt. Auch bezieht sie sich ausschliesslich auf den Fall eines endlich bleibenden $\varphi(x)$: das Auftreten eines einzigen Unendlichkeitspunktes einfachster Art erfordert wieder eine besondere Betrachtung.

3. Aus diesen Gründen halte ich die zweite Methode, die sich zur Ausführung der fraglichen Transformation des Integrals darbietet, für vortheilhafter. Sie besteht darin, das Integral in eine Summe von Theil-Integralen:

$$\sum_1^n{}^{\nu} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx$$

zu zerlegen, diese letzteren auf die Form zu bringen:

$$u_\nu \cdot \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \varphi(x)\, dx,$$

oder zum mindesten auf die folgende:

$$u_\nu \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx + r_\nu \text{ (wo: } \sum_1^n{}^{\nu} r_\nu \text{ mit } \frac{1}{n} \text{ gegen Null convergirt),}$$

---

das andere Mal Minimum und Maximum von

$$\int_{x_0}^{x'} \varphi(x) \cdot dx \text{ für } x_0 \leqq x' \leqq X.$$

[1]) Gött. Anzeigen, 1894, p. 520.

[2]) Cours d'Analyse, T. II, p. 222.

und sodann auf $\sum_1^n {}^\nu u_\nu \cdot \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx$ wiederum die Abel'sche Transformation anzuwenden.

Diese Methode liegt in Wahrheit dem sehr unübersichtlichen[1]) Beweise von Du Bois-Reymond[2]) zu Grunde: nur erscheint sie, da die betreffende Umformung nicht mit Hülfe einer allgemeinen Formel, sondern schrittweise vollzogen wird, und in Folge einer ganz besonders unglücklich gewählten Bezeichnungsweise bis zur Unkenntlichkeit verdunkelt.

In ihrer einfachsten Gestalt findet man sie bei dem Beweise des Herrn G. F. Meyer. Auf Grund der dort eingeführten beschränkenden Voraussetzung, dass $\varphi(x)$ nur an einer endlichen Anzahl von Stellen $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ das Vorzeichen wechseln solle, ergiebt sich durch Anwendung des ersten Mittelwerthsatzes auf $\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx$ $(\nu = 1, 2, \ldots n;\ x_n = X)$:

$$(2) \qquad J = \sum_1^n {}^\nu u_\nu \cdot \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx,$$

wo u_ν einen (unbekannten) Mittelwerth von $f(x)$ für $x_{\nu-1} < x < x_\nu$ bezeichnet. Da die u_ν $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ gleichzeitig mit $f(x)$ monoton sind, so folgt dann alles weitere unmittelbar durch Anwendung der Abel'schen Transformation.

Der Beweis des Herrn Neumann[3]) beruht auf einer Zerlegung von folgender Form:

$$(3) \qquad J = \sum_1^n {}^\nu u_\nu \cdot \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} \varphi(x) \cdot dx + \sum_1^n {}^\nu \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} (f(x) - u_\nu) \cdot \varphi(x) \cdot dx$$
$$= J_n + R_n,$$

---

1) „Mühsam, aber lehrreich" sagt Kronecker: Vorl. über Integr. p. 60.

2) S. p. 209, Fussn. 2.

3) Math. Ann. Bd. 6 (1873), p. 315.

wo u_ν das arithmetische Mittel von $f(x)$ für $x_{\nu-1} \leqq x \leqq x_\nu$ bedeutet. Auf J_n wird dann wieder die Abel'sche Transformation angewendet, andererseits aber, um aus der Beziehung:

$$(4) \qquad |R_n| \leqq \sum_1^n{}^\nu \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} |f(x) - u_\nu| \cdot |\varphi(x)| \cdot dx$$

das Verschwinden von $\lim_{n=\infty} R_n$ zu erschliessen, die beschränkende Voraussetzung der abtheilungsweisen Stetigkeit von $f(x)$ eingeführt. In Folge dieser letzteren Bedingung ergiebt sich offenbar bei passender Wahl der x_ν und hinlänglicher Verkleinerung von $x_\nu - x_{\nu-1}$:

$$(5) \qquad |R_n| < \varepsilon \cdot \sum_1^n{}^\nu \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} |\varphi(x)| \cdot dx = \varepsilon \cdot \int_{x_0}^{X} |\varphi(x)| \cdot dx.$$

Die beim Meyer'schen Beweise angeführte Beschränkung bezüglich der Zeichenwechsel von $\varphi(x)$ kann durch ein von Du Bois-Reymond[1]) angegebenes Verfahren nachträglich wieder beseitigt werden. Auch der Neumann'sche Beweis lässt sich dahin ergänzen, dass die in Bezug auf $f(x)$ eingeführte Stetigkeits-Bedingung unnöthig erscheint.[2])

Da der im vorigen Paragraphen von mir angegebene Beweis, der ja ebenfalls dem hier charakterisirten Typus angehört,[3]) ohne irgendwelche nachträgliche Correctur zu erfordern, den fraglichen Satz sofort in der allgemeinsten Form und unter den denkbar allgemeinsten Voraussetzungen liefert, so dürfte er vielleicht immerhin einige Beachtung verdienen.

---

[1]) Journ. f. Math. Bd. 79 (1875), p. 42, Fussnote. Weniger allgemein bei Stolz, Grundzüge I, p. 422.

[2]) Vgl. Fussnote 1, p. 224.

[3]) Um Missverständnisse zu vermeiden, bemerke ich, dass die Form, unter welcher ich hier den Meyer'schen und Neumann'schen Beweis dargestellt habe und welche ja mit derjenigen meines Beweises ausserordentliche Aehnlichkeit besitzt, keineswegs deren Originalform ist, vielmehr von mir nur gewählt wurde, um den eigentlichen Kern und das gemeinsame aller dieser Beweise möglichst scharf hervortreten zu lassen.

4. Von Beweisen des fraglichen Satzes, die nicht auf der Abel'schen Transformation beruhen, sind mir nur zwei bekannt geworden: der von Weierstrass in seinen Vorlesungen schon vor der Du Bois-Reymond'schen Publication gegebene und ein anderer, der von Herrn Netto herrührt. Der erstere[1]) basirt auf der partiellen Integration und erfordert demgemäss die Existenz einer integrablen Derivirten $f'(x)$, besitzt also erheblich geringere Tragweite, als irgend einer der bisher betrachteten Beweise und macht insbesondere die allgemeine Anwendbarkeit des Satzes auf den Convergenz-Beweis der Fourier'schen Reihe illusorisch. Im übrigen beruht dieser Beweis im Grunde genommen auf einem Umwege, durch dessen Benützung er gerade seine Allgemeinheit verliert. Denn die partielle Integration in ihrer Anwendung auf bestimmte Integrale ist schliesslich auch nur eine, gewisse specielle Voraussetzungen erheischende Folgerung aus der partiellen Summation.[2]) Es wird also der Mittelwerthsatz bei dem fraglichen Beweise statt aus der Abel'schen Transformation selbst, aus einer unter speciellen Bedingungen bestehenden Folgerung derselben hergeleitet.

Der Netto'sche Beweis[3]) sucht die Bonnet'sche Form des Satzes durch vollständige Induction zu begründen. Bedeuten wiederum $x_1, x_2, x_3, \ldots$ die einzigen Stellen, bei welchen $\varphi(x)$ einen Zeichenwechsel erleidet, so gilt der Satz zunächst, wie unmittelbar zu sehen, für das Intervall $x_0 \leqq x \leqq x_1$. Sodann wird gezeigt, dass seine Gültigkeit stets über eine Stelle x' hinausreicht, sofern sie nur bis x' feststeht. Dabei wird aber offenbar stillschweigend vorausgesetzt, dass überhaupt eine Stelle x_1, d. h. eine erste Stelle existire, bei welcher ein Zeichenwechsel stattfindet. Mit anderen Worten, der Beweis wird hinfällig, wenn $\varphi(x)$ in der Nachbarschaft

---

[1]) Man findet ihn auch bei Du Bois-Reymond, Journ. f. Math. Bd. 69, p. 82; desgl. Kronecker, Vorlesungen p. 57.

[2]) Vgl. Helm, Zeitschr. f. Math. 22 (1877), p. 401.

[3]) Zeitschr. f. Math. 40 (1895), p. 180.

von $x_0 + 0$ unendlich viele Zeichenwechsel besitzt. Ferner: angenommen es erstrecke sich die Gültigkeit des Satzes, die ursprünglich bis x' festgestanden haben mag, nunmehr bis x'', von da bis x''' u. s. f., so ist es sehr wohl denkbar, dass die Folge $x', x'', \ldots x^{(\nu)} \ldots$ gegen einen Grenzwerth $X' < X$ convergire. Und, wenn auch diese Complication überwunden ist, so gilt schliesslich, im Gegensatz zu der von Herrn Netto am Schlusse gemachten Behauptung, dass über die Anzahl der Stellen x_ν keine beschränkende Voraussetzung erforderlich sei, der betreffende Beweis überhaupt nur, wenn die x_ν eine monoton zunehmende Folge mit einer einzigen Grenzstelle bilden. Für diesen Fall kommt man aber so sehr viel einfacher mit dem Meyer'schen Beweise zum Ziele, dass die Vorzüge der äusserst mühsamen Netto'schen Schlussweise nicht recht einleuchtend erscheinen.

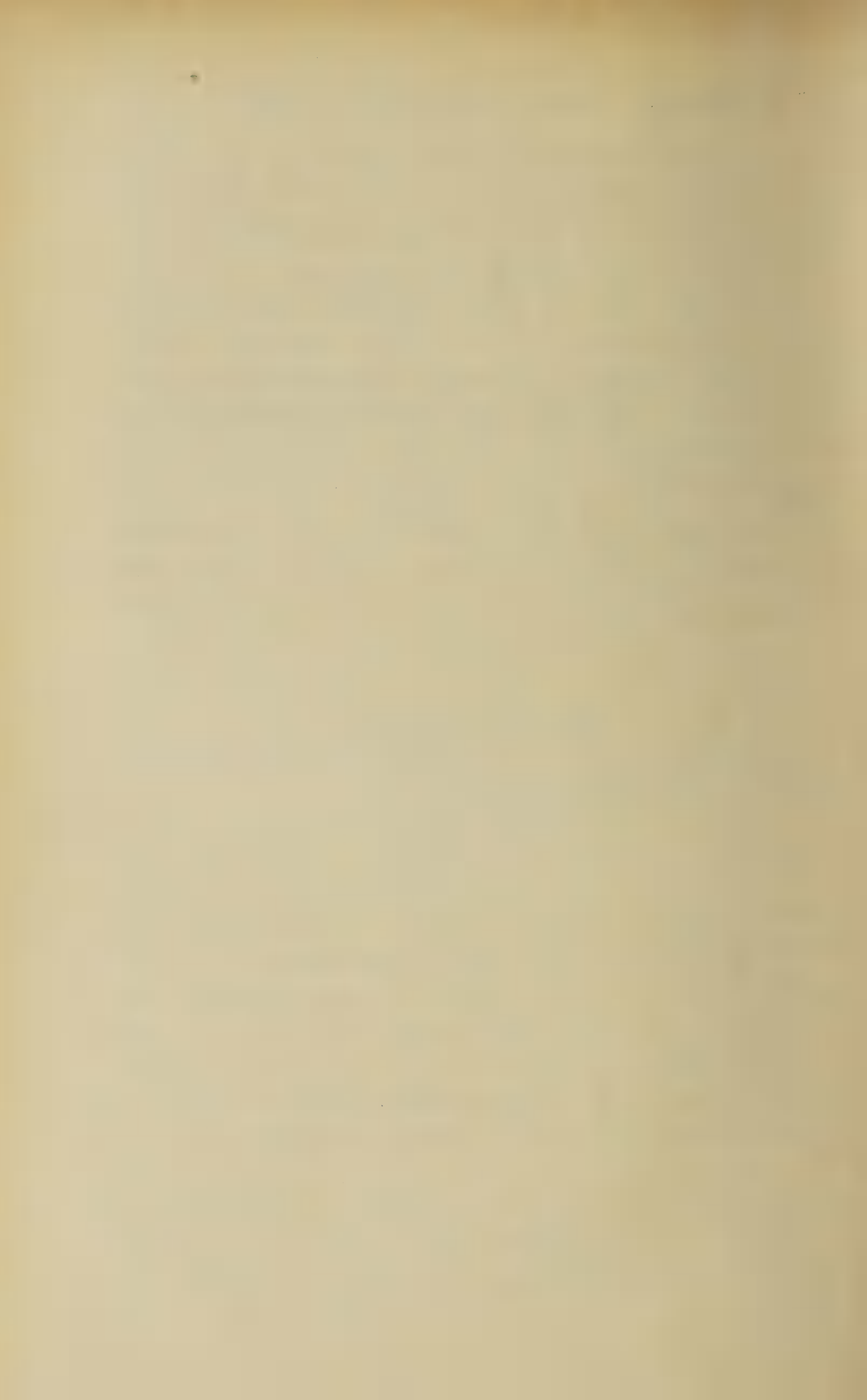
Druckfehler-Berichtigung.

In dem Aufsatze: „Ueber die Convergenz unendlicher Kettenbrüche", Sitz.-Ber. Bd. 28 (1898) muss es

p. 312, Zeile 3, Formel (34)
„ Fussnote, Zeile 4
p. 317, Zeile 1, Formel (54)
„ „ 4 „ (55)

durchweg heissen:

$|b_\nu| - |a_\nu|$ statt: $|a_\nu| - |b_\nu|$.



Separat-Abdruck
aus den Sitzungsberichten der mathem.-phys. Classe
der kgl. bayer. Akademie der Wissenschaften
Bd. XXX 1900 Heft III.

Ueber die
Convergenz periodischer Kettenbrüche

von

Alfred Pringsheim.

München 1900
Verlag der k. Akademie.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Die in den Sitzungsberichten erschienenen Abhandlungen sind nicht in einzelnen Abzügen ausgegeben.
(Preis des betr. Heftes der Sitzungsberichte 1 Mark 20 Pfennig).

Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Klasse. Bd. I—XXI in je 3 Abtheilungen, von 1832—1900.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse. Bd. I—XXX, von 1871—1900.

Bauer, Gustav. Kettenbruch Eulers. Abh. II. Kl. XI, 2. 1872 ℳ —.50
— Pascal's Theorem. Abh. II. Kl. XI, 3 1874 ℳ 1.—
— Gedächtnissrede auf Otto Hesse. 1882 ℳ —.60
— Von der Hesse'schen Determinante. Abh. II. Kl. XIV, 3. 1883 ℳ —.50
— Ueber einige Determinanten. Sitzb. 1872, p. 345—354.
— Ueber Kugelfunktionen. Sitzb. 1875, pag. 247—272.
— Ueber Systeme von Curven 6. Ordnung, auf welche das Normalenproblem bei Curven 2. Ordnung führt. Sitzb. 1878, p. 121—135.
— Ueber das geradlinige Hyperboloid. Sitzb. 1880, p. 635—640.
— Tripel von Geraden auf einem Hyperboloid. Sitzb. 1881, p. 241—248.
— Ueber die Hesse'sche Determinante der Hesse'schen Fläche einer Fläche dritter Ordnung. Sitzb. 1883, p. 320.
— Von den gestaltlichen Verhältnissen der parabolischen Curve auf einer Fläche dritter Ordnung. Sitzb. 1883. p. 320—343.
— Ueber d. Discriminante einer binären Form. Sitzb. 1886, p. 183—191.
— Ueber Flächen vierter Ordnung, deren geometrische Erzeugung sich an zwei Tetraeder knüpft. Sitzb. 1888, p. 337—354.
— Darstellung binärer Formen als Potenzsummen. Sitz. 1892, p. 3—20.
— Bemerkungen über zahlentheoretische Eigenschaften der Legendre'schen Polynome. Sitzb. 1894, p. 343—359.
— Von zwei Tetraëdern, welche einander zugleich eingeschrieben und umschrieben sind. Sitz. 1897, p. 359—366.

Brill, Al. Zur Theorie der geodätischen Linie etc. Abh. II. Kl. XIV, 2, 1883 ℳ 1.—
— Bestimmung der optischen Wellenfläche etc. 1883, 3 p. 423—435.
— Ueber rationale Curven und Regelflächen, 1885, 2 p. 276—287.
— Ueber die Multiplicität der Schnittpunkte von zwei ebenen Curven. Sitzb. 1888, p. 81—94.
— Die reducirte Resultante. Abh. II. Kl. XVII, 1889, p. 89—181. ℳ —.40.
— Ueber das Verhalten einer Funktion von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle. Sitzb. 1891, p. 207—220.

Du Bois-Reymond, Paul. Coefficienten der trigonometrischen Reihe. Abh. II. Kl. XII, 2. 1876 ℳ 3.60.
— Ueber den Gültigkeitsbereich der Taylor'schen Reihenentwicklung. Sitzb. 1876, p. 225—237.
— Ein allgemeiner Satz über die Integrirbarkeit von Funktionen integrirbarer Funktionen. Sitz. 1882, p. 240—242.

Dyck, W. Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln definirten Curvensysteme. Erste Mittheilung (mit 4 Taf.). Sitzb. 1891, p. 23—57; zweite Mittheilung (mit 3 Taf.). Sitzb. 1892, p. 101—138.
— Beiträge zur Potentialtheorie. I. Kronecker'sche Charakteristiken. Sitzb. 1895, p. 261—277.

Ueber die Convergenz periodischer Kettenbrüche.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 1. Dezember.*)

Allgemeine Kriterien zur Beurtheilung der Convergenz und Divergenz periodischer Kettenbrüche mit beliebigen complexen Gliedern sind zuerst von Herrn O. Stolz angegeben worden.[1]) Später hat Herr G. Landsberg[2]) den Fall, dass sämmtliche Theilzähler und Theilnenner reell und rational sind, mit Hülfe einer besonders einfachen und sinnreichen Methode behandelt, welche zugleich auch den Zusammenhang zwischen dem betreffenden Kettenbruche und einem anderen, durch geeignete Inversion der Periode daraus hervorgehenden unmittelbar erkennen lässt und auf diese Weise die Verallgemeinerung eines bekannten, von Galois[3]) zunächst nur für sog. regelmässige Kettenbrüche bewiesenen Satzes liefert. Da Herr Landsberg seinen Untersuchungen eine etwas andere und zwar, wie die Durchführung der Rechnung lehrt, weniger zweckmässige Kettenbruchform zu Grunde legt,[4]) als Herr Stolz, so erscheint die Vergleichung der beider-

[1]) Innsbrucker Ber. 17. Febr. 1886. Die Beweise der daselbst mitgetheilten Sätze findet man in den Vorlesungen über allg. Arithmetik, Bd. II (1886), p. 299 ff. Ein dort noch nicht angeführtes Divergenz-Kriterium giebt Stolz: Innsbr. Ber. 1887/88, p. 1. 2.

[2]) Journ. für Math. Bd. 109 (1892), p. 231—237. Vgl auch: E. Netto, ebendas. Bd. 110 (1892), p. 349.

[3]) Gergonne Annales, T. 19 (1828—1829), p. 294.

[4]) S. weiter unten p. 465, Fussnote 2).

seitigen Endresultate einigermaassen erschwert. Ueberträgt man aber die Landsberg'sche Methode, die überdies in einigen Einzelheiten eine noch etwas elementarere und durchsichtigere Darstellung gestattet, auf Kettenbrüche mit beliebigen complexen Gliedern in der von Herrn Stolz benützten Form, so kann man in der That mit den denkbar einfachsten Hülfsmitteln zu einer äusserst einfachen und übersichtlichen Formulirung der Stolz'schen Convergenz- und Divergenz-Kriterien gelangen. Zugleich ergiebt sich dann auch die oben erwähnte Verallgemeinerung des Galois'schen Satzes für Kettenbrüche mit ganz beliebigen Theilzählern und Theilnennern.

Die Durchführung dieses Gedankens bildet den Inhalt der folgenden Mittheilung.

---

§ 1. Nothwendige und hinreichende Bedingungen für die Convergenz eines rein periodischen Kettenbruches.

Ich bezeichne den Kettenbruch:

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cdots + \cfrac{a_n}{b_n}}}$$

durch eins der Symbole:

$$\left(b_0 ; \frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_n}{b_n}\right) \quad \text{oder:} \quad \left[b_0 ; \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=n},$$

seinen auf Grund der bekannten Beziehungen:

$$(1) \begin{cases} A_0 = b_0 & B_0 = 1 \\ A_1 = b_1 b_0 + a_1 & B_1 = b_1 \\ A_\nu = b_\nu A_{\nu-1} + a_\nu A_{\nu-2} & B_\nu = b_\nu B_{\nu-1} + a_\nu B_{\nu-2} \quad (\nu \geqq 2) \end{cases}$$

formal gebildeten ν^{ten} Näherungsbruch mit $\frac{A_\nu}{B_\nu}$ oder K_ν und setze:

$$\left(b_0; \frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_\nu}{b_\nu}\right) = \frac{A_\nu}{B_\nu} \equiv K_\nu, \tag{2}$$

gleichgültig, ob der Kettenbruch als solcher einen bestimmten Sinn besitzt,[1]) sofern nur K_ν selbst eine bestimmte Zahl vorstellt, d. h. B_ν von Null verschieden ist.

Im Falle $b_0 = 0$ schreibe ich statt:

$$\left(0; \frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_n}{b_n}\right) \quad \text{bezw.} \quad \left[0; \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=n}$$

kürzer:

$$\left(\frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_n}{b_n}\right) \quad \text{bezw.} \quad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=n}.$$

Bedeuten dann a_ν, b_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ irgendwelche complexe Zahlen (mit Einschluss der reellen und für die b_ν auch der Null, während durchweg: $|a_\nu| > 0$), welche den Bedingungen genügen:

$$\begin{cases} a_{\lambda p+\mu} = a_\mu \\ b_{\lambda p+\mu} = b_\mu \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, 3, \ldots \text{ in inf.} \\ \mu = 1, 2, \ldots p \end{pmatrix}, \tag{3}$$

so soll der unendliche Kettenbruch:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=\infty} \tag{4}$$

als ein rein periodischer[2]) und zwar mit der p-gliedrigen Periode:

$$\left(\frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_p}{b_p}\right)$$

---

[1]) Vgl. Stolz, Allg. Arithm. II, p. 269.

[2]) Darnach gilt der Kettenbruch:

$$\left[b_n; \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty,$$

anders geschrieben:

$$b_n + \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$$

schon als unrein periodisch. Es ist dies diejenige Form, welche Herr Landsberg zum Ausgangspunkte seiner Untersuchungen gewählt hat.

bezeichnet werden, wobei noch angenommen wird, dass p die kleinste Zahl bedeutet, für welche die beiden Beziehungen (3) erfüllt sind.

Wenn nun der Kettenbruch (4) überhaupt convergirt, so muss sein Werth x der Relation genügen:

$$x = \left(\frac{a_1}{b_1}, \dots \frac{a_p}{b_p + x}\right) = \frac{A_p + A_{p-1}\, x}{B_p + B_{p-1}\, x}, \tag{5}$$

sodass also x eine bestimmte Wurzel der quadratischen Gleichung sein muss:

$$B_{p-1}\, x^2 + (B_p - A_{p-1})\, x - A_p = 0, \tag{I}$$

sofern nicht etwa gerade $B_{p-1} = 0$ ist. In diesem Specialfalle reducirt sich diese Gleichung auf eine lineare, und sie wird überdies gänzlich hinfällig, wenn auch noch $B_p - A_{p-1} = 0$ ist. Wir betrachten zunächst den allgemeinen Fall:

$$\text{I.} \quad |B_{p-1}| > 0.$$

Die beiden Wurzeln x der Gleichung (I) werden dann durch den Ausdruck dargestellt:

$$x = \frac{1}{2\, B_{p-1}} \{A_{p-1} - B_p \pm \sqrt{D}\}, \tag{6}$$

wo D die Discriminante von (I) bedeutet, also:

$$\begin{aligned} D &= (A_{p-1} - B_p)^2 + 4\, A_p\, B_{p-1} \\ &= (A_{p-1} + B_p)^2 + 4\,(A_p\, B_{p-1} - A_{p-1}\, B_p) \end{aligned} \tag{7a}$$

oder auch:

$$D = S^2 - 4\, P, \tag{7b}$$

wenn man beachtet, dass:

$$A_p B_{p-1} - A_{p-1} B_p = (-1)^{p-1} \cdot a_1\, a_2 \dots a_p = -\prod_{\nu=1}^{p} (-a_\nu) \tag{8}$$

und sodann die Abkürzungen einführt:

$$A_{p-1} + B_p \equiv S, \quad \prod_{\nu=1}^{p} (-a_\nu) \equiv P. \tag{9}$$

Um die Convergenz oder Divergenz von $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$, d. h. schliesslich die Beziehung von $\overline{\lim\limits_{\nu=\infty}} K_\nu$ zu einer der beiden Zahlen x festzustellen, untersuchen wir allgemein einen Ausdruck von der Form $H - x$, wo:

$$(10) \qquad H = \left(\frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_p}{b_p + h}\right) = \frac{A_p + A_{p-1}\,h}{B_p + B_{p-1}\,h},$$

also zunächst:

$$H - x = \frac{A_p - B_p\,x + (A_{p-1} - B_{p-1}\,x)\cdot h}{B_p + B_{p-1}\,h}.$$

Da aber aus Gl. (I) folgt:

$$(11) \qquad A_p - B_p\,x = -(A_{p-1} - B_{p-1}\,x)\cdot x,$$

so hat man:

$$(12) \qquad H - x = \frac{A_{p-1} - B_{p-1}\,x}{B_p + B_{p-1}\,h}\cdot(h - x).$$

Für die weitere Untersuchung ist nun zu unterscheiden, ob Gl. (I) zwei verschiedene Wurzeln besitzt oder nicht, d. h. ob $|D| > 0$ oder $D = 0$.

I^a. $|D| > 0$.

Werden alsdann die beiden verschiedenen Wurzeln von Gl. (I) mit x_1, x_2 bezeichnet, so kann man dieselben nach Gl. (6) definiren durch die Beziehungen:

$$(13) \qquad \begin{cases} 2\,B_{p-1}\,x_1 = A_{p-1} - B_p + \varepsilon\cdot\sqrt{D} \\ 2\,B_{p-1}\,x_2 = A_{p-1} - B_p - \varepsilon\cdot\sqrt{D} \end{cases},$$

wo $\sqrt{D}$ den Hauptwerth der betreffenden Quadratwurzel bedeutet und $\varepsilon = +1$ oder -1 in der Weise fixirt werden soll, dass der Kettenbruch, falls er überhaupt convergirt, gerade den Grenzwerth x_1 besitzt. Setzt man dann in Gl. (12) $x = x_1$ bezw. $x = x_2$, so folgt durch Division der resultirenden Gleichungen:

$$(14) \qquad \frac{H - x_1}{H - x_2} = M \cdot \frac{h - x_1}{h - x_2}$$

wo:

$$(15) \qquad M = \frac{A_{p-1} - B_{p-1}\, x_1}{A_{p-1} - B_{p-1}\, x_2} = \frac{S - \varepsilon \cdot \sqrt{D}}{S + \varepsilon \cdot \sqrt{D}}\ ^{1)}.$$

Man hat nun für $\nu > p$ in Folge der Periodicität der a_ν, b_ν:

$$(16) \qquad K_\nu = \left(\frac{a_1}{b_1}, \dots \frac{a_p}{b_p + K_{\nu-p}}\right),$$

d. h. es wird: $H = K_\nu$ für: $h = K_{\nu-p}$ und daher nach Gl. (14):

$$(17) \qquad \frac{K_\nu - x_1}{K_\nu - x_2} = M \cdot \frac{K_{\nu-p} - x_1}{K_{\nu-p} - x_2}.$$

Substituirt man hier der Reihe nach $\nu = p + \mu,\ 2p + \mu, \dots \lambda p + \mu$ (wo μ eine beliebige Zahl aus der Reihe $1, 2, \dots p$), so folgt durch Multiplication der resultirenden Beziehungen:

$$(18) \qquad \frac{K_{\lambda p+\mu} - x_1}{K_{\lambda p+\mu} - x_2} = M^\lambda \cdot \frac{K_\mu - x_1}{K_\mu - x_2} = M^\lambda \cdot \frac{A_\mu - B_\mu\, x_1}{A_\mu - B_\mu\, x_2}$$

d. h.

$$(19) \quad K_{\lambda p+\mu} = \frac{x_1 (A_\mu - B_\mu\, x_2) - M^\lambda \cdot x_2 (A_\mu - B_\mu\, x_1)}{(A_\mu - B_\mu\, x_2) - M^\lambda \cdot (A_\mu - B_\mu\, x_1)}$$

$$= x_1 + M^\lambda \cdot (x_1 - x_2) \cdot \frac{A_\mu - B_\mu\, x_1}{(A_\mu - B_\mu x_2) - M^\lambda \cdot (A_\mu - B_\mu x_1)}.$$

Damit also $\lim\limits_{\lambda=\infty} K_{\lambda p+\mu} = x_1$ werde (für: $\mu = 1, 2, \dots p$) ist nothwendig und hinreichend, dass:

$$(20) \quad \lim_{\lambda=\infty} M^\lambda \cdot (x_1 - x_2) \cdot \frac{A_\mu - B_\mu\, x_1}{(A_\mu - B_\mu\, x_2) - M^\lambda (A_\mu - B_\mu\, x_1)} = 0.$$

Da aber $(x_1 - x_2)$ von Null verschieden und auch $(A_\mu - B_\mu\, x_1)$ zum mindesten nicht für jedes $\mu = 1, 2, \dots p$

---

[1]) Wegen:

$$B_{p-1}(x_1 + x_2) = A_{p-1} + B_p$$

kann man M auch in die Form setzen:

$$M = \frac{B_p + B_{p-1}\, x_2}{B_p + B_{p-1}\, x_1}.$$

verschwinden kann[1]), so findet die Beziehung allemal dann und nur dann statt, wenn:

$$\text{(a)} \qquad \lim_{\lambda=\infty} M^\lambda = 0 \quad \text{d. h.} \ |M| < 1,$$

und ausserdem der Nenner des Ausdruckes (20) für $\lambda = \infty$ nicht verschwindet, d. h. wenn:

$$\text{(b)} \qquad |A_\mu - B_\mu x_2| > 0 \quad \text{für } \mu = 1, 2, \ldots p.$$

Die Bedingung (a) verlangt aber genau folgendes: es muss $\varepsilon = \pm 1$ so fixirt werden, dass (s. Gl. (15)):

$$(21) \qquad \left| \frac{S - \varepsilon \cdot \sqrt{D}}{S + \varepsilon \cdot \sqrt{D}} \right| < 1,$$

und dies kann offenbar allemal und zwar bei vollkommen eindeutiger Bestimmbarkeit von ε erzielt werden, sofern nicht gerade:

$$(22) \qquad |M| \equiv \left| \frac{S - \varepsilon \cdot \sqrt{D}}{S + \varepsilon \cdot \sqrt{D}} \right| = 1,$$

in welchem Falle dann ε willkürlich $= \pm 1$ angenommen werden kann. Setzt man nun etwa:

$$(23) \qquad \frac{S}{\sqrt{D}} = \alpha + \beta i,$$

so geht die Bedingung (22) in die folgende über:

$$\left| \frac{\alpha - \varepsilon + \beta i}{\alpha + \varepsilon - \beta i} \right| = 1,$$

$$\text{d. h.} \qquad (\alpha - \varepsilon)^2 + \beta^2 = (\alpha + \varepsilon)^2 + \beta^2,$$

also schliesslich:

$$\alpha = 0$$

oder, wenn man allgemein den reellen Theil einer complexen Zahl z mit $\Re(z)$ bezeichnet:

$$(24) \qquad \Re\left(\frac{S}{\sqrt{D}}\right) = 0.$$

---

[1]) Dies gilt offenbar auch im Falle $p = 1$.

Hiernach ist also die Bedingung (a) bei geeigneter Normirung von ε stets erfüllbar, wenn:

$$\text{(A)} \qquad \left| \Re\left(\frac{S}{\sqrt{D}}\right) \right| > 0.$$

Dass im entgegengesetzten Falle, also für $|M| = 1$ wirklich Divergenz stattfindet, erkennt man unmittelbar aus Gl. (19), wenn man berücksichtigt, dass für $|M| = 1$ — da die Möglichkeit $M = 1$ hier definitiv ausgeschlossen erscheint[1]) — stets $M = -1$ oder M eine nicht-reelle Zahl mit dem absoluten Betrage 1 sein muss, und dass daher M^λ für $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$ eine unbegrenzte Folge periodisch wiederkehrender oder durchweg von einander verschiedener Werthe annimmt (letzteres, wenn M keine Einheitswurzel).

Im übrigen lässt sich die Divergenz-Bedingung (21) noch in folgender Weise umformen. Da dieselbe genau soviel

---

[1]) Denn aus $M = 1$ würde folgen $D = 0$, was unter den weiterhin zu behandelnden Fall $\mathrm{I^b}$ gehört.

Ist $M = -1$, d. h. $S = 0$, so folgt aus Gl. (19) für gerade λ:

$$\lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p+\mu} = K_{\lambda p+\mu} = K_\mu \quad (\mu = 1, 2, \ldots p),$$

dagegen für ungerade λ:

$$\lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p+\mu} = K_{\lambda p+\mu} = \frac{(x_1 + x_2) \cdot K_\mu - 2\, x_1 x_2}{2\, K_\mu - (x_1 + x_2)} \text{ d. h. } = K_{p+\mu}.$$

Da nämlich allgemein:

$$x_1 x_2 = -\frac{A_p}{B_{p-1}}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_{p-1}}$$

und, wegen $S = 0$, d. h. $A_{p-1} = -B_p$, speciell sich ergiebt:

$$x_1 + x_2 = \frac{2\, A_{p-1}}{B_{p-1}} = -\frac{2\, B_p}{B_{p-1}}$$

so findet man in der That:

$$\frac{(x_1 + x_2) \cdot K_\mu - 2\, x_1 x_2}{2\, K_\mu - (x_1 + x_2)} = \frac{A_{p-1}\, K_\mu + A_p}{B_{p-1}\, K_\mu + B_p} = K_{p+\mu}.$$

besagt, dass $\frac{S}{\sqrt{D}}$ rein imaginär oder Null, also $\frac{S^2}{D}$ wesentlich negativ oder Null, so kann man sie zunächst durch die folgende ersetzen:

$$\frac{S^2}{D} = -\varrho \quad (0 \leqq \varrho < +\infty)$$

oder, wegen: $D = S^2 - 4P$, auch:

$$S^2 = \frac{\varrho}{1+\varrho} \cdot 4P.$$

Da hier $\frac{\varrho}{1+\varrho} = \vartheta$ für $0 \leqq \varrho < \infty$ jeden Werth des Intervalles $0 \leqq \vartheta < 1$ annimmt, vice versa — so gewinnt man schliesslich statt der Bedingung (24) die folgende:

$$(24^a) \qquad S^2 = 4\vartheta \cdot P \quad (0 \leqq \vartheta < 1),$$

anders geschrieben:

$$D \equiv S^2 - 4P = -4(1-\vartheta) \cdot P$$

und, wenn man noch $1 - \vartheta = \eta$ setzt:

$$(24^b) \qquad D = -4\eta \cdot P \quad (0 < \eta \leqq 1).$$

In Bezug auf die Convergenz-Bedingung (b) ist noch zu bemerken, dass dieselbe für $\mu = p - 1$ und $\mu = p$ allemal eo ipso erfüllt ist. Da nämlich (nach Gl. (11) für $x = x_2$):

$$(25) \qquad A_p - B_p x_2 = -(A_{p-1} - B_{p-1} x_2) \cdot x_2,$$

so würde zunächst aus:

$$A_{p-1} - B_{p-1} x_2 = 0$$

jedesmal folgen, dass auch:

$$A_p - B_p x_2 = 0$$

und — sofern nur $|x_2| > 0$ angenommen wird — auch umgekehrt. Alsdann hätte man aber:

$$\frac{A_{p-1}}{B_{p-1}} = \frac{A_p}{B_p} \quad (\text{nämlich} = x_2),$$

was in Folge der Voraussetzung $|a_\nu| > 0$ unmöglich ist. Schliesst man also den Fall $x_2 = 0$ vorläufig aus, so genügt die Existenz der Bedingung (b) schon in dem folgenden Umfange:

$$\text{(B)} \qquad |A_\mu - B_\mu x_2| > 0 \quad \text{für } \mu = 1, 2, \ldots (p-2),$$

sodass dieselbe hiernach überhaupt erst für $p \geqq 3$ in Betracht kommt.

Angenommen nun, man habe (falls $p \geqq 3$) für ein oder mehrere specielle $\mu = m$:

$$\text{(26)} \qquad A_m - B_m x_2 = 0 \quad \text{d. h. } K_m = x_2,$$

so folgt aus Gl. (19), dass allgemein:

$$\text{(27)} \qquad K_{\lambda p + m} = x_2, \quad \text{also auch: } \lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p+m} = x_2,$$

während für alle von m verschiedenen μ die Beziehung verbleibt:

$$\text{(28)} \qquad \lim_{\mu=\infty} K_{\lambda p+\mu} = x_1.$$

Hat also irgend einer der ersten $(p-2)$ Näherungsbrüche den Wert x_2, so gilt das gleiche von allen denjenigen K_ν, deren Index um ein Multiplum von p grösser ist, während die Folge der übrigen nach x_1 convergirt.

Was den oben zunächst ausgeschlossenen Fall $x_2 = 0$ betrifft, so bemerke man, dass derselbe nach Gl. (25) nur dann eintreten kann, wenn:

$$\text{(29)} \qquad A_p = 0.$$

Nun nimmt aber für $A_p = 0$ die Gleichung (I) die folgende Form an:

$$\text{(30)} \qquad B_{p-1} x^2 + (B_p - A_{p-1}) x = 0,$$

und zwar hat man (wegen: $A_{p-1} B_p - A_p B_{p-1} = -4P \neq 0$) hierbei stets:

$$|A_{p-1}| > 0, \quad |B_p| > 0$$

und auch:

$$|B_p - A_{p-1}| > 0$$

(da die Annahme: $B_p - A_{p-1} = 0$ auf den Fall einer Doppelwurzel $x = 0$ führt, also unter I[b] gehört). Sodann wird:

$$\text{(31)} \qquad \text{entweder: } x = 0, \quad \text{oder: } x = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_{p-1}}$$

und daher

$$\text{(32)} \qquad \begin{aligned} \text{entweder: } & A_{p-1} - B_{p-1}\,x = A_{p-1}, \\ \text{oder: } & A_{p-1} - B_{p-1}\,x = B_p. \end{aligned}$$

Um jetzt die Convergenz-Bedingung (a), nämlich:

$$|M| = \left| \frac{A_{p-1} - B_{p-1}\,x_1}{A_{p-1} - B_{p-1}\,x_2} \right| < 1$$

(deren Herleitung in keiner Weise auf der Voraussetzung $|A_p| > 0$ beruhte, also auch für $A_p = 0$ giltig bleibt) zu erfüllen hat man also zu setzen:

$$\text{(33)} \quad x_1 = 0, \qquad x_2 = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_p}, \quad \text{wenn: } \left| \frac{A_{p-1}}{B_p} \right| < 1,$$

dagegen:

$$\text{(34)} \quad x_1 = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_p}, \quad x_2 = 0, \qquad \text{wenn: } \left| \frac{A_{p-1}}{B_p} \right| > 1.$$

Im ersten Falle convergirt also der Kettenbruch nach $x_1 = 0$, wenn noch die Bedingung (B) in dem dort bezeichneten Umfange besteht (da ja hier die Nebenbedingung $|x_2| > 0$ erfüllt ist). Im zweiten Falle ist der Kettenbruch niemals convergent, da ja, wegen $A_p = 0$, $x_2 = 0$, stets:

$$\text{(35)} \qquad A_p - B_p\,x_2 = 0, \text{ d. h. } K_p = x_2 = 0$$

wird, sodass also der durch Gl. (27), (28) charakterisirte Divergenz-Fall eintritt; d. h. man hat:

$$\text{(36)} \quad \lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p} = x_2 = 0, \text{ im übrigen: } \lim_{\lambda=\infty} K_{\lambda p + \mu} = x_1 = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_{p-1}}$$

(sofern nicht gerade μ eine solche Zahl m bedeutet, für die ebenfalls noch $A_m - B_m\,x_2 = 0$ wird).

Hiernach ergiebt sich also das folgende Gesammtresultat:

I^a^. Ist: $|B_{p-1}| > 0$, $|D| > 0$, $|A_p| > 0$,

so sind die Bedingungen (A) und (B) *nothwendig* und *hinreichend* für die *Convergenz* des rein periodischen Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=\infty}$, und zwar hat man:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=\infty} = \frac{A_{p-1} - B_p + \varepsilon \cdot \sqrt{D}}{2\, B_{p-1}},$$

wo $\sqrt{D}$ den Hauptwerth bedeutet und $\varepsilon = \pm 1$ vermöge der Ungleichung (21) eindeutig bestimmt ist.

Im Falle $A_p = 0$ hat man[1]):

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=\infty} = 0, \text{ wenn: } \left|\frac{A_{p-1}}{B_p}\right| < 1,$$

während der Kettenbruch *divergirt*,

$$\text{wenn: } \left|\frac{A_{p-1}}{B_p}\right| > 1.$$

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, dass die Convergenz des Kettenbruches nicht alterirt wird, wenn unter den Näherungsbrüchen K_μ ($\mu = 1, 2, \ldots p$) einer oder mehrere durch das Verschwinden des Nenners B_μ sinnlos werden. Angenommen nämlich, es sei für irgend ein bestimmtes $\mu = n$: $B_n = 0$ (in welchem Falle dann allemal: $|A_n| > 0$), so folgt aus Gl. (19):

$$K_{\lambda p+n} = \frac{x_1 - M^\lambda \cdot x_2}{1 - M^\lambda}, \tag{37}$$

---

[1]) Beispiel: Für den unendlichen Kettenbruch mit der dreigliedrigen Periode:

$$\left(\frac{a_1}{b_1}, \ \frac{a_2}{b_2}, \ -\frac{b_2}{1}\right)$$

hat man:

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1 & B_1 &= b_1 \\ A_2 &= a_1 b_2 & B_2 &= a_2 + b_1 b_2 \\ A_3 &= 0 & B_3 &= a_2. \end{aligned}$$

Der Kettenbruch convergirt also nach Null, wenn $\left|\frac{A_2}{B_3}\right| < 1$, d. h. $|a_2| - |a_1 b_2| > 0$.

sodass alle $K_{\lambda p+n}$ für $\lambda \geqq 1$ endlich und bestimmt ausfallen und $\lim\limits_{\lambda=\infty} K_{\lambda p+n} = x_1$ wird.

I^b. $D = 0$.

Ist $D = 0$, so hat man:

(38) $(A_{p-1} - B_p)^2 = -4 A_p B_{p-1}$ anders geschrieben: $S^2 = 4P$ (also sicher: $|S| > 0$). Die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung (I) fallen dann in die eine zusammen:

$$x = \frac{A_{p-1} - B_p}{2 B_{p-1}} = -\frac{2 A_p}{A_{p-1} - B_p}, \tag{39}$$

und es wird daher:

$$\left.\begin{array}{l} A_{p-1} - B_{p-1} x = A_{p-1} - \frac{1}{2}(A_{p-1} - B_p) \\ B_{p-1} x + B_p \quad = \frac{1}{2}(A_{p-1} - B_p) + B_p \end{array}\right\} = \frac{1}{2} S, \tag{40}$$

sodass Gl. (12) sich zunächst in die Form setzen lässt:

$$H - x = \frac{B_p + B_{p-1} x}{B_p + B_{p-1} h} \cdot (h - x). \tag{41}$$

Subtrahirt man auf beiden Seiten $(h - x)$, so wird:

$$H - h = \frac{B_{p-1}(x - h)}{B_p + B_{p-1} h} \cdot (h - x)$$

$$= -\frac{B_{p-1}}{B_p + B_{p-1} x} \cdot (H - x) \cdot (h - x) \text{ (nach Gl. (41))}$$

$$= -\frac{2 B_{p-1}}{S} \cdot (H - x) \cdot (h - x) \text{ (nach Gl. (40))}. \tag{42}$$

Hieraus findet man wieder für: $h = K_{\nu-p}$, also: $H = K_\nu$, die Recursionsformel:

$$K_\nu - K_{\nu-p} = -\frac{2 B_{p-1}}{S} (K_\nu - x)(K_{\nu-p} - x), \tag{43}$$

aus welcher zunächst hervorgeht, dass für: $K_{\nu-p} - x = 0$ auch: $K_\nu - x = 0$ (nämlich: $K_\nu = K_{\nu-p}$) wird und umgekehrt.

Ist also $K_{\nu-p} - x$ von Null verschieden, so gilt das gleiche von $K_\nu - x$, und man kann also in diesem Falle

Gl. (43) durch Division mit $(K_\nu - x) \cdot (K_{\nu-p} - x)$ in die Form setzen:

(44) $$\frac{1}{K_\nu - x} = \frac{1}{K_{\nu-p} - x} + N, \quad \text{wo: } N = \frac{2 B_{p-1}}{S},$$

sodass sich durch Substitution von $\nu = p + \mu, 2p + \mu, \ldots \lambda p + \mu$ und Addition der betreffenden Gleichungen ergiebt:

(45) $$\frac{1}{K_{\lambda p + \mu} - x} = \frac{1}{K_\mu - x} + \lambda N,$$

also schliesslich:

(46) $$K_{\lambda p + \mu} = x + \frac{K_\mu - x}{1 + \lambda N (K_\mu - x)} = x + \frac{A_\mu - B_\mu x}{B_\mu + \lambda N (A_\mu - B_\mu x)}$$

und:

(47) $$\lim_{\lambda = \infty} K_{\lambda p + \mu} = x.$$

Ist andererseits für irgend ein $\mu = m$: $K_m = x$, so folgt auf Grund der oben gemachten Bemerkung, dass auch: $K_{p+m} = x$, sodann: $K_{2p+m} = x$ u. s. f., d. h. man hat in diesem Falle:

(48) $$\lim_{\lambda = \infty} K_{\lambda p + m} = K_{\lambda p + m} = x.$$

Wird ferner für irgend ein $\mu = n$: K_n sinnlos, also $B_n = 0$ (wobei dann sicher $|A_n| > 0$), so folgt aus Gl. (46):

(49) $$K_{\lambda p + n} = x + \frac{1}{\lambda N}, \quad \text{also ebenfalls: } \lim_{\lambda = \infty} K_{\lambda p + n} = x.$$

Betrachtet man schliesslich noch den speciellen Fall: $A_p = 0$ (wobei dann: $|A_{p-1}| > 0$, $|B_p| > 0$), so wird hier nach Gl. (38) auch: $A_{p-1} - B_p = 0$ (also: $S = 2 B_p$), d. h. die quadratische Gleichung (I) reducirt sich auf die folgende:

(50) $$B_{p-1} x^2 = 0$$

mit der Doppelwurzel $x = 0$. Die zuvor angestellten Betrachtungen behalten dann durchweg ihre Gültigkeit, man hat lediglich in Gl. (42) — (49) $x = 0$ zu setzen und findet in jedem der betreffenden Fälle:

(51) $$\lim_{\lambda = \infty} K_{\lambda p + \mu} = 0.$$

Hiernach ergiebt sich also der Satz:

I^b. Ist: $|B_{p-1}| > 0, \quad D = 0$

so *convergirt* $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=\infty}$ in jedem Falle gegen den Werth:

$$x = \frac{A_{p-1} - B_p}{2\, B_{p-1}} = -\frac{2\, A_p}{A_{p-1} - B_p}$$

und man hat speciell:

$$x = 0, \text{ falls: } A_p = 0.$$

Es bleibt jetzt noch der Fall zu betrachten:

$$\text{II.} \quad B_{p-1} = 0.$$

Aus: $A_p B_{p-1} - A_{p-1} B_p = -P$, wo: $|P| > 0$, folgt dann, dass allemal:

(52) $$|A_{p-1}| > 0, \quad |B_p| > 0.$$

Der Werth x des Kettenbruches, falls derselbe überhaupt convergirt, hätte hier der Relation zu genügen:

(53) $$x = \frac{A_p + A_{p-1}\, x}{B_p}$$

sodass an die Stelle der quadratischen Gleichung (I) die folgende lineare tritt:

(II) $$(B_p - A_{p-1})\, x - A_p = 0.$$

Für die weitere Untersuchung sind nun folgende Unterfälle zu unterscheiden:

$$\text{II}^{a}. \quad |A_p| > 0, \quad |B_p - A_{p-1}| > 0.$$

Man hat also:

(54) $x = \dfrac{A_p}{B_p - A_{p-1}}$ d. h. endlich und von Null verschieden.

Da sodann, wegen $B_{p-1} = 0$, die Beziehung besteht:

(55) $$H \equiv \left(\frac{a_1}{b_1}, \dots \frac{a_p}{b_p + h}\right) = \frac{A_p + A_{p-1}\, h}{B_p},$$

so folgt:

$$H - x = \frac{A_{p-1}}{B_p} \cdot h + \frac{A_p}{B_p} - \frac{A_p}{B_p - A_{p-1}} = \frac{A_{p-1}}{B_p} \cdot h - \frac{A_{p-1} A_p}{B_p (B_p - A_{p-1})},$$

d. h.

$$(56) \qquad H - x = M \cdot (h - x), \quad \text{wo: } M = \frac{A_{p-1}}{B_p}$$

und hieraus, analog wie im Falle I[a]:

$$(57) \qquad K_{\lambda p + \mu} - x = M^{\lambda} \cdot (K_{\mu} - x) \quad (\mu = 1, 2, \ldots p).$$

Hieraus erkennt man, dass der Kettenbruch sicher divergirt, wenn $|M| \geqq 1$ (wobei der Fall $M = 1$, d. h. $B_p - A_{p-1} = 0$ auf Grund der Voraussetzung vorläufig noch ausgeschlossen erscheint). Aber auch im Falle $|M| < 1$ findet Divergenz statt. Hier wird zwar:

$$(58) \qquad \lim_{\lambda = \infty} K_{\lambda p + \mu} = x,$$

sobald μ einen solchen Index bedeutet, für welchen K_{μ} eine bestimmte Zahl vorstellt. Dagegen wird $K_{\lambda p + \mu}$ für jedes λ gleichzeitig mit K_{μ} sinnlos, und da dies, wegen $B_{p-1} = 0$, für $\mu = p - 1$ sicher (eventuell auch noch für andere Werthe von μ) der Fall ist, so enthält die Folge der Näherungsbrüche $K_{\lambda p + \mu}$ allemal unbegrenzt viele sinnlose[1]), sodass also der unendliche Kettenbruch als divergent bezeichnet werden muss[2]).

---

[1]) Dies wurde von Herrn Landsberg (a. a. O. p. 237) übersehen, sodass er in dem betreffenden Falle Convergenz deducirt.

[2]) Beispiel: Der Kettenbruch mit der 3 gliedrigen Periode:

$$\left(\frac{a_1}{b_1}, \; -\frac{b_1}{1}, \; \frac{a_2}{b_2} \right).$$

Man hat: $B_2 = 0$

und allgemein:

$$B_{3\lambda + 2} = 0 \quad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots).$$

$$\text{II}^b. \quad |A_p| > 0, \quad |B_p - A_{p-1}| = 0.$$

Da hier $A_{p-1} = B_p$, so lässt sich Gl. (54) in die Form setzen:

$$H = \frac{A_p + B_p h}{B_p} = h + \frac{A_p}{B_p} \tag{59}$$

sodass sich ergiebt:

$$K_{\lambda p + \mu} = K_\mu + \lambda \cdot \frac{A_p}{B_p}, \tag{60}$$

d. h. der Kettenbruch divergirt nach ∞ (mit dem Vorzeichen von $\frac{A_p}{B_p}\Big)$.

$$\text{II}^c. \quad A_p = 0.$$

Man hat hier aus Gl. (54):

$$H = \frac{A_{p-1}}{B_p} \cdot h \tag{61}$$

und daher:

$$K_{\lambda p + \mu} = \left(\frac{A_{p-1}}{B_p}\right)^\lambda \cdot K_\mu. \tag{62}$$

Der Kettenbruch ist also, wie auch $\left|\frac{A_{p-1}}{B_p}\right|$ beschaffen sein möge, schon aus dem Grunde divergent, weil die Reihe der Näherungsbrüche unendlich viele sinnlose (nämlich für $\mu = p - 1$) enthält.

Da hiernach der Kettenbruch im Falle $B_{p-1} = 0$ allemal divergirt, so kann man schliesslich die gefundenen Ergebnisse in folgender Weise zusammenfassen:

Für die *Convergenz* des rein periodischen Kettenbruches mit der p-gliedrigen Periode $\left(\frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_p}{b_p}\right)$ ist *nothwendig*, dass:

[1] $$|B_{p-1}| > 0.\ ^{1)}$$

Diese Bedingung ist auch *hinreichend*, wenn: $D \equiv (A_{p-1} - B_p)^2 + 4 A_p B_{p-1} = 0$ und man hat:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=\infty} = \frac{A_{p-1} - B_p}{2 B_{p-1}}.$$

Ist dagegen $D > 0$, so ist weiter *nothwendig*, dass:

[2] $$\left|\Re\left(\frac{S}{\sqrt{D}}\right)\right| > 0 \quad (\text{wo: } S = A_{p-1} + B_p).\ ^{2)}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so lässt sich $\varepsilon \cdot \sqrt{D}$ (wo $\varepsilon = \pm 1$ und $\sqrt{D}$ den Hauptwerth der Quadratwurzel bedeutet) eindeutig so fixiren, dass:

$$|S - \varepsilon \cdot \sqrt{D}| < |S + \varepsilon \cdot \sqrt{D}|,$$

sodass also:

$$x_1 = \frac{A_{p-1} - B_p + \varepsilon \cdot \sqrt{D}}{2 B_{p-1}}, \quad x_2 = \frac{A_{p-1} - B_p - \varepsilon \cdot \sqrt{D}}{2 B_{p-1}}$$

eindeutig bestimmte Zahlen vorstellen. Im Falle $|A_p| > 0$ convergirt alsdann der Kettenbruch gegen den Werth x_1, sofern $p \leqq 2$, während für $p \geqq 3$ noch die folgende Bedingung als *nothwendig und hinreichend* hinzutreten muss:

[3] $$|A_\mu - B_\mu x_2| > 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots (p-2)).$$

---

[1]) Ist $p = 1$, so hat man nach üblicher Weise zu setzen:

$$B_{p-1} \equiv B_0 = 1,$$

sodass also die fragliche Bedingung hier stets eo ipso erfüllt ist. Im übrigen hat man in diesem Falle:

$$A_{p-1} = 0,\ A_p = a_1,\ B_p = b_1,\ S = b_1,\ D = b_1^2 + 4 a_1.$$

[2]) Die Bedingung [2] lässt sich mit Rücksicht auf Gl. (24^a), (24^b) auch folgendermaassen formuliren:

Es darf *keine* Relation bestehen von der Form:

$$S^2 = 4 \vartheta P \quad (0 \leqq \vartheta < 1)$$

oder anders geschrieben:

$$D = -4 \eta P \quad (0 < \eta \leqq 1).$$

In dem besonderen Falle $A_p = 0$ lässt sich die Bedingung [2] durch die folgende ersetzen:

$$[2^a] \qquad \left| \frac{A_{p-1}}{B_p} \right| < 1$$

und man hat alsdann $x_1 = 0$ als Grenzwerth des Kettenbruches.

Sind S und D reell, was offenbar insbesondere stets der Fall ist, wenn die a_ν, b_ν durchweg reell sind, so besteht offenbar die Divergenz-Bedingung (24): $\Re\left(\frac{S}{\sqrt{D}}\right) = 0$ im Falle $D > 0$ ausschliesslich dann, wenn $S = 0$; dagegen im Falle $D < 0$ für jedes S.

Da andererseits im Falle $D > 0$, $|S| > 0$ von den beiden Werthen des Ausdruckes

$$S + \varepsilon \cdot \sqrt{D} \quad (\text{wo jetzt: } \sqrt{D} > 0)$$

derjenige der numerisch grössere ist, bei welchem ε gleiches Vorzeichen mit S besitzt, also: $\varepsilon = \frac{S}{|S|}$ gesetzt werden kann, so gewinnt man hier die folgende einfachere Formulirung:

> Sind S, D *reell* (eventuell auch *Null*), so ist für die *Convergenz* des fraglichen Kettenbruches *nothwendig:*
>
> $$|B_{p-1}| > 0 \quad |S| > 0 \quad D \geqq 0.$$
>
> Diese Bedingungen sind auch *hinreichend* im Falle $D = 0$ [1]) und für $p \leqq 2$ auch im Falle $D > 0$, und man hat:
>
> $$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{\nu=1}^{\nu=\infty} = \frac{1}{2 B_{p-1}} \left\{ A_{p-1} - B_p + \frac{S}{|S|} \cdot \sqrt{D} \right\}.$$

---

[1]) Die Bedingung $|S| > 0$ ist in diesem Falle stets eo ipso erfüllt: s. Gl. (38), p. 475.

Im Falle $p \geqq 3$ ist jedoch noch erforderlich, dass:

$$|A_\mu - B_\mu x_2| > 0 \quad (\mu = 1, \ldots (p-2)),$$

wo:

$$x_2 = \frac{1}{2B_{p-1}} \left\{ A_{p-1} - B_p - \frac{S}{|S|} \cdot \sqrt{D} \right\}.$$

---

§ 2. Der einem rein periodischen Kettenbruche conjugirte Kettenbruch.

Bedeutet K einen unendlichen rein periodischen Kettenbruch mit der p-gliedrigen Periode $\left(\frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_p}{b_p}\right)$, so soll als zu K conjugirt derjenige unrein periodische Kettenbruch K' bezeichnet werden, welcher besteht aus dem Anfangsgliede b_p und einem rein periodischen Kettenbruche mit der Periode $\left(\frac{a_p}{b_{p-1}}, \frac{a_{p-1}}{b_{p-2}}, \ldots \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_1}{b_p}\right)$, also:

$$(63) \qquad K' \equiv \left(b_p; \frac{a_p}{b_{p-1}}, \ldots \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{b_p}, \ldots\right).$$

Für den Fall $p = 1$, in welchem diese Definition keinen Sinn besitzt, hat man zu setzen:

$$(64) \qquad K' \equiv \left(b_1; \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_1}{b_1}, \ldots\right) \text{ d. h. } \equiv b_1 + K.$$

Wenn nun in dem zuletzt bezeichneten Falle der Kettenbruch K überhaupt convergirt, so hat man[1]):

$$(65) \quad \begin{cases} K = x_1 \equiv \frac{1}{2}(b_1 + \varepsilon \cdot \sqrt{b_1^2 + 4a_1}), & \text{wenn: } |b_1^2 + 4a_1| > 0, \\ \text{bezw. } K = x \equiv \frac{1}{2} b_1, & \text{wenn: } b_1^2 + 4a_1 = 0, \end{cases}$$

und daher:

$$(66) \quad \begin{cases} K' = -\frac{1}{2}(b_1 - \varepsilon \cdot \sqrt{b_1^2 + 4a_1}) & \text{d. h. } = -x_2, \\ \text{bezw. } K' = -\frac{1}{2} b_1 & \text{d. h. } = -x. \end{cases}$$

---

[1]) Vgl. p. 480, Fussnote 1).

Um nachzuweisen, dass ein ganz analoger Zusammenhang zwischen K und K' auch für $p \geqq 2$ stattfindet, schicken wir zunächst die folgende Hülfsbetrachtung voraus. Setzt man:

$$(67^{a}) \qquad H = \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{R_2}\right) = \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{R_2}},$$

so folgt:

$$(67^{b}) \qquad -R_2 = \frac{a_2}{b_1 - \frac{a_1}{H}} = \left(\frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{-H}\right),$$

und umgekehrt.

Substituirt man:

$$R_2 = b_2 + \frac{a_3}{R_3},$$

so wird:

$$(68^{a}) \qquad H = \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{R_3}\right),$$

und zunächst:

$$-\frac{a_3}{R_3} = b_2 + \frac{a_2}{b_1 - \frac{a_1}{H}},$$

also:

$$(68^{b}) \qquad -R_3 = \left(\frac{a_3}{b_2}, \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{-H}\right) \text{ — vice versa.}$$

Angenommen, es bestehen für irgend ein bestimmtes n allemal gleichzeitig die beiden Relationen:

$$(69) \qquad \begin{cases} H = \left(\frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}, \frac{a_n}{R_n}\right) \\ -R_n = \left(\frac{a_n}{b_{n-1}}, \ldots \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{-H}\right), \end{cases}$$

so folgt durch die Substitution:

$$R_n = b_n + \frac{a_{n+1}}{R_{n+1}}$$

zunächst:

$$H = \left(\frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_n}{b_n}, \frac{a_{n+1}}{R_{n+1}}\right)$$

und:

$$-\frac{a_{n+1}}{R_{n+1}} = b_n + \left(\frac{a_n}{b_{n-1}}, \ldots \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{-H}\right)$$

also schliesslich:

$$-R_{n+1} = \left(\frac{a_{n+1}}{b_n}, \frac{a_n}{b_{n-1}}, \ldots \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{-H}\right).$$

Damit ist aber die Allgemeingültigkeit der Beziehungen (69) erwiesen, da deren Richtigkeit für $n = 2, 3$ bereits erkannt wurde.

Setzt man jetzt in Gl. (69)

$$(70) \qquad n = p \geq 2, \quad H = -H', \quad R_p = b_p - h',$$

so ergeben sich als allemal gleichzeitig bestehend die Beziehungen:

$$(71) \qquad \begin{cases} H' = \left(\frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_{p-1}}{b_{p-1}}, \frac{a_p}{b_p - h'}\right) \\ h' = \left(b_p; \frac{a_p}{b_{p-1}}, \ldots \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{H'}\right). \end{cases}$$

Zugleich besteht dann aber, falls $|D| > 0$, zwischen h' und H' die folgende, aus Gl. (10) und (14) für $H = -H'$, $h = -h'$ hervorgehende Relation:

$$(72) \qquad \frac{h' + x_2}{h' + x_1} = M \cdot \frac{H' + x_2}{H' + x_1} \quad \left(\text{wo: } M = \frac{S - \varepsilon \cdot \sqrt{D}}{S + \varepsilon \cdot \sqrt{D}}\right).$$

Bezeichnet man jetzt die Näherungsbrüche des oben mit K' bezeichneten unrein periodischen Kettenbruches mit

$$K'_\nu = \frac{A'_\nu}{B'_\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

sodass also insbesondere:

$$(73) \qquad \begin{cases} K'_0 = b_p \\ K'_1 = \left(b_p; \frac{a_p}{b_{p-1}}\right) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ K'_p = \left(b_p; \frac{a_p}{b_{p-1}}, \ldots \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{b_p}\right), \end{cases}$$

so hat man für $\nu \geqq p$:

$$(74) \qquad K'_\nu = \left(b_p; \frac{a_p}{b_{p-1}}, \ldots \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_1}{K'_{\nu-p}}\right),$$

also, wie die Vergleichung mit (71) zeigt, $h' = K'_\nu$ für: $H' = K'_{\nu-p}$. In Folge dessen ergiebt sich aber aus Gl. (72):

$$(75) \qquad \frac{K'_\nu + x_2}{K'_\nu + x_1} = M \cdot \frac{K'_{\nu-p} + x_2}{K'_{\nu-p} + x_1}$$

und hieraus, analog wie in § 1:

$$(76) \qquad \frac{K'_{\lambda p+\mu} + x_2}{K'_{\lambda p+\mu} + x_1} = M^\lambda \cdot \frac{K'_\mu + x_2}{K'_\mu + x_1} \quad (\mu = 0, 1, \ldots (p-1)),$$

also:

$$(77) \qquad K'_{\lambda p+\mu} = -x_2 + M^\lambda \cdot (x_1 - x_2) \cdot \frac{A'_\mu + B'_\mu x_2}{(A'_\mu + B'_\mu x_1) - M^\lambda (A'_\mu + B'_\mu x_2)}$$

und daher, falls $|M| < 1$:

$$(78) \qquad \lim_{\lambda=\infty} K'_{\lambda p+\mu} = -x_2,$$

sofern noch die Bedingung erfüllt ist:

$$(79) \qquad |A'_\mu + B'_\mu x_1| > 0, \text{ zunächst für: } \mu = 0, 1, \ldots (p-1).$$

Es lässt sich aber auch hier wiederum zeigen, dass diese Bedingung für die beiden l e t z t e n Werthe $\mu = p-2$, $p-1$ nicht in Betracht gezogen zu werden braucht.

Um dies nachzuweisen, hat man nur A'_μ, B'_μ für $\mu = p-2$, $p-1$ durch entsprechende A_μ, B_μ auszudrücken, was auf folgende Weise geschehen kann. Setzt man:

$$(80) \qquad \frac{q}{r} = \left(\frac{a_1}{b_1}, \ldots \frac{a_{p-1}}{b_{p-1}}, \frac{a_p}{b_p - h'}\right)$$

$$= \frac{-A_{p-1} h' + A_p}{-B_{p-1} h' + B_p},$$

so folgt aus Gl. (71):

$$h' = \left(b_p;\ \frac{a_p}{b_{p-1}},\ \dots \frac{a_2}{b_1},\ \frac{a_1 r}{-q}\right)$$

(81) $$= \left(b_p;\ \frac{a_p}{b_{p-1}},\ \dots \frac{a_3}{b_2},\ \frac{a_2 q}{b_1 q - a_1 r}\right).$$

Andererseits ergiebt sich aus Gl. (80):

(82) $$h' = \frac{A_p r - B_p q}{A_{p-1} r - B_{p-1} q}$$

und daher, durch Combination von Gl. (81), (82), für $r = 0$ bezw. $q = 0$:

(83) $$\begin{cases} \left(b_p;\ \dfrac{a_p}{b_{p-1}},\ \dots \dfrac{a_3}{b_2}\right) = \dfrac{A_p}{A_{p-1}} \\ \left(b_p;\ \dfrac{a_p}{b_{p-1}},\ \dots \dfrac{a_3}{b_2},\ \dfrac{a_2}{b_1}\right) = \dfrac{B_p}{B_{p-1}} \end{cases}$$

Da aber aus den Beziehungen:

$$\begin{matrix} A_1 = a_1 & A_2 = a_1 b_2 & A_{\nu+1} = a_{\nu+1} A_{\nu-1} + b_{\nu+1} A_\nu \\ B_1 = b_1 & B_2 = a_2 + b_1 b_2 & B_{\nu+1} = a_{\nu+1} B_{\nu-1} + b_{\nu+1} B_\nu \end{matrix} \quad (\nu \geqq 2)$$

resultirt, dass A_p, A_{p-1} formal (d. h. für ganz beliebige a_ν, b_ν) den grössten gemeinsamen Theiler a_1, dagegen B_p und B_{p-1} überhaupt keinen gemeinsamen Theiler besitzen, so folgt aus Gl. (83):

(84) $$\frac{A'_{p-2}}{B'_{p-2}} = \frac{a^{-1} \cdot A_p}{a^{-1} \cdot A_{p-1}}, \quad \frac{A'_{p-1}}{B'_{p-1}} = \frac{B_p}{B_{p-1}}.$$

Da ferner x_1 eine Wurzel der quadratischen Gleichung (I) (p. 466), so hat man:

(85) $$(B_p + B_{p-1} x_1) \cdot x_1 = A_p + A_{p-1} x_1,$$

also mit Berücksichtigung von Gl. (84):

(86) $$(A'_{p-1} + B'_{p-1} x_1) \cdot x_1 = (A'_{p-2} + B'_{p-2} x_1) \cdot a_1.$$

Daraus erkennt man aber, dass die Beziehung:

$$A'_{p-1} + B'_{p-1} x_1 = 0$$

allemal die folgende:

$$A'_{p-2} + B'_{p-2}\, x_1 = 0$$

nach sich ziehen würde und, sofern nur $|x_1| > 0$, auch umgekehrt: man hätte dann also: $\frac{A'_{p-1}}{B'_{p-1}} = \frac{A'_{p-2}}{B'_{p-2}}$, was wiederum unmöglich ist. Da andererseits im Falle $x_1 = 0$ nach Gl. (85) auch $A_p = 0$ sein muss, so ergiebt sich, wenn man den Fall $A_p = 0$ vorläufig ausschliesst, dass die Bedingung (79) in der That nur für $\mu = 0, 1, \ldots (p-3)$ gefordert zu werden braucht, sodass sie also überhaupt nur für $p > 3$ in Betracht kommt.

Was sodann den vorläufig ausgeschlossenen Fall $A_p = 0$ betrifft, so hat man nach Gl. (33) zu setzen:

$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_{p-1}},\ \text{wenn:}\ \left|\frac{A_{p-1}}{B_p}\right| < 1,$$

und somit:

$$(87)\qquad A_p + A_{p-1}\, x_1 = 0, \quad \text{d. h.}\ A'_{p-2} + B'_{p-2}\, x_1 = 0,$$

sodass also in diesem Falle die Bedingung (79) für $\mu = p - 2$ nicht erfüllt ist und der Kettenbruch K' daher divergirt.

Dagegen hat man nach Gl. (34):

$$x_1 = \frac{A_{p-1} - B_p}{B_{p-1}},\ x_2 = 0,\ \text{wenn:}\ \left|\frac{A_{p-1}}{B_p}\right| > 1,$$

also $x_1 > 0$: der Kettenbruch K' convergirt also in diesem Falle nach $-x_2 = 0$, sofern nur die Bedingung (79) für $\mu = 0, 1, \ldots (p-3)$ erfüllt ist. —

Ist jetzt $D = 0$, so tritt an die Stelle von Gl. (72), die folgende, aus Gl. (42) durch Substitution von $H = -H'$, $h = -h'$ hervorgehende:

$$(88)\quad h' - H' = -\frac{2\,B_{p-1}}{S}(h' + x)\cdot(H' + x) \left(\text{wo: } x = \frac{A_{p-1} - B_p}{2\,B_{p-1}}\right),$$

sodass für: $H' = K'_{\nu-p}$, also: $h' = K'_\nu$ (s. Gl. (71)), sich ergiebt:

$$(89)\quad K'_\nu - K'_{\nu-p} = -N(K'_\nu + x)\cdot(K'_{\nu-p} + x) \left(\text{wo: } N = \frac{2\,B_{p-1}}{S}\right)$$

und, falls $|K'_{\nu-p}+x|>0$ und somit auch $|K'_\nu+x|>0$:

(90) $$\frac{1}{K'_\nu+x}=\frac{1}{K'_{\nu-p}+x}+N.$$

Daraus folgt dann, genau wie in § 1, I^b:

(91) $$\frac{1}{K'_{\lambda p+\mu}+x}=\frac{1}{K'_\mu+x}+\lambda N$$

und:

(92) $$\lim_{\lambda=\infty} K'_{\lambda p+\mu}=-x.$$

Ist aber für irgend ein $\mu=m$: $K'_m+x=0$, so folgt aus Gl. (89), dass $K'_{p+m}=K'_m=-x$, und allgemein: $K'_{\lambda p+m}=-x$, also auch:

(93) $$\lim_{\lambda=\infty} K'_{\lambda p+m}=-x.$$

Dieses Resultat gilt auch wiederum noch in dem besonderen Falle $A_p=0$, d. h. $x=0$. Die vorstehenden Ergebnisse lassen sich also in folgender Weise zusammenfassen:

Ist $|D|>0$ und convergirt der Kettenbruch K nach x_1, so convergirt $-K'$ nach x_2, sofern für $p\geq 3$ noch die Bedingung erfüllt ist:

$$|A'_\mu+B'_\mu x_1|>0 \quad (\mu=0,1,\ldots(p-3)).$$

Nur im Falle: $A_p=0$, $|A_{p-1}|<|B_p|$, in welchem $K=0$ wird, ist K' *divergent;* während für: $A_p=0$, $|A_{p-1}|>|B_p|$ zwar K *divergirt,* dagegen K' nach 0 *convergirt.*

Ist $|D|=0$ und $|B_{p-1}|>0$, so hat man:

$$K=-K'=x \text{ d. h. } =\frac{A_{p-1}-B_p}{2B_{p-1}}.$$

20

Separat-Abdruck
aus den Sitzungsberichten der mathem.-phys. Classe
der kgl. bayer. Akademie der Wissenschaften
Bd. XXX 1900 Heft III.

Ueber einen

Fundamentalsatz
aus der Theorie der periodischen Functionen

von

Alfred Pringsheim.

München 1901
Verlag der k. Akademie.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Die in den Sitzungsberichten erschienenen Abhandlungen sind nicht in einzelnen Abzügen ausgegeben.
(Preis des betr. Heftes der Sitzungsberichte 1 Mark 20 Pfennig).

Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Klasse. Bd. I—XXI in je 3 Abtheilungen, von 1832—1900.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse. Bd. I—XXX, von 1871—1900.

Bauer, Gustav. Kettenbruch Eulers. Abh. II. Kl. XI, 2. 1872 ℳ —.50
— Pascal's Theorem. Abh. II. Kl. XI, 3 1874 ℳ 1.—
— Gedächtnissrede auf Otto Hesse. 1882 ℳ —.60
— Von der Hesse'schen Determinante. Abh. II. Kl. XIV, 3. 1883 ℳ —.50
— Ueber einige Determinanten. Sitzb. 1872, p. 345—354.
— Ueber Kugelfunktionen. Sitzb. 1875, pag. 247—272.
— Ueber Systeme von Curven 6. Ordnung, auf welche das Normalenproblem bei Curven 2. Ordnung führt. Sitzb. 1878, p. 121—135.
— Ueber das geradlinige Hyperboloid. Sitzb. 1880, p. 635—640.
— Tripel von Geraden auf einem Hyperboloid. Sitzb. 1881, p. 241—248.
— Ueber die Hesse'sche Determinante der Hesse'schen Fläche einer Fläche dritter Ordnung. Sitzb. 1883, p. 320.
— Von den gestaltlichen Verhältnissen der parabolischen Curve auf einer Fläche dritter Ordnung. Sitzb. 1883. p. 320—343.
— Ueber d. Discriminante einer binären Form. Sitzb. 1886, p. 183—191.
— Ueber Flächen vierter Ordnung, deren geometrische Erzeugung sich an zwei Tetraeder knüpft. Sitzb. 1888, p. 337—354.
— Darstellung binärer Formen als Potenzsummen. Sitz. 1892, p. 3—20.
— Bemerkungen über zahlentheoretische Eigenschaften der Legendre'schen Polynome. Sitzb. 1894, p. 343—359.
— Von zwei Tetraëdern, welche einander zugleich eingeschrieben und umschrieben sind. Sitz. 1897, p. 359—366.

Brill, Al. Zur Theorie der geodätischen Linie etc. Abh. II. Kl. XIV, 2, 1883 ℳ 1.—
— Bestimmung der optischen Wellenfläche etc. 1883, 3 p. 423—435.
— Ueber rationale Curven und Regelflächen, 1885, 2 p. 276—287.
— Ueber die Multiplicität der Schnittpunkte von zwei ebenen Curven. Sitzb. 1888, p. 81—94.
— Die reducirte Resultante. Abh. II. Kl. XVII, 1889, p. 89—181. ℳ —.40.
— Ueber das Verhalten einer Funktion von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle. Sitzb. 1891, p. 207—220.

Du Bois-Reymond, Paul. Coefficienten der trigonometrischen Reihe. Abh. II. Kl. XII, 2. 1876 ℳ 3.60.
— Ueber den Gültigkeitsbereich der Taylor'schen Reihenentwicklung. Sitzb. 1876, p. 225—237.
— Ein allgemeiner Satz über die Integrirbarkeit von Funktionen integrirbarer Funktionen. Sitz. 1882, p. 240—242.

Dyck, W. Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln definirten Curvensysteme. Erste Mittheilung (mit 4 Taf.). Sitzb. 1891, p. 23—57; zweite Mittheilung (mit 3 Taf.). Sitzb. 1892, p. 101—138.
— Beiträge zur Potentialtheorie. I. Kronecker'sche Charakteristiken. Sitzb. 1895, p. 261—277.

Ueber einen Fundamentalsatz aus der Theorie der periodischen Functionen.

Von **Alfred Pringsheim.**

(Eingelaufen 27. Dezember.)

Im folgenden soll unter $f(u)$ ein für allemal eine Function verstanden werden, welche keine „unendlich kleine“ Periode d. h. in jedem endlichen Bereiche nur eine endliche Zahl von Perioden besitzt: eine Eigenschaft, welche bekanntlich jeder nicht constanten eindeutigen oder endlich-vieldeutigen analytischen Function eo ipso (aber nicht dieser Functions-Classe ausschliesslich[1])) zukommt. Für Functionen dieser Kategorie gilt dann bekanntlich der von Jacobi[2]) aufgestellte und bewiesene Satz, dass sie höchstens doppelperiodisch sein können. Jacobi's Beweis gründet sich auf die folgenden drei Theilsätze:

I. $f(u)$ kann niemals zwei Perioden ω_1, ω_2 mit reellem irrationalen Quotienten besitzen. Ist hingegen $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ reell und rational, so lassen sich ω_1, ω_2 als ganzzahlige Multipla einer einzigen Periode ω darstellen. (A. a. O. § 1.)

---

[1]) So können auch unendlich-vieldeutige analytische Functionen die fragliche Eigenschaft besitzen (z. B. lg $f(u)$), brauchen sie aber nicht zu besitzen (wie z. B. die Umkehrungsfunction eines Integrals u mit mehr als zwei Periodicitäts-Moduln). Vgl. im übrigen: Casorati, Acta math. T. 8 (1886), p. 344.

[2]) Journ. f. Math. Bd. 13 (1835), p. 55—61 (= Ges. Werke, II, p. 25—32).

II. Sind ω_1, ω_2, ω_3 Perioden, welche paarweise kein reelles Verhältniss besitzen, so muss zwischen ihnen eine homogene lineare Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten bestehen. (A. a. O. § 3.)[1])

III. Besteht zwischen irgend drei Perioden ω_1, ω_2, ω_3 mit paarweise nicht reellem Verhältniss eine homogene lineare Relation mit ganzzahligen Coefficienten, so lassen sich zwei Perioden ω, ω' angeben, derart dass: $\omega_\varkappa = m_\varkappa \omega + n_\varkappa \omega'$ ($\varkappa = 1, 2, 3$; $m_\varkappa$, $n_\varkappa$ ganze Zahlen bezw. Null). (A. a. O. § 2.)

Hieraus kann nun in der That gefolgert werden, dass jede endliche Anzahl von Perioden sich schliesslich immer auf eine bezw. zwei reduciren lässt. Aber, obschon das hierzu dienliche Verfahren unbegrenzt fortsetzbar erscheint, so ist doch nicht genügend ersichtlich, dass sich wirklich auch die Gesammtheit aller möglichen Perioden, welche ja unter allen Umständen aus einer unendlichen Zahlenmenge besteht, durch eine bezw. zwei specielle, eindeutig charakterisirte Perioden darstellen lässt. Mit anderen Worten, durch die Jacobi'sche Deduction wird die jeweilige Existenz primitiver Perioden noch keineswegs vollständig in Evidenz gesetzt, vielmehr ist hierzu wiederum noch eine besondere Betrachtung erforderlich.

Darnach erscheint es aber weit zweckmässiger, von vornherein die Existenz bestimmter primitiver Perioden festzustellen: die obigen Jacobi'schen Sätze resultiren sodann als ganz unmittelbare Folgerungen. Ein Verfahren dieser Art wurde von Weierstrass für den allgemeinen Fall von Functionen beliebig vieler Variabeln angegeben[2]) und von O. Bier-

---

[1]) Der sehr sinnreiche, aber etwas mühsame Algorithmus, den Jacobi zum Beweise dieses, den eigentlichen Schwerpunkt der ganzen Deduction bildenden Satzes anwendet, lässt sich auch durch eine wesentlich einfachere Grenz-Betrachtung ersetzen: s. z. B. Rausenberger, Theorie der periodischen Functionen (1884), p. 303, Nr. 7. — Thomae, Abriss einer Theorie der Functionen einer compl. Veränderlichen und der Thetafunctionen, 3. Aufl. (1890), p. 39, § 35.

[2]) Berl. Monatsber. 1876, p. 680 (= Math. Werke, II, p. 70).

mann auf den Fall einer einzigen unabhängigen Variabeln übertragen.[1])

Die folgende, auf einer anderen, principiell etwas einfacheren Auswahl[2]) der primitiven Perioden beruhende Darstellung dürfte den Vorzug grösserer Anschaulichkeit besitzen und gestattet überdies auch einen genauen Ueberblick über die verschiedenen, bezüglich der Anzahl und der Grössenverhältnisse jener besonderen Primitiv-Perioden vorhandenen Möglichkeiten. Der Vollständigkeit halber und, um die vollkommene Analogie in der Behandlung der einfachen und doppelten Periodicität deutlich hervortreten zu lassen, schicke ich auch die Betrachtung desjenigen Falles voraus, welcher den Jacobi'schen Satz I involvirt.

Lehrsatz I. Alle einer Function vom Charakter $f(u)$ zukommenden Perioden Ω, welche gegenseitig in *reellem* Verhältnisse stehen, lassen sich als ganzzahlige Multipla einer einzigen Periode ω_1 darstellen.

Beweis. Bedeutet Ω irgend eine beliebige Periode, so giebt es in Folge der über $f(u)$ gemachten Voraussetzung nur eine endliche Anzahl von Perioden mit einem absoluten Betrag $\leqq |\Omega|$ und somit auch eine endliche Anzahl von Perioden $\omega_\varkappa$, deren absoluter Betrag $|\omega_\varkappa|$ einen bestimmten, von Null verschiedenen Minimalwerth besitzt. Wird eine dieser letzteren willkürlich ausgewählt und mit ω_1 bezeichnet, so hat man für alle möglichen $\omega_\varkappa$ die Beziehung: $\left|\frac{\omega_\varkappa}{\omega_1}\right| = 1$; da aber andererseits $\frac{\omega_\varkappa}{\omega_1}$ nach Voraussetzung reell ist, so folgt:

$$\frac{\omega_\varkappa}{\omega_1} = \pm 1, \quad \text{d. h.} \quad \omega_\varkappa = \pm \omega_1.$$

---

[1]) Theorie der analytischen Functionen (1887), p. 363.

[2]) Noch anders (in wesentlich geometrischer Darstellung) bei Tannery et Molk, Éléments de la théorie des fonctions elliptiques, T. I (1893), p. 143, Nr. 83.

Ist sodann Ω wieder eine ganz beliebige der zu ω_1 in reellem Verhältnisse stehenden Perioden, so lässt sich $\frac{\Omega}{\omega_1}$ stets und nur auf eine einzige Weise in die Form setzen:

$$\frac{\Omega}{\omega_1} = m + \varrho,$$

wo m eine ganze Zahl und $0 \leqq \varrho < 1$. Darnach wäre aber:

$$\varrho\,\omega_1 = \Omega - m\,\omega_1 \quad \text{und zugleich} \quad |\varrho\,\omega_1| < |\omega_1|,$$

d. h. $\varrho\,\omega_1$ eine Periode mit kleinerem absoluten Betrage als ω_1, was unmöglich ist, solange $\varrho > 0$. Somit muss $\varrho = 0$ sein, worauf dann $\Omega = m\,\omega_1$ sich ergiebt.

Folgerungen. 1) Unter den Perioden von $f(u)$ können niemals zwei solche vorkommen, welche ein reelles irrationales Verhältniss besitzen.[1])

[1]) Will man dies noch ausdrücklich bestätigen, so kann man sich statt der von Jacobi benützten Kettenbruch-Entwickelung von $\frac{\omega'}{\omega}$ auch der noch elementareren Darstellung von $\frac{\omega'}{\omega}$ durch einen unendlichen Decimalbruch oder sonstigen systematischen Bruch bedienen. Angenommen man habe:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \lim_{\nu=\infty} \frac{a_\nu}{b^\nu} \text{ irrational},$$

(wo b eine natürliche Zahl $\geqq 2$, a_ν eine Folge ganzer Zahlen, die man ohne Beschränkung der Allgemeinheit als positiv voraussetzen kann), so wird für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{a_\nu + \varrho_\nu}{b^\nu}, \text{ wo: } 0 < \varrho_\nu < 1$$

also:

$$\varrho_\nu\,\omega = b^\nu\,\omega' - a_\nu\,\omega.$$

Die ϱ_ν sind sämmtlich von einander verschieden, da aus $\varrho_m = \varrho_n$ folgen würde:

$$b^m\,\omega' - a_m\,\omega = b^n\,\omega' - a_n\,\omega$$

d. h.

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{a_m - a_n}{b^m - b^n}, \text{ d. h. rational.}$$

Es gäbe also in dem endlichen Bereiche $u = \varrho\,\omega$ $(0 < \varrho < 1)$ unendlich viele Perioden $\varrho_\nu\,\omega$, was der Voraussetzung widerspricht.

2) Besitzt $f(u)$ nur Perioden Ω mit reellem Verhältniss so ist $f(u)$ einfach periodisch, und die „primitive" Periode von $f(u)$ ist eine der beiden nach Willkür zu wählenden Zahlen $\pm \omega_1$, für welche $|\omega_1|$ ein Minimum wird.

3) Da umgekehrt für jedes einfach periodische $f(u)$ alle Perioden-Quotienten reell (und rational) ausfallen müssen, so folgt weiter: Finden sich unter den Perioden von $f(u)$ irgend zwei: $\omega = \xi + \eta i$, $\omega' = \xi' + \eta' i$ mit nicht-reellem Verhältniss:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\xi \xi' + \eta \eta'}{\xi^2 + \eta^2} + \frac{\xi \eta' - \xi' \eta}{\xi^2 + \eta^2} \cdot i, \quad \text{wo also:} \quad |\xi \eta' - \xi' \eta| > 0,$$

so kann $f(u)$ nicht einfach periodisch sein. Um festzustellen, dass alsdann $f(u)$ genau doppelperiodisch sein muss, beweisen wir zunächst den folgenden

Hülfssatz. Sind ω, ω' Perioden von $f(u)$ mit *nicht-reellem* Verhältniss und ausserdem von der Beschaffenheit, dass ausser $h = \omega$ und $h = \omega'$ *keine* Zahl von der Form:

$$h = \varepsilon \omega + \varepsilon' \omega', \quad \text{wo:} \left.\begin{matrix} \varepsilon \\ \varepsilon' \end{matrix}\right\} \geqq 0, \quad \varepsilon + \varepsilon' \leqq 1$$

eine *Periode* von $f(u)$ bildet[1]), so lässt sich *jede* Periode Ω in der Form darstellen:

$$\Omega = m \omega + n \omega'$$

wo m, n ganze Zahlen (einschliesslich der Null) bedeuten; ω, ω' heissen alsdann *primitive* Perioden.

Beweis. Zunächst lässt sich jedenfalls Ω (wie für jede beliebige Zahl durch Auflösung der betreffenden 2 Lineargleichungen folgt) stets und nur auf eine einzige Weise in der Form darstellen:

$$\Omega = a \omega + b \omega' \quad (a, b \text{ reell bezw. Null}),$$

---

1) Diese Bedingung besagt geometrisch, dass im Innern und auf den Seiten des Dreiecks mit den Eckpunkten $0, \omega, \omega'$ keine Perioden ausser ω, ω' liegen sollen.

anders geschrieben:

$$\Omega = m\,\omega + n\,\omega' + k,$$

wo m, n ganze Zahlen (eventuell Null) und:

$$k = \vartheta\,\omega + \vartheta'\,\omega', \quad 0 \leqq \left\{ \begin{matrix} \vartheta \\ \vartheta' \end{matrix} \right\} < 1.$$

Da sodann $k = \Omega - m\,\omega - n\,\omega'$ eine Periode von $f(u)$ sein muss, so folgt aus der Voraussetzung, das keinesfalls

$$\vartheta + \vartheta' \leqq 1$$

sein kann, ausser wenn:

$$\vartheta = \vartheta' = 0.$$

Wäre nun aber:

$$\vartheta + \vartheta' > 0 \quad (\text{andererseits: } \vartheta + \vartheta' < 2),$$

so hätte man:

$$(\omega + \omega') - k = (1 - \vartheta) \cdot \omega + (1 - \vartheta') \cdot \omega'$$
$$= \varepsilon\,\omega + \varepsilon'\,\omega',$$

wo jetzt:

$$\varepsilon + \varepsilon' = 2 - (\vartheta + \vartheta') \left\{ \begin{matrix} > 0 \\ < 1, \end{matrix} \right.$$

d. h. $(\omega + \omega') - k$ wäre eine Periode von der Art, deren Existenz auf Grund der Voraussetzung ausgeschlossen erscheint.

Hiernach kann also in der That nur $\vartheta = \vartheta' = 0$, also:

$$\Omega = m\,\omega + n\,\omega'$$

sein, womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist. —

Lehrsatz II. Finden sich unter den Perioden Ω von $f(u)$ solche mit nicht-reellem Verhältniss und bezeichnet man mit ω_1 irgend ein Ω, für welches $|\omega_1|$ unter allen möglichen $|\Omega|$ ein *Minimum* ist; sodann mit ω_2 ein anderes Ω, für welches $|\omega_2|$ unter allen nach Ausscheidung von $\Omega = \nu\,\omega_1$ ($\nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$) übrig bleibenden $|\Omega|$ gleichfalls ein *Minimum* ist (wobei also $|\omega_2| \geqq |\omega_1|$): so sind ω_1, ω_2 *primitive* Perioden.

Beweis. Es werde unter der (jedenfalls endlichen) Anzahl von Perioden Ω, deren absoluter Betrag einen gewissen von Null verschiedenen Minimalwerth r_1 besitzt, irgend eine beliebig ausgewählt und mit ω_1 bezeichnet. Alsdann ist zunächst auch $-\omega_1$ eine Periode mit dem absoluten Betrage r_1. Im übrigen sind dann nur folgende zwei Fälle möglich:

Erster Fall. Es existiren ausser $\pm\omega_1$ noch andere Perioden mit dem absoluten Betrage r_1. Bezeichnet man eine derselben mit ω_2, so folgt leicht aus dem eben bewiesenen Hülfssatze, dass ω_1, ω_2 primitive Perioden. Betrachtet man nämlich alle Zahlen h von der Form:

$$(1) \qquad h = \vartheta_1 \omega_1 + \vartheta_2 \omega_2, \quad \text{wo: } \left.\begin{matrix}\vartheta_1 \\ \vartheta_2\end{matrix}\right\} \geqq 0, \quad \vartheta_1 + \vartheta_2 \leqq 1,$$

so folgt zunächst für $\vartheta_2 = 0$, bezw. $\vartheta_1 = 0$, dass:

$$h = \vartheta_1 \omega_1 \quad \text{bezw.} \quad h = \vartheta_2 \omega_2$$

wird, sodass unter diesen speciellen h nur die beiden folgenden:

$$h = \omega_1 \qquad h = \omega_2$$

Perioden sind. Ist dagegen $\vartheta_1 > 0$, $\vartheta_2 > 0$, so hat man:

$$\begin{aligned} |h| &= |\omega_1| \cdot \left| \vartheta_1 + \vartheta_2 \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1} \right| \\ &< |\omega_1| \cdot (\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{aligned}$$

mit Ausschluss der Gleichheit, da $\left|\frac{\omega_2}{\omega_1}\right| = 1$, aber $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ von $+1$ verschieden; also schliesslich:

$$|h| < |\omega_1| = |\omega_2| \; ^{1)},$$

sodass in Folge der Auswahl von ω_1 keine dieser Zahlen h eine Periode liefern kann: nach dem obigen Hülfssatze müssen also ω_1, ω_2 primitive Perioden sein.

Zweiter Fall. Es seien $\pm\omega_1$ die einzigen Perioden mit dem absoluten Betrage r_1. Man scheide dann aus der

---

[1]) Dies ist übrigens geometrisch unmittelbar ersichtlich.

Gesammtheit der Ω alle diejenigen von der Form $\Omega = \nu\,\omega_1$ ($\nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$) aus: es sind dies nach Lehrsatz I alle möglichen, die überhaupt zu ω_1 ein reelles Verhältniss haben. Für die übrigbleibenden, die dann also zu ω_1 ein nicht-reelles Verhältniss haben (sodass auf Grund der Voraussetzung auch wirklich solche vorhanden sind) existirt dann wiederum ein gewisses Minimum r_2 des absoluten Betrages (wo also $r_2 > r_1$) und eine endliche Anzahl von Ω, für welche $|\Omega| = r_2$ ist. Wird dann irgend eine von diesen mit ω_2 bezeichnet, so sind ω_1, ω_2 primitive Perioden. Betrachtet man nämlich wiederum alle Zahlen h von der Form (1), so folgt zunächst für $\vartheta_1 = 0$:

$$h = \vartheta_2\,\omega_2,$$

sodass also unter diesen h nur $h = \omega_2$ eine Periode ist (denn $\pm\,\omega_1$ besitzt ja zu ω_2 kein reelles Verhältniss, ist also nicht von der Form $\vartheta_2\,\omega_2$). Ist aber $\vartheta_1 > 0$, so hat man:

$$\begin{aligned} |h| &= |\omega_2| \cdot \left|\vartheta_1 \frac{\omega_1}{\omega_2} + \vartheta_2\right| \\ &< |\omega_2| \cdot (\vartheta_1 + \vartheta_2) \qquad \left(\text{wegen: } \left|\frac{\omega_1}{\omega_2}\right| < 1\right) \\ &< |\omega_2|. \end{aligned}$$

Da es aber ausser $h = \omega_1$ keine Periode h giebt, welche den Bedingungen $\vartheta_1 > 0$, $|h| < |\omega_2|$ genügt, so folgt wieder aus dem obigen Hülfssatze, dass ω_1, ω_2 primitive Perioden sind. —

Folgerungen. 1) Finden sich unter den Perioden von $f(u)$ solche mit nicht-reellem Verhältniss, so ist $f(u)$ genau doppelperiodisch: es giebt also keine drei- und mehrfach periodischen $f(u)$.

2) Zwischen irgend drei der Function $f(u)$ zukommenden Perioden mit paarweise nicht-reellem Verhältniss findet eine homogene lineare Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten statt.

Zwei specielle primitive Perioden, wie die oben näher charakterisirten und mit ω_1, ω_2 bezeichneten, mögen Minimal-Perioden genannt werden. Aus den bisherigen Betrachtungen geht dann nur soviel hervor, dass es jedenfalls nur eine endliche Zahl solcher Minimal-Perioden geben kann. Um deren mögliche Anzahl genauer festzustellen, stützen wir uns auf den folgenden bekannten Satz:

Sind ω, ω' primitive Perioden, so sind

$$\tilde{\omega} = \alpha\,\omega + \beta\,\omega', \quad \tilde{\omega}' = \gamma\,\omega + \delta\,\omega'$$

dann und nur dann gleichfalls primitive Perioden, wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen (einschliesslich der Null) bedeuten, welche der Beziehung genügen:

$$\alpha\,\delta - \beta\,\gamma = \pm 1.$$

Hieraus folgt speciell, wenn man einmal $\alpha = 1$, $\beta = 0$, also $\delta = \pm 1$, γ beliebig, das andere Mal $\gamma = 0$, $\delta = 1$, also $\alpha = \pm 1$, β beliebig annimmt:

Bilden (ω, ω') ein primitives Periodenpaar, so sind alle primitiven Paare, bei welchen eine der Perioden ω bezw. ω' beibehalten wird, in der Form enthalten:

$$(1)\quad (\omega, \gamma\,\omega \pm \omega') \text{ bezw. } (\pm\omega + \beta\,\omega', \omega') \left(\begin{matrix}\beta\\ \gamma\end{matrix}\right\} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \Bigg).$$

Umgekehrt ist jedes solche Periodenpaar ein primitives.

Mit Hülfe dieses letzteren Resultates können wir jetzt den Lehrsatz II, nach welchem — abgesehen von dem noch beliebig bleibenden Vorzeichen — mindestens zwei Minimal-Perioden existiren, in folgender Weise ergänzen.

Lehrsatz III. Es giebt, abgesehen von dem noch willkürlich bleibenden Vorzeichen, *höchstens drei* Minimal-Perioden, d. h. drei paarweise in nicht-reellem Verhältnisse zu einander stehende, noch nach Willkür mit beliebigem Vorzeichen zu versehende Perioden ω_1, ω_2, ω_3, die der Bedingung genügen:

$$|\,\omega_1\,| \leq |\,\omega_2\,| = |\,\omega_3\,|,$$

während ausser $\pm \omega_1$, $\pm \omega_2$, $\pm \omega_3$ *keine* Periode Ω existirt, für welche:

$$|\Omega| \leqq |\omega_2|.$$

Zugleich bildet dann, ausser (ω_1, ω_2) und (ω_1, ω_3), auch (ω_2, ω_3) ein *primitives* Perioden-Paar.[1])

Beweis. Wir beweisen zunächst die Richtigkeit der zuletzt ausgesprochenen Behauptung. Im Falle $|\omega_2| = |\omega_1|$ folgt dieselbe unmittelbar aus Lehrsatz II, da man in diesem Fall für ω_1, ω_2 ohne weiteres auch ω_2, ω_3 substituiren kann.

Sei nun $|\omega_2| > |\omega_1|$. Da ω_3 eine Periode und (ω_1, ω_2) ein primitives Periodenpaar, so hat man jedenfalls:

$$\omega_3 = m\,\omega_1 + n\,\omega_2, \tag{2}$$

wo m, n ganze Zahlen und beide von Null verschieden. Dabei kann man ω_3 aus den beiden, nur durch das Vorzeichen verschiedenen, zur Verfügung stehenden Zahlen so auswählen, dass $m > 0$. Zugleich mag dann auch unter ω_2 gerade diejenige der beiden in Betracht kommenden, nur durch das Vorzeichen verschiedenen Zahlen verstanden werden, für welche $n > 0$. Sind jetzt ω_3, ω_2 in dieser Weise normirt, so lässt sich wiederum zeigen, dass ausser ω_2, ω_3 keine Periode h von der Form existirt:

$$h = \vartheta_2\,\omega_2 + \vartheta_3\,\omega_3, \quad \text{wo:} \left.\begin{matrix}\vartheta_2\\ \vartheta_3\end{matrix}\right\} \geqq 0, \quad \vartheta_2 + \vartheta_3 \leqq 1. \tag{3}$$

Man hat zunächst wieder für $\vartheta_3 = 0$, bezw. $\vartheta_2 = 0$:

$$h = \vartheta_2\,\omega_2, \quad \text{bezw.} \quad h = \vartheta_3\,\omega_3,$$

sodass unter diesen besonderen h sich thatsächlich nur die beiden Perioden

$$h = \omega_2, \quad h = \omega_3$$

vorfinden. Ist sodann $\vartheta_2 > 0$, $\vartheta_3 > 0$, so wird:

---

[1]) Für (ω_1, ω_2) und (ω_1, ω_3) folgt dies aus Lehrsatz II.

$$|h| = |\omega_2| \cdot \left| \vartheta_2 + \vartheta_3 \cdot \frac{\omega_3}{\omega_2} \right|$$
$$< |\omega_2| \cdot (\vartheta_2 + \vartheta_3) \qquad \text{(mit Ausschluss der Gleichheit)}$$
$$< |\omega_2| .$$

Die einzigen Perioden, deren absoluter Betrag $< |\omega_2|$ ist, sind aber $\pm \omega_1$. Und da aus Gl. (2) folgt:

$$\omega_1 = -\frac{n}{m}\omega_2 + \frac{1}{m}\omega_3, \quad -\omega_1 = \frac{n}{m}\omega_2 - \frac{1}{m}\cdot\omega_3$$

(wo $m > 0$, $n > 0$), so kommen $\pm \omega_1$ unter den Zahlen h nicht vor. Somit giebt es ausser $h = \omega_2$, $h = \omega_3$ keine Periode h von der Form (3), und (ω_2, ω_3) bilden daher nach dem bewiesenen Hülfssatze ein primitives Periodenpaar.

Da nun ausser (ω_3, ω_2) auch (ω_1, ω_2) ein primitives Periodenpaar bilden, so hat man nach (1):

$$\omega_3 = \pm \omega_1 + \beta\, \omega_2,$$

also mit Rücksicht auf Gl. (2):

$$\omega_3 = \omega_1 + n\, \omega_2 \quad (n \geqq 1). \tag{4}$$

Andererseits bilden aber auch (ω_1, ω_3) und (ω_1, ω_2) je ein primitives Periodenpaar, und man hat daher nach (1):

$$\omega_3 = \gamma\, \omega_1 \pm \omega_2,$$

also wiederum mit Rücksicht auf Gl. (2):

$$\omega_3 = m\, \omega_1 + \omega_2 \quad (m \geqq 1). \tag{5}$$

Die Vergleichung von (4) und (5) zeigt dann, dass:

$$m = 1, \quad n = 1$$

sein muss, d. h. man findet schliesslich:

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 \tag{6}$$

als den einzig möglichen Werth von ω_3. Damit ist aber der ausgesprochene Satz bewiesen.

Zusatz. Man überzeugt sich leicht, dass der durch Gl. (6) und die Beziehung $|\omega_3| = |\omega_2|$ charakterisirte mögliche Fall auch wirklich eintreten kann. Ist $|\omega_2| = |\omega_1|$, so erscheint als Perioden-Parallelogramm mit den Ecken $0, \omega_1, \omega_3, \omega_2$ ein Rhombus, welcher durch die Diagonale $\overline{0\,\omega_3}$ in zwei gleichseitige Dreiecke zerfällt. Ist $|\omega_2| > |\omega_1|$, so besitzt das betreffende Parallelogramm nur die Eigenschaft, dass die Diagonale $\overline{0\,\omega_3}$ der grösseren Seite $\overline{0\,\omega_2}$ gleich ist. Dagegen ist dann das (gleichfalls primitive) Perioden-Parallelogramm mit den Ecken $0, \omega_3, \omega_2 + \omega_3, \omega_2$ ein rhombisches.

21

Separat-Abdruck
aus den Sitzungsberichten der mathem.-phys. Classe
der kgl. bayer. Akademie der Wissenschaften
Bd. XXXI 1901 Heft IV.

Ueber die Divergenz gewisser Potenzreihen an der Convergenzgrenze

von

Alfred Pringsheim.

Mit besten Grüßen!

München 1902
Verlag der k. Akademie.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Die in den Sitzungsberichten erschienenen Abhandlungen sind nicht in einzelnen Abzügen ausgegeben.
(Preis des betr. Heftes der Sitzungsberichte 1 Mark 20 Pfennig).

Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Klasse. Bd. I—XXI in je 3 Abtheilungen, von 1832—1900.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse. Bd. I—XXX, von 1871—1900.

Bauer, Gustav. Kettenbruch Eulers. Abh. II. Kl. XI, 2. 1872 ℳ —.50
— Pascal's Theorem. Abh. II. Kl. XI, 3 1874 ℳ 1.—
— Gedächtnissrede auf Otto Hesse. 1882 ℳ —.60
— Von der Hesse'schen Determinante. Abh. II. Kl. XIV, 3. 1883 ℳ —.50
— Ueber einige Determinanten. Sitzb. 1872, p. 345—354.
— Ueber Kugelfunktionen. Sitzb. 1875, pag. 247—272.
— Ueber Systeme von Curven 6. Ordnung, auf welche das Normalenproblem bei Curven 2. Ordnung führt. Sitzb. 1878, p. 121—135.
— Ueber das geradlinige Hyperboloid. Sitzb. 1880, p. 635—640.
— Tripel von Geraden auf einem Hyperboloid. Sitzb. 1881, p. 241—248.
— Ueber die Hesse'sche Determinante der Hesse'schen Fläche einer Fläche dritter Ordnung. Sitzb. 1883, p. 320.
— Von den gestaltlichen Verhältnissen der parabolischen Curve auf einer Fläche dritter Ordnung. Sitzb. 1883. p. 320—343.
— Ueber d. Discriminante einer binären Form. Sitzb. 1886, p. 183—191.
— Ueber Flächen vierter Ordnung, deren geometrische Erzeugung sich an zwei Tetraeder knüpft. Sitzb. 1888, p. 337—354.
— Darstellung binärer Formen als Potenzsummen. Sitz. 1892, p. 3—20.
— Bemerkungen über zahlentheoretische Eigenschaften der Legendre'schen Polynome. Sitzb. 1894, p. 343—359.
— Von zwei Tetraëdern, welche einander zugleich eingeschrieben und umschrieben sind. Sitz. 1897, p. 359—366.

Brill, Al. Zur Theorie der geodätischen Linie etc. Abh. II. Kl. XIV, 2, 1883 ℳ 1.—
— Bestimmung der optischen Wellenfläche etc. 1883, 3 p. 423—435.
— Ueber rationale Curven und Regelflächen, 1885, 2 p. 276—287.
— Ueber die Multiplicität der Schnittpunkte von zwei ebenen Curven. Sitzb. 1888, p. 81—94.
— Die reducirte Resultante. Abh. II. Kl. XVII, 1889, p. 89—181. ℳ —.40.
— Ueber das Verhalten einer Funktion von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle. Sitzb. 1891, p. 207—220.

Du Bois-Reymond, Paul. Coefficienten der trigonometrischen Reihe. Abh. II. Kl. XII, 2. 1876 ℳ 3.60.
— Ueber den Gültigkeitsbereich der Taylor'schen Reihenentwicklung. Sitzb. 1876, p. 225—237.
— Ein allgemeiner Satz über die Integrirbarkeit von Funktionen integrirbarer Funktionen. Sitz. 1882, p. 240—242.

Dyck, W. Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln definirten Curvensysteme. Erste Mittheilung (mit 4 Taf.). Sitzb. 1891, p. 23—57; zweite Mittheilung (mit 3 Taf.). Sitzb. 1892, p. 101—138.
— Beiträge zur Potentialtheorie. I. Kronecker'sche Charakteristiken. Sitzb. 1895, p. 261—277.

Ueber die Divergenz gewisser Potenzreihen an der Convergenzgrenze.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 27. Dezember.*)

In einer früheren Mittheilung „Ueber das Verhalten von Potenzreihen auf dem Convergenzkreise" habe ich im Anschlusse an einen zuerst von Herrn Tauber bewiesenen Satz die Vermuthung ausgesprochen,[1]) dass die beiden Bedingungen:

$$\text{(A)} \qquad \lim_{\varrho=1-0} \mathfrak{P}(\varrho X) = A, \qquad \lim_{\nu=\infty} a_\nu = 0$$

für die Convergenz von $\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu$ an der Grenzstelle $x = X$ nicht hineinreichen dürften. Im folgenden will ich zeigen, dass es thatsächlich Reihen giebt, welche den Bedingungen (A) genügen — ja sogar der ersten dieser Bedingungen in dem erweiterten Umfange, dass $\lim_{x=X} \mathfrak{P}(x) = A$ beim Grenz-Uebergange auf einem beliebigen, dem Innern des Convergenzkreises angehörigen Strahle — und welche dennoch für

[1]) Sitz.-Ber. Bd. 30 (1900), p. 43. — Ich möchte bei dieser Gelegenheit bemerken, dass ein ähnlicher Satz wie der a. a. O. p. 85 von mir formulirte, in einer anderen, mir inzwischen erst bekannt gewordenen Abhandlung des Herrn Tauber sich findet: „Ueber das Poisson'sche und das demselben conjugierte Integral" (Wiener Monatshefte, Jahrg. VI [1895], p. 118).

$x = X$ divergiren.[1]) Dabei wird es offenbar, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun, gestattet sein, speciell $X = 1$ anzunehmen.

---

1. Ist die Reihe $\sum_1^\infty a_\nu$ convergent und ihre Summe $= s$, so bestehen die beiden Bedingungen:[2])

$$(1) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \ldots + n \cdot a_n}{n} = 0$$

$$(2) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n} = s \quad (\text{wo: } s_k = \sum_1^k {}^\nu a_\nu).$$

Jede dieser Beziehungen (die zweite in dem Sinne, dass der betreffende Grenzwerth irgend eine bestimmte Zahl s vorstellt) ist also nothwendig für die Convergenz, dagegen erweist sich keine allein auch als ausreichend: der Bedingung (1) genügt z. B. jede divergente Reihe, für welche $\lim_{n=\infty} n \cdot a_n = 0$ ist;[3]) der Bedingung (2) unendlich viele innerhalb endlicher Grenzen oscillirende Reihen, als deren einfachster Typus $\sum_1^\infty {}^\nu (-1)^{\nu-1}$ gelten kann.

Wohl aber sind beide Bedingungen zusammen genommen für die Convergenz von Σa_ν allemal auch hinreichend. Da nämlich:

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_n = n \cdot a_1 + (n-1) \cdot a_2 + \ldots + 1 \cdot a_n,$$

so ergiebt sich durch Addition der Beziehungen (1) und (2) unmittelbar:

$$\lim_{n=\infty} \frac{n+1}{n} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = s,$$

---

[1]) Natürlich „uneigentlich", da ja bei eigentlicher Divergenz von $\Sigma a_\nu X^\nu$ allemal $\lim_{\varrho=1-0} \mathfrak{P}(\varrho X) = \infty$ sein müsste (vgl. a. a. O. p. 41).

[2]) Vgl. a. a. O. p. 44.

[3]) Dies folgt unmittelbar aus dem bekannten Cauchy'schen Grenzwerth-Satze: „Es ist $\lim_{n=\infty} \frac{A_n}{n} = \lim_{n=\infty} (A_n - A_{n-1})$, falls der rechtsstehende Grenzwerth existirt."

also schliesslich:

$$\lim_{n=\infty}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu = s.$$

Es erscheint zweckmässig, dieses Resultat in folgender Weise ausdrücklich zu formuliren:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die *Convergenz* von Σa_ν, also für die Existenz eines endlichen $\lim_{n=\infty} s_n = s$ lässt sich in die beiden Bedingungen (1) und (2) zerlegen, derart dass jede einzelne dieser Bedingungen als eine *nothwendige*, aber erst beide zusammen als *hinreichend* erscheinen.

Hierzu sei noch bemerkt, dass die Beziehung (1) allemal die für die Convergenz nothwendige Bedingung:

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0$$

in sich enthält. Ersetzt man nämlich in (1) n durch $(n-1)$, so folgt, dass für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$ bei passender Wahl einer unteren Schranke für n die Ungleichung besteht:

$$|1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \ldots + (n-1) \cdot a_{n-1}| < (n-1) \cdot \varepsilon.$$

Da sodann auch:

$$|1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \ldots + (n-1) \cdot a_{n-1} + n \cdot a_n| < n \cdot \varepsilon,$$

so folgt durch Subtraction:

$$|n \cdot a_n| < (2n-1) \cdot \varepsilon, \text{ also a fortiori } |a_n| < 2\varepsilon,$$

d. h. schliesslich:

$$\lim_{n=\infty} a_n = 0.$$

Etwas analoges findet bezüglich der Bedingung (2) nicht statt. Vielmehr sind gerade die zunächst sich darbietenden Beispiele von divergenten Reihen, welche der Bedingung (2) genügen (wie: $\sum_1^\infty {}^\nu (-1)^{\nu-1}$), durchweg von der Art, dass $\lim_{n=\infty} |a_n|$ nicht verschwindet. Es entsteht nun naturgemäss die

Frage: Giebt es wirklich divergente, der Bedingung (2) genügende Reihen, deren Glieder den Grenzwerth Null besitzen? Sobald die Existenz derartiger Reihen erwiesen ist, wird dann, wie leicht zu sehen, auch die am Anfange berührte Frage in bejahendem Sinne entschieden sein.

2. Es bedeute m_λ ($\lambda = 1, 2, 3, \ldots$) eine unbegrenzte Folge wachsender natürlicher Zahlen von der Beschaffenheit, dass:

$$(3) \qquad \lim_{\lambda=\infty} (m_{\lambda+1} - m_\lambda) = \infty, \qquad \lim_{\lambda=\infty} \frac{m_{\lambda+1}}{m_\lambda} = 1$$

(z. B. $m_\lambda = \lambda^p$, wo $p > 1$); ferner sei Σd_ν eine divergente Reihe mit positiven, für $\nu = \infty$ verschwindenden Gliedern von der Art, dass:

$$(4) \qquad \lim_{\lambda=\infty} (d_{m_\lambda+1} + d_{m_\lambda+2} + \ldots + d_{m_{\lambda+1}}) = 2A > 0.^{1)}$$

Nun wurde gesetzt:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu = d_1 + \ldots + d_{m_1} - d_1 - \ldots - d_{m_1} \\ + d_{m_1+1} + \ldots + d_{m_2} - d_{m_1+1} - \ldots - d_{m_2} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + d_{m_{\lambda-1}+1} + \ldots + d_{m_\lambda} - d_{m_{\lambda-1}+1} - \ldots - d_{m_\lambda} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

so dass also:

---

[1]) Die allgemeinen Beziehungen, welche zwischen den d_ν und m_λ bestehen müssen, damit ein solcher „singulärer Reihenrest“ $\sum_{m_{\lambda}+1}^{m_{\lambda+1}}{}^\nu d_\nu$ einen gewissen endlichen Grenzwerth besitzt, habe ich in einer früheren Arbeit („Ueber die Werthveränderungen bedingt convergenter Reihen und Producte“, Math. Ann. Bd. 22, 1883) ausführlich untersucht (vgl. a. a. O. p. 470; 485 ff.). Handelt es sich, wie im vorliegenden Falle, im wesentlichen nur um die Herstellung specieller Beispiele, so lassen sich die d_ν, m_ν in überaus einfacher Weise auswählen, wie im Texte weiter unten noch gezeigt wird.

$$(6)\ a_{2m_\lambda+\mu}\begin{cases} = -\,d_{m_\lambda+\mu} \text{ für: } & 1 \leqq \mu \leqq m_{\lambda+1}-m_\lambda \\ = -\,d_{m_\lambda+\mu} \text{ für: } & (m_{\lambda+1}-m_\lambda)+1 \leqq \mu \leqq 2(m_{\lambda+1}-m_\lambda) \end{cases}$$

($\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ und $m_0 = 0$). Ist sodann wiederum $s_n = \sum_1^n{}^{\nu}\, a_\nu$, so hat man offenbar:

$$\begin{aligned} s_{2m_\lambda} &= 0 \\ s_{m_\lambda+m_{\lambda+1}} &= d_{m_\lambda+1} + d_{m_\lambda+2} + \cdots + d_{m_{\lambda+1}}, \end{aligned}$$

also:

$$\lim_{\lambda=\infty} s_{2m_\lambda} = 0, \qquad \lim_{\lambda=\infty} s_{m_\lambda+m_{\lambda+1}} = 2A.$$

Da aber die Zahlen s_{2m_λ}, $s_{m_\lambda+m_{\lambda+1}}$ die Minima und Maxima der Folge s_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) liefern, so findet man schliesslich:

$$(7) \qquad \underline{\lim}_{n=\infty}\, s_n = 0, \qquad \overline{\lim}_{n=\infty}\, s_n = 2A,$$

d. h. die Reihe Σa_ν ist uneigentlich divergent, sie oscillirt in den Grenzen 0 und $2A$.

Andererseits ergiebt sich nun:

$$\begin{aligned} s_{2m_{\lambda-1}+1} &= d_{m_{\lambda-1}+1} \\ s_{2m_{\lambda-1}+2} &= d_{m_{\lambda-1}+1} + d_{m_{\lambda-1}+2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_{m_{\lambda-1}+m_\lambda} &= d_{m_{\lambda-1}+1} + d_{m_{\lambda-1}+2} + \cdots + d_{m_\lambda} \\ s_{m_{\lambda-1}+m_\lambda+1} &= \phantom{d_{m_{\lambda-1}+1} + {}} d_{m_{\lambda-1}+2} + \cdots + d_{m_\lambda} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_{2m_\lambda-1} &= \phantom{d_{m_{\lambda-1}+1} + d_{m_{\lambda-1}+2} + \cdots + {}} d_{m_\lambda} \\ s_{2m_\lambda} &= 0 \end{aligned}$$

und daher:

$$\begin{aligned} & s_{2m_{\lambda-1}+1} + s_{2m_{\lambda-1}+2} + \cdots + s_{2m_\lambda} \\ &= (m_\lambda - m_{\lambda-1})\,(d_{m_{\lambda-1}+1} + d_{m_{\lambda-1}+2} + \cdots + d_{m_\lambda}). \end{aligned}$$

Daraus folgt weiter:

$$(8) \qquad \sum_{1}^{2m\lambda}{}^{\nu} s_\nu = m_1(d_1 + \dots + d_{m_1}) + (m_2 - m_1)(d_{m_1+1} + \dots + d_{m_2}) + \dots$$
$$\dots + (m_\lambda - m_{\lambda-1})(d_{m_{\lambda-1}+1} + \dots + d_{m_\lambda})$$

und sodann mit Benützung des Cauchy-Stolz'schen Grenzwerthsatzes:

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{1}{2m_\lambda} \cdot \sum_{1}^{2m_\lambda}{}^{\nu} s_\nu = \lim_{\lambda=\infty} \frac{(m_\lambda - m_{\lambda-1})(d_{m_{\lambda-1}+1} + \dots + d_{m_\lambda})}{2(m_\lambda - m_{\lambda-1})}$$
$$(9) \qquad = A.$$

Bedeutet jetzt n eine ganz beliebige natürliche Zahl, so kann man allemal setzen:

$$2\,m_\lambda \leqq n < 2\,m_{\lambda+1}.$$

Alsdann hat man:

$$\sum_{1}^{2m_\lambda}{}^{\nu} s_\nu \leqq \sum_{1}^{n}{}^{\nu} s_\nu \leqq \sum_{1}^{2m_{\lambda+1}}{}^{\nu} s_\nu$$

und, wegen:

$$\frac{1}{2\,m_{\lambda+1}} < \frac{1}{n} \leqq \frac{1}{2\,m_\lambda},$$

auch:

$$\frac{1}{2\,m_{\lambda+1}} \cdot \sum_{1}^{2m_\lambda}{}^{\nu} s_\nu < \frac{1}{n} \cdot \sum_{1}^{n}{}^{\nu} s_\nu \leqq \frac{1}{2\,m_\lambda} \cdot \sum_{1}^{2m_{\lambda+1}}{}^{\nu} s_\nu,$$

anders geschrieben:

$$\frac{m_\lambda}{m_{\lambda+1}} \cdot \left(\frac{1}{2\,m_\lambda} \cdot \sum_{1}^{2m_\lambda}{}^{\nu} s_\nu\right) < \frac{1}{n} \cdot \sum_{1}^{n}{}^{\nu} s_\nu \leqq \frac{m_{\lambda+1}}{m_\lambda} \cdot \left(\frac{1}{2\,m_{\lambda+1}} \cdot \sum_{1}^{2m_{\lambda+1}}{}^{\nu} s_\nu\right),$$

und somit schliesslich mit Benützung von Gl. (3) und (9):

$$(10) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{1}^{n}{}^{\nu} s_\nu = A.$$

Die Reihe $\sum a_\nu$ besitzt also in der That die am Schlusse von Nr. 1 bezeichneten Eigenschaften.[1])

---

[1]) Auf einem weit weniger elementaren, ja sogar in seinen Grundlagen äusserst complicirten Wege, kann man — worauf mich Herr

Um Reihen dieser Art in der denkbar einfachsten Art wirklich herzustellen, wird man etwa alle diejenigen d_ν, welche in dem Reihen-Schema (5) jedesmal eine Zeile bilden, einander gleich setzen und zwar:

$$(11)\qquad d_\nu = \frac{2A}{m_{\lambda+1} - m_\lambda} \quad \text{für: } m_\lambda + 1 \leqq \nu \leqq m_{\lambda+1},$$

also:

$$(12)\qquad a_{2m_\lambda+\mu} \begin{cases} = \dfrac{2A}{m_{\lambda+1}-m_\lambda} \text{ für: } & 1 \leqq \mu \leqq m_{\lambda+1} - m_\lambda \\ = -\dfrac{2A}{m_{\lambda+1}-m_\lambda} \text{ für: } & (m_{\lambda+1}-m_\lambda)+1 \leqq \mu \leqq 2(m_{\lambda+1}-m_\lambda). \end{cases}$$

An die Stelle der Gleichung (4) tritt dann die folgende, für jedes $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ gültige:

$$(13)\qquad d_{m_\lambda+1} + d_{m_\lambda+2} + \ldots + d_{m_{\lambda+1}} = 2A.$$

Die so definirte Reihe Σa_ν genügt wiederum der Beziehung (10), während sie andererseits in den Grenzen 0 und A oscillirt und auf Grund der ersten Bedingung (3) $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = 0$ wird. Dabei wird man schliesslich noch die m_λ am einfachsten etwa in der Weise fixiren, dass man setzt $m_{\lambda+1} - m_\lambda = (\lambda+1)^p$ oder auch $m_\lambda = \lambda^{p+1}$, wo p eine natürliche Zahl bedeutet.

3. Setzt man jetzt:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu,$$

L. Fejér aufmerksam gemacht hat — die Existenz derartiger Reihen mit Hülfe eines Satzes nachweisen, den letzterer in den Comptes rendus (10. Dezember 1900) mitgetheilt hat. Darnach genügt die Summe einer Fourier'schen Reihe, welche eine stetige (oder nur mit gewöhnlichen Sprüngen behaftete) Function darstellt, durchweg der Bedingung (10). Da es nun nach Du Bois-Reymond stetige Functionen mit divergenter Fourier'scher Reihen-Entwicklung giebt, so liefert jede solche Reihe, wenn man der Veränderlichen den Werth einer Divergenz-Stelle beilegt, ein Beispiel der verlangten Art. (Vgl. im übrigen die Bemerkung am Schlusse von Nr. 3.)

wo Σa_ν eine Reihe von der eben construirten Art vorstellt, so hat man, wegen $\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n{}^\nu s_\nu = A$, nach einem bekannten, von Herrn Frobenius bewiesenen Satze[1]) zunächst:

$$\lim_{\varrho=1-0} \mathfrak{P}(\varrho) = A,$$

wenn ϱ eine positive reelle Veränderliche bedeutet. Der betreffende Satz lässt sich aber, wie weiter unten (s. Nr. 6) noch gezeigt werden soll, analog wie der Abel'sche Satz über den Grenzwerth einer für $x = 1$ noch convergenten $\mathfrak{P}(x)$,[2]) dahin erweitern, dass aus $\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n{}^\nu s_\nu = A$ allemal geschlossen werden kann:

$$\lim_{x=1} \mathfrak{P}(x) = A,$$

wenn x auf einem beliebigen Strahle (bezw. einer beliebigen den Einheitskreis nicht tangirenden Curve) aus dem Innern des Einheitskreises der Stelle 1 zustrebt. Damit wäre dann aber die zu Anfang ausgesprochene Behauptung vollständig bewiesen, d. h. es gilt der Satz:

Die Bedingungen:

$$\lim_{x=1} \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = A, \qquad \lim_{\nu=\infty} a_\nu = 0$$

sind für die Convergenz von Σa_ν zwar nothwendig, aber keineswegs ausreichend.

Man bemerke noch, dass bei geeigneter Auswahl der a_ν die Reihe $\Sigma \, | a_\nu - a_{\nu+1} |$ convergent ausfällt, somit $\Sigma a_\nu x^\nu$ noch auf dem ganzen Einheitskreise mit Ausnahme der einzigen Stelle $x = 1$ convergirt und zwar, nach Ausschluss eines beliebig kleinen, die Stelle 1 umgebenden Bogens, gleichmässig. Definirt man nämlich die a_ν durch die Gleichungen (12), so wird im allgemeinen:

$$a_\nu - a_{\nu+1} = 0,$$

---

[1]) Journal f. Math. Bd. 89 (1880), p. 262.

[2]) Vgl. Sitz.-Ber. Bd. 27 (1897), p. 347.

nur:

$$(14)\quad \begin{cases} a_{2m_\lambda} - a_{2m_\lambda+1} = -\left(\dfrac{1}{m_\lambda - m_{\lambda-1}} + \dfrac{1}{m_{\lambda+1} - m_\lambda}\right) \\ a_{m_\lambda + m_{\lambda+1}} - a_{m_\lambda + m_{\lambda+1}+1} = \dfrac{2}{m_{\lambda+1} - m_\lambda} \end{cases}$$

(wenn man noch der Einfachheit halber $2A = 1$ annimmt). Darnach wird aber $\Sigma |a_\nu - a_{\nu+1}|$ allemal convergent, wenn die m_λ so gewählt werden, dass $\Sigma (m_{\lambda+1} - m_\lambda)^{-1}$ convergirt, also z. B. $m_{\lambda+1} - m_\lambda = (\lambda + 1)^p$ oder auch $m_\lambda = \lambda^{p+1}$, wo $p \geqq 2$.

Die zur Potenzreihe $\Sigma a_\nu x^\nu$ gehörige Randfunction $f(x)$ ist dann bis in beliebige Nähe der Stelle $x = 1$ vollkommen stetig und für $x = 1$ selbst noch „nach Innen" stetig. Fraglich bleibt nur noch das Verhalten von $f(x)$ für die der Stelle $x = 1$ benachbarten Randpunkte, also das Verhalten von $f(e^{\vartheta i})$ in der Nähe von $\vartheta = 0$. Jedenfalls erscheint die Stetigkeit auch hier keinesfalls a priori ausgeschlossen. Gelänge es, dieselbe an irgend einem zweckmässig gewählten Beispiele der vorliegenden Art wirklich festzustellen, so wäre damit eine Frage in verneinendem Sinne entschieden, die ich in der zu Anfang citirten Arbeit noch als eine offene bezeichnet habe:[1]) nämlich, ob die vollkommene Stetigkeit der Randfunction stets auch die durchgängige Convergenz von $\mathfrak{P}(e^{\vartheta i})$ nach sich ziehen müsse. Durch die blosse Existenz von stetigen Functionen $\psi(\vartheta)$ mit divergenter Fourier'scher Reihenentwickelung wird, wie a. a. O. des näheren ausgeführt ist, die Möglichkeit jener Annahme noch keineswegs beseitigt.

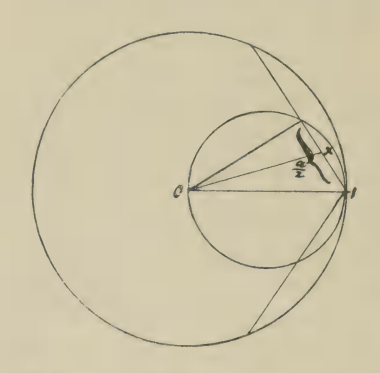
4. Um den Frobenius'schen Satz in der angedeuteten Weise zu verallgemeinern schicke ich zunächst den folgenden Hülfssatz voraus:[2])

---

[1]) a. a. O. p. 98.

[2]) Dieser Hülfssatz ist auch geeignet, die etwas weniger einfache, einen analogen Zweck verfolgende Betrachtung zu ersetzen, welche ich beim Beweise des verallgemeinerten Abel'schen Satzes (a. a. O. p. 348) benützt habe.

Zieht man vom Punkte 1 aus zwei zur reellen Axe symmetrische, dem Einheitskreise angehörige Sehnen, deren Länge $= a$ sein möge, und beschreibt um den Punkt $\frac{1}{2}$ einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{2}$, bezeichnet sodann mit (X) denjenigen zusammenhängenden Bereich, welcher von diesem Kreise und den beiden Sehnen begrenzt wird, so hat man:



$$(15) \qquad \frac{|1-x|}{1-|x|} < \gamma = \frac{4}{a}$$

für alle von 1 verschiedenen Stellen x im Innern und auf der Begrenzung von (X).

Beweis. Man bemerke zunächst, dass der mit dem Radius $\frac{1}{2}$ um den Punkt $\frac{1}{2}$ beschriebene Kreis alle vom Punkte 1 aus gezogene Sehne halbirt. Wird sodann x für's erste auf einer der begrenzenden Sehnen von der Länge a angenommen, so hat man:

$$|x|^2 = 1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - |1-x|\right)^2$$
$$= 1 - a \cdot |1-x| + |1-x|^2,$$

also:

$$1 - |x|^2 = |1-x| \cdot (a - |1-x|)$$
$$\geqq |1-x| \cdot \frac{a}{2}$$

(wobei das Gleichheitszeichen nur für den einen Fall $|1-x| = \frac{a}{2}$ gilt, d. h. wenn x im Mittelpunkte der betreffenden Sehne liegt). Daraus folgt weiter:

$$\frac{|1-x|}{1-|x|} \leqq \frac{2}{a} \cdot |1+x| < \frac{4}{a}.$$

Liegt jetzt x auf einer anderen vom Punkte 1 aus gezogenen Sehne mit der Länge a', wobei dann allemal $a' > a$, so hat man auf Grund des eben gewonnenen Resultates:

$$\frac{|1 - x|}{1 - |x|} < \frac{4}{a'}, \text{ also a fortiori } < \frac{4}{a},$$

womit der ausgesprochene Hülfssatz bewiesen ist.

5. Unter dem Grenzübergange $\lim\limits_{x=1}$ soll im folgenden ein für allemal verstanden werden, dass x auf einer beliebigen, dem Bereiche (X) angehörigen Curve der Stelle 1 zustrebt und somit der Ungleichung (15) genügt.

Alsdann gilt zunächst der folgende Satz:[1])

Ist:

$$(16^a) \qquad s_n = \sum_1^n {}^\nu a_\nu \text{ und } \lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n} = A$$

(wo A eine bestimmte Zahl incl. Null), so hat man:

$$(16^b) \qquad \lim_{x=1} (1 - x) \cdot \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu = A.$$

Beweis. Setzt man $\sum\limits_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu = \mathfrak{P}(x)$, so ergiebt sich durch Anwendung einer bekannten Transformation:[2])

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}(x) &= (1 - x) \cdot \sum_1^\infty {}^\nu s_\nu x^\nu \\ &= (1 - x) \cdot \left\{ \sum_1^n {}^\nu s_\nu x^\nu + \sum_{n+1}^\infty s_\nu x^\nu \right\} \end{aligned}$$

und daher:

$$(17) \qquad |\mathfrak{P}(x)| < |1 - x| \cdot \left\{ \sum_1^n {}^\nu |s_\nu| + \sum_{n+1}^\infty |s_\nu| \cdot |x|^\nu \right\}.$$

---

1) Verallgemeinerung des Hülfssatzes II auf p. 49 der Sitz.-Ber., Bd. 30 (1900).

2) Vgl. a. a. O. p. 47. Dass die Voraussetzung (16a) allemal die Convergenz von $\mathfrak{P}(x)$ für $|x| < 1$ nach sich zieht, ist leicht zu ersehen. Vgl. im übrigen auch Nr. 7.

Wegen $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot |s_n| = |A|$ hat jede Zahlenfolge $\frac{|s_\nu|}{\nu}$ für $\nu = (m+1), (m+2), \ldots$ *in inf.* eine endliche obere Grenze, welche mit σ_m bezeichnet werden möge. Darnach ergibt sich weiter:

$$|\mathfrak{P}(x)| < |1-x| \left\{ \sigma_0 \cdot \sum_1^n \nu + \sigma_n \cdot \sum_{n+1}^{\infty} \nu \cdot |x|^\nu \right\}$$

$$< |1-x| \cdot \left\{ \tfrac{1}{2} \sigma_0 \cdot n(n+1) + \sigma_n \cdot \frac{1}{(1-|x|)^2} \right\}$$

und somit:

$$|(1-x) \cdot \mathfrak{P}(x)| < \tfrac{1}{2} \sigma_0 \cdot n(n+1) \cdot |1-x|^2 + \sigma_n \cdot \left(\frac{|1-x|}{1-|x|} \right)^2$$

$$< \tfrac{1}{2} \sigma_0 \cdot n(n+1) \cdot |1-x|^2 + \gamma^2 \cdot \sigma_n \text{ (nach Ungl. (15))}.$$

Es werde nun zunächst angenommen, dass $A = 0$. Alsdann kann σ_n durch passende Wahl von n beliebig klein, etwa:

$$\gamma^2 \cdot \sigma_n < \frac{\varepsilon}{2}$$

gemacht werden, wenn ε eine positive Zahl von vorgeschriebener Kleinheit bedeutet. Wird jetzt noch x derartig eingeschränkt, dass:

$$\tfrac{1}{2} \cdot \sigma_0 \cdot n(n+1) \cdot |1-x|^2 < \frac{\varepsilon}{2} \quad \left(\text{also: } |1-x| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{\sigma_0 \cdot n(n+1)}} \right),$$

so hat man:

$$|(1-x) \cdot \mathfrak{P}(x)| < \varepsilon,$$

also schliesslich:

$$(18) \quad \lim_{x=1} (1-x) \cdot \mathfrak{P}(x) = 0 \quad \text{d. h.} \quad \lim_{x=1} (1-x) \cdot \sum_1^{\infty}{}^{\nu} a_\nu x^\nu = 0.$$

Bedeutet jetzt A eine beliebige von Null verschiedene Zahl, so kann die Beziehung

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n} = A \quad \text{d. h.} \quad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n{}^{\nu} a_\nu = A$$

zunächst folgendermaassen geschrieben werden:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_1^n{}^{\nu} (a_\nu - A) = 0.$$

Alsdann ergiebt sich aber auf Grund des eben gewonnenen Resultates (Gl. (18)):

$$\lim_{x=1} (1-x) \cdot \sum_1^\infty{}^\nu (a_\nu - A) \cdot x^\nu = 0,$$

anders geschrieben:

$$\lim_{x=1} (1-x) \cdot \left\{ \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu - A \frac{x}{1-x} \right\} = 0$$

also schliesslich, wie behauptet:

$$\lim_{x=1} (1-x) \cdot \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = A.$$

6. Da nach dem Cauchy'schen Grenzwerth-Satze die Beziehung $\lim\limits_{n=\infty} \frac{s_n}{n} = A$ sicher erfüllt ist, wenn $\lim\limits_{n=\infty} a_n = A$, so folgt noch, dass auch diese letztere Bedingung für die Existenz der Relation (16^b) hinreichend ist.

Ersetzt man ferner in dem zuvor gewonnenen Satze a_ν durch s_ν, so ergiebt sich:

Ist:

$$(19^a) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n{}^\nu s_\nu = A,$$

so hat man:

$$(19^b) \quad \lim_{x=1} (1-x) \cdot \sum_1^\infty{}^\nu s_\nu x^\nu = A, \quad \text{also:} \quad \lim_{x=1} \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = A,$$

d. h. man erhält die oben angekündigte Verallgemeinerung des Frobenius'schen Satzes.

Da wiederum die Bedingung (19^a) sicher erfüllt ist, wenn $\lim\limits_{n=\infty} s_n = A$, so resultirt noch als specieller Fall der verallgemeinerte Abel'sche Satz.

7. Der Satz von Nr. 5 gestattet unmittelbar noch die folgende Verallgemeinerung:[1])

---

[1]) Zugleich Verallgemeinerung des a. a. O. p. 49, Fussnote, angeführten Satzes. (NB. Daselbst steht in Folge eines Druckfehlers

$$\lim_{\varrho=1} (1-\varrho)^{1-p} \cdot \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu \varrho^\nu \text{ statt: } \lim_{\varrho=1} (1-\varrho)^p \cdot \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu \varrho^\nu).$$

Ist:

$$(20^a)\qquad \lim_{n=\infty}\frac{1}{n^p}\sum_1^n{}^{\nu}\, a_\nu = \lim_{n=\infty}\frac{s_n}{n^p} = A \quad (p > 0),$$ [1]

so ist $\sum a_\nu x^\nu$ convergent für $|x| < 1$ und man hat:

$$(20^b)\qquad \lim_{x=1}(1-x)^p \cdot \sum_1^\infty{}^{\nu}\, a_\nu\, x^\nu = \Gamma(p+1)\cdot A.$$

Beweis: Aus (20^a) folgt, dass auch: $\lim\limits_{n=\infty}\frac{s_{n-1}}{n^p} = A$ und somit:

$$\lim_{n=\infty}\frac{a_n}{n^p} = \lim_{n=\infty}\frac{s_n - s_{n-1}}{n^p} = 0.$$

Da sodann für $\varrho < 1$: $\lim\limits_{n=\infty} n^p \cdot \varrho^n = 0$, so ergiebt sich durch Multiplication mit der vorhergehenden Gleichung:

$$\lim_{n=\infty} a_n\, \varrho^n = 0,$$

sodass $\sum a_\nu x^\nu$ sicher für $|x| < \varrho$, also schliesslich für $|x| < 1$ convergirt.

Man hat dann wiederum, wie in Nr. 5 (s. Ungl. (17)):

$$|\mathfrak{P}(x)| < |1-x| \cdot \left\{\sum_1^n{}^{\nu}\, |s_\nu| + \sum_{n+1}^\infty{}^{\nu}\, |s_\nu| \cdot |x|^\nu\right\}.$$

Aus der Voraussetzung:

$$\lim_{n=\infty}\frac{s_n}{n^p} = A$$

folgt mit Berücksichtigung der bekannten Beziehung:

---

[1] Die zum Beweise dienlichen Schlüsse bleiben auch noch gültig für: $0 \geq p > -1$. Die Reihe $\Sigma a_\nu x^\nu$ ist alsdann für die Stelle $x = 1$ nicht mehr divergent, sondern convergent und zwar mit der Summe $\lim\limits_{n=\infty} s_n = 0$, wenn $p < 0$. Die Gleichung (20^b) macht also in diesem Falle eine bestimmte Aussage über die Art des Nullwerdens von $\lim\limits_{x=1}\sum_1^\infty{}^{\nu}\, a_\nu x^\nu$. Für den Fall $p = 0$ resultirt wiederum der Abel'sche Satz: $\lim\limits_{x=1}\sum_1^\infty{}^{\nu}\, a_\nu x^\nu = \lim\limits_{n=\infty} s_n$.

$$\lim_{n=\infty} \frac{(p+n)_n}{n^p} = \frac{1}{\Gamma(p+1)} \tag{21}$$

$$\left(\text{wo: } (p+n)_n = \frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+n)}{1\cdot 2\ldots n} = \frac{\Gamma(p+n+1)}{\Gamma(p+1)\cdot\Gamma(n+1)} \right)$$

dass:

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{(p+n)_n} = \Gamma(p+1)\cdot A. \tag{22}$$

Jede Zahlenfolge $\frac{|s_\nu|}{(p+\nu)_\nu}$ für $\nu = (m+1), (m+2), \ldots$ *in inf.* hat also eine endliche obere Grenze, welche mit σ_m bezeichnet werden möge. Darnach ergiebt sich aus der obigen Ungleichung die folgende:

$$|\mathfrak{P}(x)| < |1-x| \cdot \left\{ \sigma_0 \cdot \sum_1^n{}^\nu (p+\nu)_\nu + \sigma_n \cdot \sum_{n+1}^\infty{}^\nu (p+\nu)_\nu \cdot |x|^\nu \right\}$$

$$< |1-x| \cdot \left\{ \sigma_0 \cdot (p+n+1)_n + \sigma_n \cdot \frac{1}{(1-|x|)^{p+1}} \right\}$$

wegen:

$$\sum_0^n (p+\nu)_\nu = (p+n+1)_n \text{ [1]} \tag{23}$$

$$\sum_0^\infty (p+\nu)_\nu \cdot |x|^\nu = (1-|x|)^{-(p+1)}, \tag{24}$$

und, wenn man die letzte Ungleichung noch mit $|1-x|^p$ multiplicirt:

$$|(1-x)^p \cdot \mathfrak{P}(x)| < |1-x|^{p+1} \cdot \sigma_0 \cdot (p+n+1)_n + \sigma_n \left(\frac{|1-x|}{1-|x|} \right)^{p+1}$$
$$< |1-x|^{p+1} \cdot \sigma_0 \cdot (p+n+1)_n + \gamma^{p+1} \cdot \sigma_n \text{ (nach Ungl. (15))}. \tag{25}$$

[1]) Man hat zunächst: $p_0 + (p+1)_1 = 1 + (p+1) = (p+2)_1$.

Angenommen man habe: $\sum_0^{n-1} (p+\nu)_\nu = (p+n)_{n-1}$,

so folgt unmittelbar: $\sum_0^n{}^\nu (p+\nu)_\nu = (p+n)_{n-1} + (p+n)_n = (p+n+1)_n$.

Es werde nun zunächst wiederum $A = 0$ angenommen. Man kann dann n derart fixiren, dass:

$$\gamma^{p+1} \cdot \sigma_n < \frac{\varepsilon}{2},$$

darauf x nahe genug an 1 annehmen, dass auch:

$$|1 - x|^{p+1} \cdot \sigma_0 \cdot (p + n + 1)_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alsdann wird:

$$|(1 - x)^p \cdot \mathfrak{P}(x)| < \varepsilon,$$

und daher schliesslich:

$$\lim_{n=\infty} (1 - x)^p \cdot \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = 0. \tag{26}$$

Bedeutet jetzt A eine von Null verschiedene Zahl, so kann die Voraussetzung (20^{a}) zunächst durch die Beziehung (22) ersetzt werden. Man hat nun aber nach Gl. (23), wenn man darin p durch $p - 1$ ersetzt:

$$\sum_0^n{}^\nu (p + \nu - 1)_\nu = (p + n)_n$$

für jedes positive ganzzahlige n, also auch:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{(p + n)_n} \cdot \sum_0^n{}^\nu (p + \nu - 1)_\nu = 1. \tag{27}$$

Fügt man diesen letzteren Grenzwerth der rechten Seite von Gl. (22) als Factor hinzu, so lässt sich dieselbe folgendermaassen schreiben:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{(p + n)_n} \cdot \left\{ s_n - \Gamma(p+1) \cdot A \cdot \sum_0^n{}^\nu (p + \nu - 1)_\nu \right\} = 0,$$

oder auch, wenn man s_n durch $\sum_0^n{}^\nu a_\nu$ ersetzt (wo: $a_0 = 0$), mit Berücksichtigung von Gl. (21):

$$(28) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n^p} \cdot \sum_0^n {}^{\nu} \left\{ a_\nu - \Gamma(p+1) \cdot A \cdot (p+\nu-1)_\nu \right\} = 0.$$

Die Anwendung des in Gl. (23) enthaltenen Resultates giebt alsdann:

$$\lim_{x=1} (1-x)^p \cdot \sum_0^\infty {}^{\nu} \left\{ a_\nu - \Gamma(p+1) \cdot A \cdot (p+\nu-1)_\nu \right\} \cdot x^\nu = 0,$$

anders geschrieben:

$$\lim_{x=1} (1-x)^p \cdot \left\{ \sum_1^\infty {}^{\nu} a_\nu \, x^\nu - \Gamma(p+1) \cdot A\,(1-x)^{-p} \right\} = 0,$$

also schliesslich, wie behauptet:

$$(29) \qquad \lim_{x=1} (1-x)^p \cdot \sum_1^\infty {}^{\nu} a_\nu \, x^\nu = \Gamma(p+1) \cdot A.$$ [1]

8. Nach dem Cauchy-Stolz'schen Grenzwerth-Satze hat man:[2])

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n^p} = \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^p - (n-1)^p}$$

$$= \frac{1}{p} \cdot \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^{p-1}} \left[\text{wegen: } n^p - (n-1)^p = n^p \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^p \right) \cong p \cdot n^{p-1} \right]$$

falls der rechts stehende Grenzwerth existirt. Ist nun:

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^{p-1}} = A',$$

so wird also:

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{n^p} = \frac{1}{p} \cdot A',$$

---

[1]) Der Satz findet sich auch in einer jüngst erschienenen Arbeit des Herrn E. Lasker („Ueber Reihen auf der Convergenzgrenze." Lond. Philos. Transactions, Vol. 196 [1901], p. 438) als Folgerung aus einem allgemeinerem Grenzwerth-Satze. Der Beweis enthält indessen einen auf verkehrter Anwendung einer Ungleichung beruhenden Trugschluss (a. a. O. p. 437).

[2]) Hier ist die Bedingung $p > 0$ durchaus wesentlich.

und die Gleichung (29) liefert somit, wenn man noch berücksichtigt, dass:

$$\Gamma(p+1) = p \cdot \Gamma(p)$$

den folgenden, für reelle positive x und A' von Herrn Appell bewiesenen[1]) Satz:

Ist:

$$(30^a) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{n^{p-1}} = A' \ (p > 0),$$

so hat man:

$$(30^b) \qquad \lim_{x=1} (1-x)^p \cdot \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = \Gamma(p) \cdot A'.$$

9. Dem Satze in Nr. 7 lässt sich der folgende an die Seite stellen:

Ist:

$$(31^a) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{s_n}{\lg n} = A,$$

so hat man:

$$(31^b) \qquad \lim_{x=1} \left(\lg \frac{1}{1-x}\right)^{-1} \cdot \sum_1^\infty{}^\nu a_\nu x^\nu = A.$$

Beweis. Aus Ungl. (17) folgt, wenn man die obere Grenze von $\frac{|s_\nu|}{\lg \nu}$ für $\nu = (m+1), (m+2) \ldots$ *in inf.* mit σ_m bezeichnet:

$$|\mathfrak{P}(x)| < |1-x| \left\{ \sum_1^n{}^\nu |s_\nu| + \sigma_n \cdot \sum_{n+1}^\infty{}^\nu \lg \nu \cdot |x|^\nu \right\}.$$

---

[1]) Comptes rendus, T. 87 (1878), p. 690. Auch: Picard, Traité d'Analyse, T. I (1891), p. 210, jedoch mit der Beschränkung $p > 1$. — Für complexe x findet sich der Satz als Folgerung aus einem allgemeineren Satze bei Herrn Hadamard: Journ. de Math. (4), T. 8 (1892), p. 176. (NB. Auf der rechten Seite derjenigen Relation, welche der Gl. (30^b) entspricht, steht dort fälschlich A statt: $\Gamma(\omega) \cdot A$, was wohl lediglich auf einem Schreibfehler beruhen dürfte.)

Da sodann:

$$\begin{aligned}|1-x|\cdot\sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu}\lg\nu\cdot|x|^{\nu} &< \gamma\cdot(1-|x|)\cdot\sum_{1}^{\infty}{}^{\nu}\lg\nu\cdot|x|^{\nu}\\ &= \gamma\cdot\sum_{1}^{\infty}{}^{\nu}(\lg(\nu+1)-\lg\nu)\cdot|x|^{\nu}\\ &< \gamma\cdot\sum_{1}^{\infty}{}^{\nu}\frac{1}{\nu}\cdot|x|^{\nu}=\gamma\cdot\lg\frac{1}{1-|x|}\\ &< \gamma\left(\lg\frac{1}{|1-x|}+\lg\gamma\right)\end{aligned}$$

so folgt:

$$|\mathfrak{P}(x)|<|1-x|\cdot\sum_{1}^{n}{}^{\nu}|s_{\nu}|+\sigma_n\cdot\gamma\left(\lg\frac{1}{|1-x|}+\lg\gamma\right),$$

also, wenn man noch mit $\left|\lg\frac{1}{1-x}\right|^{-1}$ multiplicirt und beachtet, dass $\left|\lg\frac{1}{1-x}\right|\geq\lg\frac{1}{|1-x|}$:

$$\left|\left(\lg\frac{1}{1-x}\right)^{-1}\cdot\mathfrak{P}(x)\right|<|1-x|\cdot\left|\lg\frac{1}{1-x}\right|^{-1}\cdot\sum_{1}^{n}{}^{\nu}|s_{\nu}|$$
$$+\sigma_n\cdot\gamma\left(1+\lg\gamma\cdot\left|\lg\frac{1}{1-x}\right|^{-1}\right).$$

Daraus folgt dann zunächst wieder im Falle $A=0$ (also: $\lim\limits_{n=\infty}\sigma_n=0$), dass:

$$\lim_{x=1}\left(\lg\frac{1}{1-x}\right)^{-1}\cdot\sum_{1}^{\infty}{}^{\nu}a_{\nu}x^{\nu}=0. \tag{32}$$

Ist nun andererseits A von 0 verschieden, so lässt sich mit Berücksichtigung der bekannten Relation:

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{\lg n}\sum_{1}^{n}{}^{\nu}\frac{1}{\nu}=1$$

die Voraussetzung (31[a]) auf die Form bringen:

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{\lg n}\left(s_n-A\cdot\sum_{1}^{n}{}^{\nu}\frac{1}{\nu}\right)=0,$$

anders geschrieben:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\lg n} \cdot \sum_1^n {}^\nu \left(a_\nu - A \cdot \frac{1}{\nu}\right) = 0.$$

Die Anwendung des in Gl. (32) enthaltenen Resultates giebt dann zunächst:

$$\lim_{x=1} \left(\lg \frac{1}{1-x}\right)^{-1} \cdot \sum_1^\infty {}^\nu \left(a_\nu - A \cdot \frac{1}{\nu}\right) \cdot x^\nu = 1$$

also, wegen: $\sum_1^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu} \cdot x^\nu = \lg \frac{1}{1-x}$, schliesslich, wie behauptet:

$$\lim_{x=1} \left(\lg \frac{1}{1-x}\right)^{-1} \cdot \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu = A.$$

10. Da wiederum nach dem Cauchy-Stolz'schen Grenzwerth-Satze:

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_n}{\lg n} = \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{\lg n - \lg (n-1)}$$
$$= \lim_{n=\infty} n\, a_n,$$

falls dieser letztere Grenzwerth existirt, so erweist sich auch die Bedingung

$$\lim_{n=\infty} n \cdot a_n = A \tag{33}$$

als hinreichend für die Existenz der Beziehung (31^b).[1]

Einen allgemeineren Satz, welcher die in Nr. 5—10 angegebenen Sätze als specielle Fälle enthält, werde ich in einem demnächst in den Acta mathematica erscheinenden Aufsatze mittheilen.

---

[1]) Für reelle positive x und A wiederum bei Appell, Comptes rendus, a. a. O.

22

Separat-Abdruck
aus den Sitzungsberichten der mathem.-phys. Classe
der kgl. bayer. Akademie der Wissenschaften
Bd. XXXII 1902 Heft II.

Zur Theorie

der ganzen transcendenten Funktionen.

Von

Alfred Pringsheim.

München 1902
Verlag der k. Akademie.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Die in den Sitzungsberichten erschienenen Abhandlungen sind nicht in einzelnen Abzügen ausgegeben.
(Preis des betr. Heftes der Sitzungsberichte 1 Mark 20 Pfennig).

Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Klasse. Bd. I—XXI in je 3 Abtheilungen, von 1832—1900.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse. Bd. I—XXX, von 1871—1900.

Bauer, Gustav. Kettenbruch Eulers. Abh. II. Kl. XI, 2. 1872 ℳ —.50
— Pascal's Theorem. Abh. II. Kl. XI, 3 1874 ℳ 1.—
— Gedächtnissrede auf Otto Hesse. 1882 ℳ —.60
— Von der Hesse'schen Determinante. Abh. II. Kl. XIV, 3. 1883 ℳ —.50
— Ueber einige Determinanten. Sitzb. 1872, p. 345—354.
— Ueber Kugelfunktionen. Sitzb. 1875, pag. 247—272.
— Ueber Systeme von Curven 6. Ordnung, auf welche das Normalenproblem bei Curven 2. Ordnung führt. Sitzb. 1878, p. 121—135.
— Ueber das geradlinige Hyperboloid. Sitzb. 1880, p. 635—640.
— Tripel von Geraden auf einem Hyperboloid. Sitzb. 1881, p. 241—248.
— Ueber die Hesse'sche Determinante der Hesse'schen Fläche einer Fläche dritter Ordnung. Sitzb. 1883, p. 320.
— Von den gestaltlichen Verhältnissen der parabolischen Curve auf einer Fläche dritter Ordnung. Sitzb. 1883. p. 320—343.
— Ueber d. Discriminante einer binären Form. Sitzb. 1886, p. 183—191.
— Ueber Flächen vierter Ordnung, deren geometrische Erzeugung sich an zwei Tetraeder knüpft. Sitzb. 1888, p. 337—354.
— Darstellung binärer Formen als Potenzsummen. Sitz. 1892, p. 3—20.
— Bemerkungen über zahlentheoretische Eigenschaften der Legendre'schen Polynome. Sitzb. 1894, p. 343—359.
— Von zwei Tetraëdern, welche einander zugleich eingeschrieben und umschrieben sind. Sitz. 1897, p. 359—366.

Brill, Al. Zur Theorie der geodätischen Linie etc. Abh. II. Kl. XIV, 2, 1883 ℳ 1.—
— Bestimmung der optischen Wellenfläche etc. 1883, 3 p. 423—435.
— Ueber rationale Curven und Regelflächen, 1885, 2 p. 276—287.
— Ueber die Multiplicität der Schnittpunkte von zwei ebenen Curven. Sitzb. 1888, p. 81—94.
— Die reducirte Resultante. Abh. II. Kl. XVII, 1889, p. 89—181. ℳ —.40.
— Ueber das Verhalten einer Funktion von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle. Sitzb. 1891, p. 207—220.

Du Bois-Reymond, Paul. Coefficienten der trigonometrischen Reihe. Abh. II. Kl. XII, 2. 1876 ℳ 3.60.
— Ueber den Gültigkeitsbereich der Taylor'schen Reihenentwicklung. Sitzb. 1876, p. 225—237.
— Ein allgemeiner Satz über die Integrirbarkeit von Funktionen integrirbarer Funktionen. Sitz. 1882, p. 240—242.

Dyck, W. Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln definirten Curvensysteme. Erste Mittheilung (mit 4 Taf.). Sitzb. 1891, p. 23—57; zweite Mittheilung (mit 3 Taf.). Sitzb. 1892, p. 101—138.
— Beiträge zur Potentialtheorie. I. Kronecker'sche Charakteristiken. Sitzb. 1895, p. 261—277.

Zur Theorie der ganzen transcendenten Functionen.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 30. Juni.*)

Herr Poincaré hat bereits im Jahre 1883 einen Satz bewiesen,[1]) welcher eine Beziehung angiebt zwischen dem infinitären Verhalten einer ganzen transcendenten Function $g(x) = \sum c_\nu x^\nu$ für $|x| = \infty$ und demjenigen der Coefficienten c_ν für $\nu = \infty$. Darnach hat man allemal:[2])

$$\lim_{\nu=\infty} (\nu!)^{\frac{1}{m}} \cdot c_\nu = 0,$$

wenn für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$ die Bedingung erfüllt ist:

$$\lim_{x=\infty} e^{-\varepsilon \cdot |x|^m} \cdot g(x) = 0 \quad (m \text{ eine natürliche Zahl}),$$

anders ausgesprochen, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine positive Zahl R_ε existirt, sodass:

$$|g(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^m} \quad \text{für } |x| > R_\varepsilon.$$

---

[1]) Bulletin de la soc. math. de France, T. 11 (1883), p. 142.

[2]) Aus dem von Herrn Poincaré gegebenen Beweise folgt sogar (ohne dass es a. a. O. ausdrücklich erwähnt wird):

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{m}} \cdot c_\nu} = 0.$$

Späterhin hat Herr Hadamard[1]) gezeigt, dass der Satz nicht nur merklich verallgemeinert, in's besondere ohne weiteres auf beliebige positive m übertragen werden kann,[2]) sondern dass derartige Sätze bei geeigneter Formulirung auch umkehrbar sind.[3])

Da die betreffenden Beweise durchweg ziemlich complicirte Hülfsmittel verwenden[4]) und es mir andererseits wünschenswerth erschien, jene Sätze in passendem Umfange für die elementare Functionen-Theorie zu gewinnen, so habe ich versucht, dieselben in möglichst elementarer Weise neu zu begründen. Die im folgenden mitzutheilenden Beweise scheinen mir, abgesehen von der Geringfügigkeit der hierzu aufgewendeten Hülfsmittel, auch grössere Präcision und einen tieferen Einblick in Grundlage und Wesen der fraglichen Beziehungen zu geben: diese gruppiren sich in sehr übersichtlicher Weise um einen lediglich auf gewisse Reihen mit positiven Termen bezüglichen Hauptsatz (§ 1 und, vermittelst eines elementaren Hülfssatzes § 2, in verallgemeinerter Form § 3), dessen dualistische Fassung unmittelbar auch das Maass ihrer Umkehrbarkeit erkennen lässt (§ 4, § 5). Eine einfache Ueberlegung zeigt dann, wie die für jene Reihen mit positiven Termen gewonnenen Resultate für die Theorie der ganzen transcendenten Functionen nutzbar gemacht werden können (§ 6).

---

[1]) Étude sur les propriétés des fonctions entières etc.: Journ. de Math., Série IV, T. 9 (1893), p. 171 ff.

[2]) a. a. O. p. 183.

[3]) a. a. O. p. 180.

[4]) Man vergleiche auch die Dissertation von K. von Schaper: Ueber die Theorie der Hadamard'schen Functionen etc. (Göttingen, 1898) p. 15—22. — E. Borel, Leçons sur les fonctions entières (Paris 1900), p. 53—56. — Ernst Lindelöf, Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini: Acta soc. scient. Fennicae, T. 31 (1902), p. 33 ff.

§ 1.

Es bedeute r eine reelle positive Veränderliche, $\sum c_\nu r^\nu$ und $\sum C_\nu r^\nu$ je eine beständig convergirende Reihe mit reellen, nicht-negativen Coefficienten.

Hauptsatz: *Besteht von den beiden Beziehungen:*

$$\left.\begin{aligned} &(1^a) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu\, c_\nu\, r^\nu \leqq A \cdot e^{\gamma r} \\ &(1^b) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu\, C_\nu\, r^\nu \geqq A \cdot e^{\gamma r} \end{aligned}\right\} (A > 0,\ \gamma > 0)$$

die erste für alle r, welche eine gewisse positive Zahl R übersteigen, die zweite zum mindesten für unendlich viele r, unter denen auch beliebig grosse vorkommen, so ist:

$$(2^a) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \sqrt[\nu]{\nu!\, c_\nu} \leqq \gamma, \qquad\qquad (2^b) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \sqrt[\nu]{\nu!\, C_\nu} \geqq \gamma.$$

Beweis. Setzt man in (1^a) $r = \lambda\varrho$, so folgt:

$$\sum_0^\infty{}^\nu\, c_\nu\, \lambda^\nu \cdot \varrho^\nu \leqq A \cdot e^{\gamma\lambda\varrho}, \text{ falls } \lambda > \frac{R}{\varrho},$$

und nach Multiplication mit dem Factor $e^{-\lambda}$:

$$\sum_0^\infty{}^\nu\, c_\nu\, \lambda^\nu \cdot e^{-\lambda} \cdot \varrho^\nu \leqq A \cdot e^{-(1-\gamma\varrho)\lambda}.$$

Substituirt man $\lambda = m+1,\ m+2, \ldots$ in inf. (wo: $m+1 > \frac{R}{\varrho}$), so ergiebt sich durch Addition der betreffenden Relationen:

$$(2) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu\, c_\nu \left(\sum_{m+1}^\infty{}^\lambda\, \lambda^\nu \cdot e^{-\lambda}\right) \cdot \varrho^\nu \leqq A \cdot \sum_{m+1}^\infty{}^\lambda\, e^{-(1-\gamma\varrho)\lambda}.$$

Dabei ist die rechts, folglich auch die links auftretende Reihe convergent, wenn $1 - \gamma\varrho > 0$, also für $\varrho < \frac{1}{\gamma}$. Da überdies:

$$\sum_1^m{}^\lambda \lambda^\nu \cdot e^{-\lambda} < m^\nu \cdot \sum_1^m{}^\nu e^{-\lambda} < \frac{m^\nu}{e-1}$$

und somit die Reihe

$$\sum_0^\infty{}^\nu c_\nu \left(\sum_1^m{}^\lambda \lambda^\nu \cdot e^{-\lambda}\right) \cdot \varrho^\nu$$

gleichzeitig mit $\sum c_\nu \varrho^\nu$ beständig convergirt, so folgt, wenn man diese letztere Reihe zu der linken Seite von (2) addirt, dass:

$$(3) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu S_\nu \cdot c_\nu \cdot \varrho^\nu, \text{ wo: } S_\nu = \sum_1^\infty{}^\lambda \lambda^\nu \cdot e^{-\lambda}$$

für $\varrho < \frac{1}{\gamma}$ convergirt.

Um zunächst das entsprechende Divergenz-Resultat für den Fall der Voraussetzung (1^b) abzuleiten, bedeute r_λ ($\lambda = 1, 2, 3, \ldots$) eine Folge positiver, in's Unendliche wachsender Zahlen von der Beschaffenheit, dass für $r = r_\lambda$ die Beziehung (1^b) besteht, also:

$$(4) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu C_\nu \cdot r_\lambda^\nu \geqq e^{\gamma \cdot r_\lambda}.$$

Da man die r_λ (wegen $\lim_{\lambda=\infty} r_\lambda = \infty$) jedenfalls so auswählen kann, dass:

$$\gamma (r_{\lambda+1} - r_\lambda) \geqq 1,$$

so gehört dem Intervalle:

$$\gamma r_\lambda \leqq x \leqq \gamma r_{\lambda+1}$$

mindestens eine ganze Zahl an. Bezeichnet man dann mit m_λ die kleinste ganze Zahl, welche nicht kleiner ist, als γr_λ, also:

$$m_{\lambda-1} \leqq m_\lambda - 1 < \gamma r_\lambda \leqq m_\lambda < m_{\lambda+1},$$

so ergiebt sich aus Ungl. (4) a fortiori:

$$\sum_0^\infty{}^\nu C_\nu \cdot \left(\frac{m_\lambda}{\gamma}\right)^\nu > e^{m_\lambda - 1},$$

und, wenn man mit e^{-m_λ} multiplicirt:

$$\sum_0^\infty{}^\nu C_\nu m_\lambda^\nu \cdot e^{-m_\lambda} \cdot \left(\frac{1}{\gamma}\right)^\nu > e^{-1},$$

woraus durch Substitution von $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$ (in inf.) und Addition resultirt:

$$\sum_0^\infty{}^\nu C_\nu \cdot \left(\sum_1^\infty{}^\lambda m_\lambda^\nu \cdot e^{-m_\lambda}\right) \cdot \left(\frac{1}{\gamma}\right)^\nu = \infty,$$

also um so mehr:

$$\sum_0^\infty{}^\nu C_\lambda \cdot \left(\sum_1^\infty{}^\lambda \lambda^\nu \cdot e^{-\lambda}\right) \cdot \left(\frac{1}{\gamma}\right)^\nu = \infty,$$

d. h. die Reihe

(5) $$\sum_0^\infty{}^\nu S_\nu \cdot C_\nu \cdot \varrho^\nu \quad \text{divergirt für } \varrho \geqq \frac{1}{\gamma}.$$

Um das bisher gewonnene Doppel-Resultat im Sinne des oben ausgesprochenen Satzes zu verwerthen, bedarf es schliesslich nur noch des Nachweises, dass:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{S_\nu}{\nu!} = 1$$

ist. Zu diesem Behufe werde gesetzt:

(6) $$f(x) = \frac{e^x}{1 - e^x}.$$

Ist sodann $|e^x| < 1$, also der reelle Theil von x wesentlich negativ, so hat man:

$$f(x) = \sum_1^\infty{}^\lambda e^{\lambda x}$$

also:

$$f'(x) = \sum_1^\infty{}^\lambda \lambda \cdot e^{\lambda x}, \quad f''(x) = \sum_1^\infty{}^\lambda \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}, \ldots$$

$$f^\nu(x) = \sum_1^\infty{}^\lambda \lambda^\nu \cdot e^{\lambda x}$$

und daher:

(7) $$f^\nu(-1) = \sum_1^\infty{}^\lambda \lambda^\nu \cdot e^{-\lambda} = S_\nu.$$

Andererseits ergiebt sich:

$$f(x) = \frac{e^x}{1-e^x} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots}{1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots}$$

$$= -\frac{1}{x} \cdot \left(1 + \sum_1^\infty {}^\nu a_\nu x^\nu\right),$$

sodass also $f(x) + \frac{1}{x}$ in der Umgebung von $x = 0$ regulär ist. Da ferner $f(x) + \frac{1}{x}$ auch bei $x = -1$ regulär ist und als nächstgelegene singuläre Stellen die Stellen $x = \pm 2\pi i$ auftreten, so hat man:

$$(8) \qquad f(x) + \frac{1}{x} = \sum_0^\infty {}^\nu b_\nu (x+1)^\nu \quad \text{für: } |x+1| < 2\pi,$$

in's besondere also auch noch für $x = 0$. Die Reihe $\sum_0^\infty {}^\nu b_\nu$ ist somit convergent, und daher:

$$(9) \qquad \lim_{\nu=\infty} b_\nu = 0.$$

Man hat aber:

$$b_\nu = \frac{1}{\nu!} \cdot D_x^\nu \left(f(x) + \frac{1}{x}\right)_{x=-1}$$

$$= \frac{1}{\nu!} \cdot \left\{ f^\nu(x) + \frac{(-1)^\nu \cdot \nu!}{x^{\nu+1}} \right\}_{x=-1}$$

$$= \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(-1) - 1,$$

und somit nach Gl. (9) und (7):

$$(10) \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{S_\nu}{\nu!} = 1.$$

Daraus folgt dann schliesslich mit Berücksichtigung der Resultate (3) und (5), dass von den beiden Reihen:

$$\sum_0^\infty {}^\nu \nu! \cdot c_\nu \cdot \varrho^\nu, \qquad \sum_0^\infty {}^\nu \nu! \cdot C_\nu \cdot \varrho^\nu$$

die erste für $\varrho < \frac{1}{\gamma}$ convergirt, die zweite für $\varrho \geqq \frac{1}{\gamma}$ divergirt. Die erste besitzt also mindestens, die zweite höchstens den Convergenz-Radius $\frac{1}{\gamma}$, und es bestehen somit nach dem bekannten Cauchy'schen Satze die Beziehungen:

$$(11^a) \quad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu!\, c_\nu} \leqq \gamma, \qquad (11^b) \quad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu!\, C_\nu} \geqq \gamma.$$

Zusatz. Die unter den gemachten Voraussetzungen geltenden Relationen (11^a), (11^b) lassen sich unmittelbar auch durch die folgenden, etwas einfacheren ersetzen:

$$(12^a) \quad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \nu \cdot \sqrt[\nu]{c_\nu} \leqq \gamma \cdot e, \qquad (12^b) \quad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \nu \cdot \sqrt[\nu]{C_\nu} \geqq \gamma \,.\, e,$$

wenn man ν^ν an Stelle von $\nu!$ einführt, was sich durch Benützung der Stirling'schen Formel, aber auch ohne dieses relativ complicirte Hülfsmittel in folgender, äusserst elementaren Weise bewerkstelligen lässt. Es ist identisch:

$$n! = \frac{1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \ldots (n-1)^{n-1} \cdot n^n}{2^1 \cdot 3^2 \cdot 4^3 \ldots n^{n-1}} = n^n \cdot \prod_1^{n-1}{}_\nu \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^\nu$$

$$= \frac{1^2 \cdot 2^3 \cdot 4^4 \ldots (n-1)^n \cdot n^{n+1}}{2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \ldots n^n} = n^{n+1} \cdot \prod_1^{n-1}{}_\nu \left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^{\nu+1},$$

also:

$$(12) \quad n^n \cdot \prod_1^{n-1}{}_\nu \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu} = n! = n^{n+1} \cdot \prod_1^{n-1}{}_\nu \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}}$$

Nun ist aber bekanntlich:

$$\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu < e < \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}$$

und daher:

$$\prod_1^{n-1}{}_\nu \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu < e^{n-1} < \prod_1^{n-1}{}_\nu \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}.$$

Multiplicirt man diese Ungleichung mit Gl. (12), so folgt:

$$n^n < n!\, e^{n-1} < n^{n+1}$$

oder auch:

$$e < n! \left(\frac{e}{n}\right)^n < e\, n,$$

und daher:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{n!} \cdot \frac{e}{n} = 1, \tag{13}$$

anders geschrieben:

$$\sqrt[n]{n!} \cong \frac{n}{e} \quad (n = \infty, \tag{14}$$

sodass also in der That die Beziehungen (11) und (12) durch einander ersetzt werden dürfen.

---

§ 2.

Um den soeben abgeleiteten Hauptsatz zu verallgemeinern, beweise ich zunächst den folgenden Hülfssatz:

Ist $\varkappa > 0$, $\sum b_\nu^\varkappa$ *eine beliebig vorgelegte,* $\sum a_\nu$ *eine ganz willkürlich angenommene convergente Reihe mit positiven Gliedern, so hat man:*

$$\text{(I)} \quad \begin{matrix}(15^a)\\(15^b)\end{matrix} \Big\} \sum_0^\infty{}^\nu\, b_\nu^\varkappa \begin{Bmatrix} < \\ > \end{Bmatrix} \left(\sum_0^\infty{}^\nu\, b_\nu\right)^\varkappa \begin{Bmatrix} \varkappa > 1 \\ \varkappa < 1 \end{Bmatrix}$$

$$\text{(II)} \quad \begin{matrix}(16^a)\\(16^b)\end{matrix} \Big\} \sum_0^\infty{}^\nu\, b_\nu^\varkappa \begin{Bmatrix} \geqq \\ \leqq \end{Bmatrix} \left(\sum_0^\infty{}^\nu\, a_\nu\right)^{1-\varkappa} \cdot \left(\sum_0^\infty{}^\nu\, a_\nu^{1-\frac{1}{\varkappa}} \cdot b_\nu\right)^\varkappa \begin{Bmatrix} \varkappa > 1 \\ \varkappa < 1. \end{Bmatrix}$$

Beweis zu (I). Ist $p > 0$, $\varkappa > 1$, so hat man:

$$p^{\varkappa-1} < (1+p)^{\varkappa-1} \tag{17}$$

und daher:

$$p^{\varkappa-1} - 1 < (1+p)^{\varkappa-1} - 1.$$

Da die rechte Seite dieser Ungleichung sicher positiv ist, so folgt durch Multiplication mit der Ungleichung:

$$p < 1 + p,$$

dass:

$$p^\varkappa - p < (1+p)^\varkappa - 1 - p,$$

also:

(18) $$1 + p^\varkappa < (1+p)^\varkappa.$$

Setzt man jetzt: $p = \frac{b}{b_0}$, so folgt nach Multiplication mit $b_0^\varkappa$:

(19) $$b_0^\varkappa + b_1^\varkappa < (b_0 + b_1)^\varkappa \qquad (\varkappa > 1).$$

Angenommen nun, man habe für irgend ein $n \geqq 1$:

(20ᵃ) $$\sum_0^n{}^\nu\, b_\nu^\varkappa < \left(\sum_0^n{}^\nu\, b_\nu\right)^\varkappa \qquad (\varkappa > 1),$$

so liefert die Addition von $b_{n+1}^\varkappa$ zunächst:

$$\sum_0^{n+1}{}^\nu\, b_\nu^\varkappa < \left(\sum_0^n{}^\nu\, b_\nu\right)^\varkappa + b_{n+1}^\varkappa$$

also, mit Benützung von Ungl. (19):

$$\sum_0^{n+1}{}^\nu\, b_\nu^\varkappa < \left(\sum_0^{n+1}{}^\nu\, b_\nu\right)^\varkappa,$$

d. h. Ungl. (20ᵃ) gilt auch noch, wenn n durch $(n+1)$ ersetzt wird. Sie gilt also allgemein, da nach (19) ihre Richtigkeit für $n = 1$ erwiesen ist.

Schreibt man in (20ᵃ) $\varkappa'$ statt $\varkappa$ und substituirt $\frac{1}{b_\nu^{\varkappa'}}$ für b_ν, so folgt weiter:

$$\sum_0^n{}^\nu\, b_\nu < \left(\sum_0^n{}^\nu\, b_\nu^{\frac{1}{\varkappa'}}\right)^{\varkappa'},$$

also:

$$\sum_0^n{}^\nu\, b_\nu^{\frac{1}{\varkappa'}} > \left(\sum_0^n{}^\nu\, b_\nu\right)^{\frac{1}{\varkappa'}} \quad (\varkappa' > 1),$$

und daher, wenn man noch $\frac{1}{\varkappa'} = \varkappa$ setzt:

(20ᵇ) $$\sum_0^n{}^\nu\, b_\nu^\varkappa > \left(\sum_0^n{}^\nu\, b_\nu\right)^\varkappa \qquad (\varkappa > 1).$$

Da die grundliegende Beziehung (17) eine wirkliche Ungleichung ist (d. h. mit definitivem Anschlusse der Gleichheit), und die Abweichung zwischen den beiden Seiten, wie der Schluss von n auf $(n+1)$ zeigt, bei dem Hinzutreten jedes neuen Elementes noch verstärkt wird, so folgt schliesslich für $\lim n = \infty$, wie behauptet:

$$\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu^\varkappa \left\{ \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \right\} \left(\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu \right)^\varkappa \left\{ \begin{matrix} \varkappa > 1 \\ \varkappa < 1 . - \end{matrix} \right.$$

Beweis zu II. Ist $0 < c_0 < r < c_1$ und $\varkappa > 1$, so hat man:[1])

$$(21) \qquad \left\{ \begin{array}{l} c_1^\varkappa - r^\varkappa > \varkappa \cdot r^{\varkappa-1} (c_1 - r) \\ r^\varkappa - c_0^\varkappa < \varkappa \cdot r^{\varkappa-1} (r - c_0). \end{array} \right.$$

Multiplicirt man die erste dieser Ungleichungen mit $(r - c_0)$, die zweite mit $(c_1 - r)$, so folgt durch Subtraction:

$$(c_1^\varkappa - r^\varkappa) \cdot (r - c_0) - (r^\varkappa - c_0^\varkappa) \cdot (c_1 - r) > 0,$$

anders geordnet:

$$(22) \qquad (c_1 - r) \cdot c_0^\varkappa + (r - c_0) \cdot c_1^\varkappa > (c_1 - c_0) \cdot r^\varkappa.$$

Der Bedingung: $c_0 < r < c_1$ wird offenbar genügt, wenn man setzt:

$$r = \frac{a_0 c_0 + a_1 c_1}{a_0 + a_1},$$

unter a_0, a_1 beliebige positive Zahlen verstanden. Alsdann geht aber Ungleichung (22) in die folgende über:

$$\frac{c_1 - c_0}{a_1 + a_1} \cdot a_0 c_0^\varkappa + \frac{c_1 - c_0}{a_0 + a_1} \cdot a_1 c_1^\varkappa > (c_1 - c_0) \left(\frac{a_0 c_0 + a_1 c_1}{a_0 + a_1} \right)^\varkappa,$$

oder auch:

$$(23) \quad a_0 c_0^\varkappa + a_1 c_1^\varkappa > (a_0 + a_1)^{1-\varkappa} \cdot (a_0 c_0 + a_1 c_1)^\varkappa \qquad (\varkappa > 1).$$

Da im übrigen diese zunächst unter der Voraussetzung $c_0 < c_1$ abgeleitete Ungleichung in Bezug auf die Indices 0,1

---

[1]) S. den Zusatz I.

symmetrisch sich verhält, so gilt sie unverändert auch für $c_0 > c_1$; nur für $c_0 = c_1$ geht sie in eine Identität über.

Angenommen nun, man habe für irgend ein $n \geqq 1$:

$$(24^a) \quad \sum_{0}^{n}{}^{\nu}\, a_\nu c_\nu^\varkappa > \left(\sum_{0}^{n}{}^{\nu}\, a_\nu\right)^{1-\varkappa} \cdot \left(\sum_{0}^{n}{}^{\nu}\, a_\nu c_\nu\right)^\varkappa \qquad (\varkappa > 1).$$

Ersetzt man sodann:

$$a_n \text{ durch } a_n + a_{n+1}$$

$$c_n \quad „ \quad \frac{a_n c_n + a_{n+1} c_{n+1}}{a_n + a_{n+1}}$$

also:

$$a_n c_n \quad „ \quad a_n c_n + a_{n+1} c_{n+1},$$

so geht Ungleichung (24ª) zunächst in die folgende über:

$$\sum_{0}^{n-1}{}^{\nu}\, a_\nu c_\nu^\varkappa + (a_n + a_{n+1})^{1-\varkappa} \cdot (a_n c_n + a_{n+1} c_{n+1})^\varkappa$$
$$> \left(\sum_{0}^{n+1}{}^{\nu}\, a_\nu\right)^{1-\varkappa} \cdot \left(\sum_{0}^{n+1}{}^{\nu}\, a_\nu c_\nu\right)^\varkappa,$$

und, wenn man auf das letzte Glied der linken Seite die Ungleichung (23) anwendet:

$$\sum_{0}^{n+1}{}^{\nu}\, a_\nu c_\nu^\varkappa > \left(\sum_{0}^{n+1}{}^{\nu}\, a_\nu\right)^{1-\varkappa} \cdot \left(\sum_{0}^{n+1}{}^{\nu}\, a_\nu c_\nu\right)^\varkappa,$$

d. h. Ungl. (24ª) gilt auch noch, wenn n durch $n+1$ ersetzt wird. Sie gilt also wiederum allgemein, da ihre Richtigkeit nach (23) für $n = 1$ erwiesen ist.

Schreibt man in Ungl. (24ª) $\varkappa'$ statt $\varkappa$ und substituirt $c_\nu^{\frac{1}{\varkappa'}}$ für c_ν, so wird:

$$\sum_{0}^{n}{}^{\nu}\, a_\nu c_\nu > \left(\sum_{0}^{n}{}^{\nu}\, a_\nu\right)^{1-\varkappa'} \cdot \left(\sum_{0}^{n}{}^{\nu}\, a_\nu c_\nu^{\frac{1}{\varkappa'}}\right)^{\varkappa'},$$

also:

$$\sum_{0}^{n}{}^{\nu}\, a_\nu c_\nu^{\frac{1}{\varkappa'}} < \left(\sum_{0}^{n}{}^{\nu}\, a_\nu\right)^{1-\frac{1}{\varkappa'}} \cdot \left(\sum_{0}^{n}{}^{\nu}\, a_\nu c_\nu\right)^{\frac{1}{\varkappa'}} \qquad (\varkappa' > 1),$$

und, wenn man $\frac{1}{\varkappa'} = \varkappa$ setzt:

$$(24^b) \qquad \sum_0^n{}^\nu a_\nu c_\nu^\varkappa < \left(\sum_0^n{}^\nu a_\nu\right)^{1-\varkappa} \cdot \left(\sum_0^n{}^\nu a_\nu c_\nu\right)^\varkappa \qquad (\varkappa < 1).$$

Macht man noch in (23^a), 23^b) die Substitution:

$$a_\nu c_\nu^\varkappa = b_\nu^\varkappa, \quad \text{also:} \quad c_\nu = a_\nu^{-\frac{1}{\varkappa}} \cdot b_\nu,$$

so ergiebt sich:

$$(25) \quad \sum_0^n{}^\nu b_\nu^\varkappa \left\{\begin{matrix} > \\ < \end{matrix}\right\} \left(\sum_0^n{}^\nu a_\nu\right)^{1-\varkappa} \cdot \left(\sum_0^n{}^\nu a_\nu^{1-\frac{1}{\varkappa}} \cdot b_\nu\right)^\varkappa \left\{\begin{matrix} \varkappa > 1 \\ \varkappa < 1. \end{matrix}\right.$$

Da die grundlegende Beziehung (22) wiederum eine wirkliche Ungleichung ist, sofern nicht gerade $c_0 = c_1$, und die Abweichung zwischen den beiden Seiten, wie der Schluss von n auf $(n+1)$ zeigt, bei dem Hinzutreten jedes neuen Elementes c_ν sich verstärkt, ausser wenn $c_\nu = c_{\nu-1}$, in welchem Falle sie immerhin erhalten bleibt, so folgt für $n = \infty$:

$$\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu^\varkappa \left\{\begin{matrix} > \\ < \end{matrix}\right\} \left(\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu\right)^{1-\varkappa} \cdot \left(\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu^{1-\frac{1}{\varkappa}} \cdot b_\nu\right)^\varkappa \left\{\begin{matrix} \varkappa > 1 \\ \varkappa < 1 \end{matrix}\right., \text{ q. e. d.}$$

Zusatz I. Die Ungleichungen (24) lassen sich auch aus einem von Herrn Hoelder[1]) mit Hülfe des Mittelwerthsatzes der Differential-Rechnung bewiesenen, allgemeineren Mittelwerthsatze herleiten. Zur Vervollständigung der hier gegebenen, elementareren Herleitung sei ausdrücklich bemerkt, dass man die fundamentalen Ungleichungen (21) auch für ganz beliebige positive $\varkappa$, ohne den zumeist zu ihrer Herleitung verwendeten Mittelwerthsatz der Differential-Rechnung, völlig elementar in folgender Weise gewinnt.

Aus der für jedes von 1 verschiedene A und ganzzahlige $n > 1$ geltenden Identität:

$$\frac{A^n - 1}{A - 1} = \frac{1 - A^n}{1 - A} = 1 + A + \ldots + A^{n-1}$$

---

[1]) Göttinger Nachr. 1889, p. 38 ff.; vgl. in's besondere p. 44.

folgt für jedes positive $A \gtrless 1$:

$$A^n > 1 + n(A - 1) \tag{26}$$

und hieraus durch Substitution von $A^{-\frac{1}{n}}$ für A:

$$A^{-1} > 1 + n(A^{-\frac{1}{n}} - 1),$$

also:

$$A^{-\frac{1}{n}} < 1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{A - 1}{A},$$

wobei die rechte Seite stets wesentlich positiv ist. In Folge dessen hat man:

$$A^{\frac{1}{n}} > \frac{1}{1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{A-1}{A}}$$

$$> 1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{A - 1}{A}, \quad \text{falls: } \frac{1}{n} \cdot \left| \frac{A-1}{A} \right| < 1,$$

und, wenn man diese Ungleichung in die m^{te} Potenz erhebt, mit Benützung von Ungl. (26):

$$A^{\frac{m}{m}} > 1 + \frac{m}{n} \cdot \frac{A - 1}{A}. \tag{27}$$

Die hierbei gemachte Voraussetzung: $\frac{1}{n} \cdot \left| \frac{A-1}{A} \right| < 1$ ist offenbar immer erfüllt, wenn $A > 1$. Ist dagegen $A < 1$, so wird $\frac{1}{n} \cdot \frac{A-1}{A} < 0$, sodass also, falls $\frac{1}{n} \cdot \left| \frac{A-1}{A} \right| > 1$ sein sollte, die rechte Seite von Ungl. (27) negativ ausfällt: in diesem Falle sagt also diese Ungleichung etwas zwar triviales, aber immerhin richtiges aus. Man hat somit für jedes positive $A \gtrless 1$ und jedes rationale $\varkappa > 0$:

$$A^{\varkappa} > 1 + \varkappa \cdot \frac{A - 1}{A}. \tag{28}$$

Ist jetzt $\varkappa$ irrational und etwa $\varkappa = \lim_{n=\infty} \varkappa_n$, wo $\varkappa_n > 0$ und rational, so folgt aus:

$$A^{\varkappa_n} > 1 + \varkappa_n \cdot \frac{A-1}{A}$$

auf Grund der Definition: $A^{\varkappa} = \lim_{n=\infty} A^{\varkappa_n}$, zunächst nur soviel, dass:

$$A^{\varkappa} \geqq 1 + \varkappa \cdot \frac{A-1}{A}.$$

Man erkennt aber leicht, dass das Gleichheitszeichen in Wahrheit ausgeschlossen erscheint. Dies ist ohne weiteres evident, falls die rechte Seite negativ ausfallen sollte. Ist sie aber positiv, so gilt dies a fortiori, wenn man $\varkappa$ durch $\frac{\varkappa}{2}$ ersetzt. Man hätte also zunächst:

$$A^{\frac{\varkappa}{2}} \geqq 1 + \frac{\varkappa}{2} \cdot \frac{A-1}{A} > 0$$

und hieraus durch Erhebung in's Quadrat:

$$A^{\varkappa} \geqq 1 + \varkappa \cdot \frac{A-1}{A} + \frac{\varkappa^2}{4} \cdot \left(\frac{A-1}{A}\right)^2$$

$$> 1 + \varkappa \cdot \frac{A-1}{A}.$$

Die Ungleichung (28) gilt somit für jedes beliebige $\varkappa > 0$.

Ist jetzt $\varkappa > 1$, so hat man auch:

$$A^{\varkappa-1} > 1 + (\varkappa - 1) \cdot \frac{A-1}{A},$$

und, wenn man diese Ungleichung mit A multiplicirt:

$$A^{\varkappa} > A + (\varkappa - 1)(A - 1)$$

d. h. schliesslich:

$$(29) \qquad A^{\varkappa} > 1 + \varkappa(A-1) \quad \text{für } \varkappa > 1.$$

Substituirt man hier $A = \frac{b}{a}$ und $A = \frac{a}{b}$, wo $b > a > 0$, so ergeben sich die oben unter (21) benützten Ungleichungen:

$$(30)\qquad \begin{cases} b^{\varkappa} - a^{\varkappa} > \varkappa \cdot a^{\varkappa - 1}(b - a) \\ b^{\varkappa} - a^{\varkappa} < \varkappa \cdot b^{\varkappa - 1}(b - a) \end{cases} \qquad (\varkappa > 1).$$

Zusatz II. Liest man die auf den Fall $\varkappa > 1$ bezügliche Ungleichung (16^a) rückwärts, so gewinnt man den folgenden Convergenz-Satz:

Gleichzeitig mit den beiden Reihen $\sum a_\nu$, $\sum b_\nu^{\varkappa}$ *(wo* $\varkappa > 1$*) convergirt allemal auch die Reihe* $\sum a_\nu^{1-\frac{1}{\varkappa}} \cdot b_\nu$.

Herr Hoelder hat diesen Satz nur für den speciellen Fall $a_\nu = \left(\frac{1}{\nu}\right)^{1+\varrho}$ aus der Ungleichung (24^a) in wesentlich complicirterer Weise abgeleitet.[1]) Dazu will ich noch bemerken, dass der obige Convergenz-Satz für den Fall eines ganzzahligen $\varkappa$ sich noch einfacher aus dem bekannten Satze ergiebt,[2]) dass das geometrische Mittel niemals das arithmetische übersteigt, also:

$$\sqrt[\varkappa]{p^{(1)} \cdot p^{(2)} \ldots p^{(\varkappa)}} \leqq \frac{1}{\varkappa}(p^{(1)} + p^{(2)} + \ldots + p^{(\varkappa)}).$$

Setzt man hier $p^{(1)} = \ldots = p^{(\varkappa - 1)} = a_\nu$, $p^{(\varkappa)} = b_\nu^{\varkappa}$, so folgt:

$$a_\nu^{1-\frac{1}{\varkappa}} \cdot b_\nu \leqq \frac{(\varkappa - 1) \cdot a_\nu + b_\nu^{\varkappa}}{\varkappa}$$

und daher:

$$\sum_0^\infty{}^{\nu}\, a_\nu^{1-\frac{1}{\varkappa}} \cdot b_\nu \leqq \left(1 - \frac{1}{\varkappa}\right) \cdot \sum_0^\infty{}^{\nu}\, a_\nu + \frac{1}{\varkappa} \cdot \sum_0^\infty{}^{\nu}\, b_\nu^{\varkappa},$$

woraus die Richtigkeit der ausgesprochenen Behauptung unmittelbar hervorgeht.

---

1) A. a. O. p. 46.

2) Für den Fall $\varkappa = 2$ wurde diese Schlussweise schon bei früherer Gelegenheit von mir benützt: Sitz.-Ber. Bd. 30 (1900), p. 63.

§ 3.

Verallgemeinerte Form des Hauptsatzes von § 1. *Besteht von den beiden Beziehungen:*

$$(31^a) \qquad \sum_0^\infty {}^\nu c_\nu r^\nu \leqq A \cdot e^{\gamma \cdot r^\alpha}$$

$$(A > 0,\ \gamma > 0,\ \alpha > 0)$$

$$(31^b) \qquad \sum_0^\infty {}^\nu C_\nu r^\nu \geqq A \cdot e^{\gamma \cdot r^\alpha}$$

die erste für alle r, *welche eine gewisse positive Zahl* R *übersteigen, die zweite für unendlich viele* r, *unter denen auch beliebig grosse vorkommen, so hat man:*

$$(32^a) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot c_\nu} \leqq (\alpha\,\gamma)^{\frac{1}{\alpha}},$$

$$(32^b) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot C_\nu} \geqq (\alpha\,\gamma)^{\frac{1}{\alpha}},$$

oder auch:

$$(33^a) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{c_\nu} \leqq (\alpha\,\gamma\,e)^{\frac{1}{\alpha}},$$

$$(33^b) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{C_\nu} \geqq (\alpha\,\gamma\,e)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Beweis: Substituirt man in (31^a) $r^{\frac{1}{\alpha}}$ für r, so wird:

$$(34) \qquad \sum_0^\infty {}^\nu c_\nu r^{\frac{\nu}{\alpha}} = \sum_0^\infty {}^\nu (c_\nu^\alpha r^\nu)^{\frac{1}{\alpha}} \leqq A \cdot e^{\gamma r} \quad (\text{für } r > R^\alpha).$$

Man hat nun zunächst im Falle $\alpha > 1$ nach § 2, Ungl. (15^b) (für $\varkappa = \frac{1}{\alpha} < 1$):

$$\sum_0^\infty {}^\nu (c_\nu^\alpha r^\nu)^{\frac{1}{\alpha}} > \left(\sum_0^\infty {}^\nu c_\nu^\alpha r^\nu\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

also:

$$(35^1) \qquad \sum_0^\infty {}^\nu c_\nu^\alpha r^\nu < \left(\sum_0^\infty {}^\nu c_\nu r^{\frac{\nu}{\alpha}}\right)^\alpha \qquad (\alpha > 1).$$

Andererseits im Falle $a < 1$ nach Ungl. (16^a) (für $\varkappa = \frac{1}{a} > 1$), wenn man noch setzt: $a_\nu = \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^\nu$, wo $\delta > 0$:

$$\sum_0^\infty{}^\nu (c_\nu^a\, r^\nu)^{\frac{1}{a}} > \left(\sum_0^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^\nu\right)^{1-\frac{1}{a}} \cdot \left(\sum_0^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^{\nu(1-a)} \cdot c_\nu^a \cdot r^\nu\right)^{\frac{1}{a}}$$

$$= \left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)^{1-\frac{1}{a}} \cdot \left(\sum_0^\infty{}^\nu c_\nu^a \cdot \left(\frac{r}{(1+\delta)^{1-a}}\right)^\nu\right)^{\frac{1}{a}},$$

also:

$$(35^2)\quad \sum_0^\infty{}^\nu c_\nu^a \cdot \left(\frac{r}{(1+\delta)^{1-a}}\right)^\nu < \left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)^{1-a} \cdot \left(\sum_0^\infty{}^\nu c_\nu\, r^{\frac{\nu}{a}}\right)^a \quad (a<1).$$

Mit Benützung der Ungleichungen (35^1), (35^2) ergiebt sich also aus (34):

$$(36^1)\quad \sum_0^\infty{}^\nu c_\nu^a \cdot r^\nu < A^a \cdot e^{a\gamma r} \qquad (a > 1)$$

$$\sum_0^\infty{}^\nu c_\nu^a \cdot \left(\frac{r}{(1+\delta)^{1-a}}\right)^\nu < \left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)^{1-a} \cdot A^a \cdot e^{a\gamma r} \qquad (a < 1),$$

oder, wenn man in der letzten Ungleichung $\frac{r}{(1+\delta)^{1-a}}$ durch r ersetzt:

$$(36^2)\quad \sum_0^\infty{}^\nu c_\nu^a \cdot r^\nu < \left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)^{1-a} \cdot A^a \cdot e^{a\gamma\cdot(1+\delta)^{1-a}\cdot r} \qquad (a < 1).$$

Nach dem Hauptsatze des § 1 ergibt sich also aus (36^1), dass:

$$(37^1)\qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu!\, c_\nu^a} \leqq a\,\gamma \qquad (a > 1).$$

Ebenso aus (36^2) zunächst:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu!\, c_\nu^a} \leqq a\,\gamma\,(1+\delta)^{1-a} \qquad (a < 1).$$

Da es aber freisteht, δ unbegrenzt zu verkleinern, so folgt, dass auch in d i e s e m Falle (d. h. für $a < 1$):

$$(37^2) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu!\, c_\nu^\alpha} \leqq \alpha\gamma$$

sein muss. Beachtet man noch, dass die Beziehung (37^1), bezw. (37^2) für $\alpha = 1$ mit der in § 1 unter (2^a) bemerkten zusammenfällt, so ergiebt sich schliesslich, wenn man noch in die $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\text{te}}$ Potenz erhebt, in Uebereinstimmung mit der Behauptung (32^a):

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot c_\nu} \leqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}} \qquad \text{für jedes } \alpha > 0.$$

In ganz analoger Weise findet man aus der Voraussetzung (31^b), wenn man dieselbe durch Substitution von $r^{\frac{1}{\alpha}}$ für r zunächst wiederum auf die Form bringt:

$$\sum_0^\infty{}^\nu C_\nu\, r^{\frac{\nu}{\alpha}} = \sum_0^\infty{}^\nu (C_\nu^\alpha \cdot r^\nu)^{\frac{1}{\alpha}} \geqq e^{\gamma r}$$

und sodann auf deren linke Seite die Ungleichungen (15^a), (16^b) anwendet, übereinstimmend mit (32^b):

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot C_\nu} \geqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Mit Benützung der infinitären Beziehung (14) lassen sich dann diese Relationen wiederum auch durch die etwas einfacheren (33^a), (33^b) ersetzen.

---

§ 4.

Der soeben bewiesene Hauptsatz ist in der gegebenen Form nicht ohne weiteres umkehrbar. Dagegen lassen sich die Voraussetzungen des Satzes noch in der Weise erweitern, dass der folgende umkehrbare Satz resultirt:

Satz I. *Besteht für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$ von den beiden Beziehungen:*

$$(38^a) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu c_\nu r^\nu < e^{(1+\varepsilon)\cdot\gamma r^\alpha}$$

$$(38^b) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu C_\nu r^\nu > e^{(1-\varepsilon)\cdot\gamma r^\alpha}$$

die erste für alle r, welche eine gewisse, im allgemeinen von ε abhängige positive Zahl R_ε übersteigen; die zweite für unendlich viele r, unter denen auch beliebig grosse vorkommen, so hat man:

$$(39^a) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot c_\nu} \leqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}},$$

$$(39^b) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}}\cdot C_\nu} \geqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}$$

oder auch:

$$(40^a) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu^{\frac{1}{\alpha}}\cdot\sqrt[\nu]{c_\nu} \leqq (\alpha\gamma e)^{\frac{1}{\alpha}},$$

$$(40^b) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu^{\frac{1}{\alpha}}\cdot\sqrt[\nu]{C_\nu} \geqq (\alpha\gamma e)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Umgekehrt folgen aus den Voraussetzungen (39) oder (40) auch allemal die Beziehungen (38) in dem angegebenen Umfange.[1])

---

[1]) Setzt man:

$$\alpha\gamma e = \varkappa, \text{ also: } \gamma = \frac{\varkappa}{\alpha e},$$

so nimmt die obige Umkehrung die folgende Form an:

Aus den Voraussetzungen

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu^{\frac{1}{\alpha}}\cdot\sqrt[\nu]{c_\nu} \leqq \varkappa^{\frac{1}{\alpha}} \quad , \quad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu^{\frac{1}{\alpha}}\cdot\sqrt[\nu]{C_\nu} \geqq \varkappa^{\frac{1}{\alpha}}$$

folgt allemal:

$$\sum_0^\infty{}^\nu c_\nu r^\nu < e^{\frac{\varkappa(1+\varepsilon)}{\alpha e}\cdot r^\alpha} \quad , \quad \sum_0^\infty{}^\nu C_\nu r^\nu > e^{\frac{\varkappa(1-\varepsilon)}{\alpha e}\cdot r^\alpha}$$

in dem oben näher bezeichneten Umfange.

Den ersten Theil dieses Satzes hat Herr Ernst Lindelöf (unter der etwas engeren Voraussetzung $\nu^{\frac{1}{\alpha}}\cdot\sqrt[\nu]{c_\nu} < \varkappa^{\frac{1}{\alpha}}$ für $\nu > n$) auf gänzlich anderem Wege abgeleitet: a. a. O. p. 39.

Beweis. Aus (38[a]) würde auf Grund des vorigen Hauptsatzes (Formel (32[a]), (33[a])) zunächst folgen, dass für jedes $\varepsilon > 0$:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot c_\nu} \leqq ((1+\varepsilon) \cdot \alpha \gamma)^{\frac{1}{\alpha}}$$

oder auch:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \nu^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{c_\nu} \leqq ((1+\varepsilon) \cdot \alpha \gamma e)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Da aber ε unbegrenzt verkleinert werden darf, so folgt schliesslich, dass geradezu:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot c_\nu} \leqq (\alpha \gamma)^{\frac{1}{\alpha}}$$

oder auch:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \nu^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{c_\nu} \leqq (\alpha \gamma e)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Das analoge gilt bezüglich der Herleitung von Ungl. (39[b]), (40[b]).

Die Umkehrbarkeit dieser Resultate lässt sich dann in folgender Weise indirect beweisen. Angenommen es bestehe die Voraussetzung (39[a]), und es sei nicht möglich, jedem beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ ein R_ε so zuzuordnen, dass Ungl. (38[a]) für $r > R_\varepsilon$ beständig erfüllt ist: alsdann müsste ein bestimmtes $\varepsilon' > 0$ existiren, derart dass unter beliebig grossen r immer wieder solche vorkommen, für welche:

$$\sum_0^\infty{}^\nu c_\nu r^\nu \geqq e^{(1+\varepsilon') \cdot \gamma r^\alpha}.$$

Daraus würde aber nach dem vorigen Hauptsatze (s. Ungl. (31[b]), (32[b])) folgen, dass:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot c_\nu} \geqq ((1+\varepsilon') \cdot \alpha \gamma)^{\frac{1}{\alpha}},$$

was der Voraussetzung widerspricht.

Analog würde die Annahme, dass die Beziehung (38^b) nicht allemal aus der Voraussetzung (39^b) resultire, die Existenz einer Ungleichung von der Form:

$$\sum_0^\infty {}^\nu C_\nu r^\nu \leqq e^{(1-\varepsilon')\cdot\gamma r^\alpha} \qquad (r > R)$$

nach sich ziehen, und somit schliesslich im Widerspruche mit der Voraussetzung auf die Relation:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot C_\nu} \leqq ((1-\varepsilon')\cdot \alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}$$

führen.

---

§ 5.

Ein weiterer ebenfalls umkehrbarer Satz ergiebt sich aus dem Hauptsatze des § 3, wenn die Voraussetzung (31^a) für jedes beliebig kleine, die Voraussetzung (31^b) für jedes beliebig grosse $\gamma > 0$ erfüllt ist, nämlich:

Satz II. *Besteht von den beiden Beziehungen:*

$$(41^a) \qquad \sum_0^\infty {}^\nu c_\nu r^\nu < e^{\varepsilon\cdot r^\alpha}$$

$$(41^b) \qquad \sum_0^\infty {}^\nu C_\nu r^\nu > e^{\omega\cdot r^\alpha}$$

die erste für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$ und alle r, die eine gewisse positive Zahl R_ε übersteigen; die zweite für jedes beliebig grosse $\omega > 0$ und unendlich viele Werthe von r, unter denen auch beliebig grosse vorkommen,[1] *so hat man:*

---

[1] Dieser Zusatz könnte hier wegbleiben, da bei hinlänglicher Vergrösserung von ω die Beziehung (41^b) überhaupt nur bei entsprechender Vergrösserung von r bestehen kann.

$$(42^a) \qquad \lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot c_\nu} = \lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{c_\nu} = 0$$

$$(42^b) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot C_\nu} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \nu^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{C_\nu} = \infty.$$

Umgekehrt resultiren aus den Voraussetzungen (42) auch allemal die Beziehungen (41) in dem angegebenen Umfange.

Beweis. Aus den Voraussetzungen (41) würde auf Grund des Hauptsatzes § 3 zunächst folgen, dass:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot c_\nu} \leqq (\alpha\,\varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}, \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot C_\nu} \geqq (\alpha\,\omega)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Da es aber freisteht, ε unbegrenzt zu verkleinern, ω unbegrenzt zu vergrössern, so ergeben sich hieraus in der That die Beziehungen (42).

Die Umkehrbarkeit dieser Resultate erkennt man dann wiederum unmittelbar auf indirectem Wege, ganz analog, wie bei Satz I. —

Aus dem eben bewiesenen Satze ergiebt sich schliesslich noch der folgende:

Satz III. *Besteht für jedes beliebig kleine $\delta > 0$ von den beiden Beziehungen*

$$(43^a) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu c_\nu r^\nu < e^{r^{\alpha+\delta}}$$

$$(43^b) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu C_\nu r^\nu > e^{r^{\alpha-\delta}}$$

die erste für alle r, die eine gewisse positive Zahl R_δ übersteigen; die zweite für unendlich viele r, unter denen auch beliebig grosse vorkommen, so hat man für jedes beliebig kleine $\delta > 0$:

$$(44^a) \qquad \lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot c_\nu} = \lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot \sqrt[\nu]{c_\nu} = 0$$

$$(44^b) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha-\delta}} \cdot C_\nu} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \nu^{\frac{1}{\alpha-\delta}} \cdot \sqrt[\nu]{C_\nu} = \infty.$$

Umgekehrt resultiren aus den Voraussetzungen (44) auch allemal die Beziehungen (43) in dem angegebenen Umfange.

Beweis. Denkt man sich δ beliebig klein fixirt, so besteht auf Grund der Voraussetzung (43^a) für hinlänglich grosse r (nämlich $r > R_{\frac{1}{2}\delta}$) die Beziehung:

$$\sum_0^\infty{}^\nu c_\nu r^\nu < e^{r^{\alpha+\frac{\delta}{2}}} = e^{\left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{\delta}{2}} \cdot r^{\alpha+\delta}}.$$

Wie klein jetzt auch $\varepsilon > 0$ vorgeschrieben wird, so kann man durch passende Vergrösserung von r stets erzielen, dass $\left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{\delta}{2}} < \varepsilon$ wird. Dann ergiebt sich aber aus Satz II, dass für dieses und somit schliesslich für jedes $\delta > 0$:

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot c_\nu} = \lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot \sqrt[\nu]{c_\nu} = 0.$$

Das analoge gilt dann bezüglich der Behauptung (44^b).

Auch hier ergiebt sich die Umkehrbarkeit der betreffenden Resultate mit Hülfe des in Satz I benützten indirecten Beweisverfahrens.

---

§ 6.

Es sei jetzt x eine complexe Veränderliche, $g(x) = \sum_0^\infty{}^\nu b_\nu x^\nu$, wo die b_ν ebenfalls beliebig complex zu denken sind, eine beständig convergirende Reihe. Angenommen nun, es genüge $|g(x)|$ bei hinlänglich grossen Werthen von $|x|$ einer der beiden Voraussetzungen, welche in dem Hauptsatze des § 3 für $\sum c_\nu r^\nu$ bezw. $\sum C_\nu r^\nu$ galten, also entweder:

(45^a) $$|g(x)| \leqq A \cdot e^{\gamma \cdot |x|^\alpha}$$

für alle $|x| > R$; oder:

(45^b) $$|g(x)| \geqq A \cdot e^{\gamma \cdot |x|^\alpha}$$

für unendlich viele x, unter denen auch beliebig grosse vorkommen. Es fragt sich nun: Bleibt auch unter diesen Voraussetzungen der betreffende Hauptsatz gültig, d. h. genügen auf Grund der Voraussetzungen (45^a), (45^b) die $|b_\nu|$ denselben infinitären Relationen, welche sich in § 3 für die c_ν, C_ν ergeben haben?

Man erkennt ohne weiteres, dass diese Frage in Bezug auf die Voraussetzung (45^b) zu bejahen ist. Denn da:

$$(46) \qquad |g(x)| \leq \sum_0^\infty{}^\nu |b_\nu x^\nu|$$

so folgt aus (45^b), dass auch:

$$(47) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu |b_\nu x^\nu| \geq A \cdot e^{\gamma \cdot |x|^\alpha}$$

(in dem angegebenen Umfange) und man findet somit, wenn man in § 3 $r = |x|$, $C_\nu = |b_\nu|$ setzt, nach Ungl. (39^b), (40^b), dass:

$$(48) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |b_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|b_\nu|} \geq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Um nun den entsprechenden Nachweis auch bezüglich der Voraussetzung (45^a) zu führen, bemerke man zunächst, dass aus (45^a), d. h. aus der Beziehung:

$$\left|\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu x^\nu\right| \leq A \cdot e^{\gamma \cdot |x|^\alpha} \qquad \text{für } |x| > R$$

nach dem Cauchy'schen Coefficienten-Satze sich ergiebt:

$$(49) \qquad |b_\nu x^\nu| \leq A \cdot e^{\gamma \cdot |x|^\alpha} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots; \ |x| > R).$$

Wird jetzt $\delta > 0$ beliebig angenommen, so hat man identisch:

$$|b_\nu x^\nu| = \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^\nu \cdot |b_\nu((1+\delta)x)^\nu|$$

und daher, wenn man auf den zweiten Factor der rechten Seite die Ungleichung (49) anwendet:

$$(50) \qquad |b_\nu x^\nu| < \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^\nu \cdot A \cdot e^{\gamma(1+\delta)^\alpha \cdot |x|^\alpha},$$

gültig für $|x| > \frac{R}{1+\delta}$, also für alle möglichen $\delta > 0$ mit Sicherheit für $|x| > R$.

Substituirt man nun in (50) der Reihe nach $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ in inf., so folgt durch Addition:

$$(51) \qquad \sum_0^\infty{}^{\nu} |b_\nu x^\nu| \leq \frac{1+\delta}{\delta} \cdot A \cdot e^{\gamma \cdot (1+\delta)^\alpha \cdot |x|^\alpha}$$

für jedes $\delta > 0$ und $|x| > R$. Hieraus ergiebt sich aber nach dem Hauptsatze des § 3 (Ungl. (39ᵃ), (40ᵃ)) zunächst, dass:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |b_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|b_\nu|} \leq (1+\delta) \cdot (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}$$

und, da es thatsächlich freisteht, δ unbegrenzt zu verkleinern, schliesslich:

$$(52) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |b_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|b_\nu|} \leq (\alpha\,\gamma)^{\frac{1}{\alpha}},$$

d. h. auch dieser Theil des Hauptsatzes von § 3 behält unter der jetzigen Voraussetzung seine Gültigkeit. Um das betreffende Resultat nochmals übersichtlich zu formuliren, kann man also den folgenden Satz aussprechen:

Es ist:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |b_\nu|} \leq (\alpha\,\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \textit{wenn:} \quad |g(x)| < A \cdot e^{\gamma \cdot |x|^\alpha}$$

für alle x, deren absoluter Betrag eine gewisse positive Zahl R übersteigt.

Es ist:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |b_\nu|} \geq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \textit{wenn:} \quad |g(x)| \geq A \cdot e^{\gamma \cdot |x|^\alpha}$$

für unendlich viele x, unter denen auch beliebig grosse vorkommen.

Gleichzeitig mit dem Hauptsatze des § 3 behalten aber auch die in §§ 4, 5 daraus abgeleiteten Folgesätze ihre Gültigkeit:

dieselben beruhten ja lediglich darauf, dass man die Constanten γ, α in passender Weise durch veränderliche Parameter ersetzte. Man gewinnt auf diese Weise, entsprechend den Sätzen I—III der beiden vorigen Paragraphen, noch die folgenden Sätze:

Satz I'. *Ist für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$ und alle x, deren absoluter Betrag eine gewisse Zahl R_ε übersteigt:*

$$|g(x)| < e^{\gamma(1+\varepsilon)\cdot|x|^\alpha}, \tag{53a}$$

so hat man:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |b_\nu|} \equiv \overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|b_\nu|} \leqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{54a}$$

Ist für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$ und unendlich viele x, unter denen auch beliebig grosse vorkommen:

$$|g(x)| > e^{\gamma(1-\varepsilon)\cdot|x|^\alpha}, \tag{53b}$$

so hat man:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |b_\nu|} \equiv \overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|b_\nu|} \geqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{54b}$$

Bestehen also die beiden Voraussetzungen (53a), (53b) *gleichzeitig, so wird geradezu:*

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |b_\nu|} \equiv \overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|b_\nu|} = (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{54}$$

Umgekehrt resultirt aus der Voraussetzung (54a) *allemal die Beziehung* (53a), *ebenso aus* (54b) *die Beziehung* (53b), *während die Voraussetzung* (54) *die gleichzeitige Existenz von* (53a) *und* (53b) *nach sich zieht.*

Satz II'. *Ist für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$, und alle x, deren absoluter Betrag eine gewisse positive Zahl R_ε übersteigt:*

$$|g(x)| < e^{\varepsilon\cdot|x|^\alpha}, \tag{55a}$$

so hat man:

$$(56^a) \qquad \lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |b_\nu|} = \lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|b_\nu|} = 0.$$

Ist für jedes beliebig grosse $\omega > 0$ *und unendlich viele* x, *unter denen (dann eo ipso*[1]*) auch beliebig grosse vorkommen:*

$$(55^b) \qquad |g(x)| > e^{\omega \cdot |x|^\alpha},$$

so hat man:

$$(56^b) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |b_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \nu^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|b_\nu|} = \infty.$$

Umgekehrt resultirt allemal die Beziehung (55^a) *bezw.* (55^b) *aus der Voraussetzung* (56^a) *bezw.* (56^b).

Satz III'. *Ist für jedes beliebig kleine* $\delta > 0$ *und alle* x, *deren absoluter Betrag eine gewisse positive Zahl* R_δ *übersteigt:*

$$(57^a) \qquad |g(x)| < e^{|x|^{\alpha+\delta}},$$

so hat man für jedes $\delta > 0$:

$$(58^a) \qquad \lim_{\nu=\infty} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot |b_\nu|} = \lim_{\nu=\infty} \nu^{\frac{1}{\alpha+\delta}} \cdot \sqrt[\nu]{|b_\nu|} = 0.$$

Ist für jedes beliebig kleine $\delta > 0$ *und unendlich viele* x, *unter denen auch beliebig grosse vorkommen:*

$$(57^b) \qquad |g(x)| > e^{|x|^{\alpha-\delta}},$$

so hat man für jedes $\delta > 0$:

$$(58^b) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha-\delta}} \cdot |b_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \nu^{\frac{1}{\alpha-\delta}} \cdot \sqrt[\nu]{|b_\nu|} = \infty.$$

Umgekehrt resultirt allemal die Beziehung (57^a) *bezw.* (57^b) *aus der Voraussetzung* (58^a) *bezw.* (58^b).

Anmerkung. Das zur Herleitung des eigentlichen Hauptsatzes angewendete Verfahren, um aus einer oberen Schranke

---

[1]) s. die Fussnote auf p. 183.

für $\left|\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu x^\nu\right|$ eine solche für $\sum_0^\infty{}^\nu |b_\nu x^\nu|$ abzuleiten, lässt sich offenbar leicht verallgemeinern und dürfte sich auch für andere Untersuchungen als nützlich erweisen. Hier möchte ich nur noch die folgende Bemerkung daran knüpfen. Aus der Voraussetzung

$$(59) \qquad \left|\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu x^\nu\right| \leqq e^{\gamma \cdot |x|^\alpha} \quad \text{für } |x| > R,$$

folgt nach Ungl. (51), dass für jedes $\delta > 0$ und $|x| > R$:

$$\sum_0^\infty{}^\nu |b_\nu x^\nu| < \frac{1+\delta}{\delta} \cdot e^{\gamma \cdot (1+\delta)^\alpha \, |x|^\alpha}.$$

Wird jetzt $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgeschrieben, so kann man zunächst δ so klein fixiren, dass:

$$(1+\delta)^\alpha < 1 + \frac{\varepsilon}{2},$$

also:

$$\sum_0^\infty{}^\nu |b_\nu x^\nu| < e^{\lg\left(1+\frac{1}{\delta}\right) + \gamma\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot |x|^\alpha}.$$

Sodann aber kann man eine positive Zahl R_ε so gross annehmen, dass:

$$\lg\left(1+\frac{1}{\delta}\right) \leqq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \gamma \cdot R_\varepsilon^\alpha \quad \left(\text{d. h. } R_\varepsilon \geqq \left(\frac{2}{\varepsilon\gamma} \lg\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \cdot \gamma \cdot |x|^\alpha \quad \text{für } |x| > R_\varepsilon.$$

Man findet also schliesslich:

$$(60) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu |b_\nu x^\nu| < e^{\gamma(1+\varepsilon) \cdot |x|^\alpha} \quad \text{für } |x| > R_\varepsilon.$$

In Worten: *Genügt* $\left|\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu x\right|$ *für alle hinlänglich grossen* x *der Beziehung* (59), *so genügt* $\sum_0^\infty{}^\nu |b_\nu x^\nu|$ *bei beliebig kleinem* $\varepsilon > 0$ *für alle hinlänglich grossen* x *einer Beziehung von der Form* (60).

Ersetzt man die Voraussetzung (59) durch die folgende:

$$(61)\qquad \left|\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu x^\nu\right| < e^{\gamma\cdot(1+\varepsilon')\cdot|x|^\alpha} \quad \text{für jedes } \varepsilon' > 0 \text{ und } |x| > r_{\varepsilon'},$$

so folgt zunächst:

$$\sum_0^\infty{}^\nu |b_\nu x^\nu| < e^{\gamma(1+\varepsilon')(1+\varepsilon)\cdot|x|^\alpha} \quad \text{für } |x| > R_{\varepsilon,\varepsilon'},$$

d. h. mit Rücksicht auf die Bedeutung von $\varepsilon, \varepsilon'$, schliesslich:

$$(62)\qquad \sum_0^\infty{}^\nu |b_\nu x^\nu| < e^{\gamma(1+\varepsilon')\cdot|x|^\alpha} \quad \text{für } |x| > R_{\varepsilon'}.$$

Es genügt also in diesem Falle $\sum_0^\infty{}^\nu |b_\nu x^\nu|$ *für hinlänglich grosse* x *stets einer Beziehung von genau derselben Form, wie* $\left|\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu x^\nu\right|$.

Ferner ergiebt sich aber auch folgendes: *Besteht für jedes* $\varepsilon > 0$ *und unendlich viele* $|x|$, *unter denen auch beliebig grosse vorkommen, eine Beziehung von der Form:*

$$(63)\qquad \sum_0^\infty{}^\nu |b_\nu x^\nu| > e^{\gamma(1-\varepsilon)\cdot|x|^\alpha},$$

so hat man gleichfalls für jedes $\varepsilon > 0$ *und für unendlich viele* x, *unter denen auch beliebig grosse vorkommen:*

$$(64)\qquad \left|\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu x^\nu\right| > e^{\gamma(1-\varepsilon)\cdot|x|^\alpha}.$$

Andernfalls müsste nämlich ein bestimmtes $\varepsilon_0 > 0$ existiren, derart dass:

$$\left|\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu x^\nu\right| \leqq e^{\gamma(1-\varepsilon_0)\cdot|x|^\alpha}$$

für alle x, deren absoluter Betrag eine gewisse Zahl R übersteigt. Dann hätte man aber auf Grund von Ungl. (59), (60), wenn man der in (60) auftretenden willkürlichen Zahl ε den Werth ε_0 beilegt:

$$\sum_0^\infty{}^\nu \, | \, b_\nu \, x^\nu \, | < e^{\gamma (1 - \varepsilon_0^2) \cdot |x|^\alpha} \qquad \text{für } | \, x \, | > R_{\varepsilon_0},$$

was der Voraussetzung widerspricht.

Ein analoger Zusammenhang besteht offenbar auch zwischen Ungleichungen von der Form:

$$\sum_0^\infty{}^\nu \, | \, b_\nu \, x^\nu \, | < e^{\gamma \cdot |x|^{\alpha + \delta}} \quad \text{und:} \quad \left| \sum_0^\infty{}^\nu \, b_\nu \, x^\nu \right| < e^{\gamma \cdot |x|^{\alpha + \delta}}$$

$$\left| \sum_0^\infty{}^\nu \, b_\nu \, x^\nu \right| > e^{\gamma \cdot |x|^{\alpha - \delta}} \quad \text{und:} \quad \sum_0^\infty{}^\nu |b_\nu \, x^\nu| > e^{\gamma \cdot |x|^{\alpha - \delta}}.$$

23

Separat-Abdruck
aus den Sitzungsberichten der mathem.-phys. Classe
der kgl. bayer. Akademie der Wissenschaften
Bd. XXXII 1902 Heft III.

Zur Theorie der ganzen transcendenten Funktionen.

(Nachtrag zu dem Aufsatze auf S. 163—192 dieses Bandes.)

Von

Alfred Pringsheim.

München 1902
Verlag der k. Akademie.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Die in den Sitzungsberichten erschienenen Abhandlungen sind nicht in einzelnen Abzügen ausgegeben.
(Preis des betr. Heftes der Sitzungsberichte 1 Mark 20 Pfennig).

Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Klasse. Bd. I—XXI in je 3 Abtheilungen, von 1832—1900.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse. Bd. I—XXX, von 1871—1900.

Bauer, Gustav. Kettenbruch Eulers. Abh. II. Kl. XI, 2. 1872 ℳ —.50
— Pascal's Theorem. Abh. II. Kl. XI, 3 1874 ℳ 1.—
— Gedächtnissrede auf Otto Hesse. 1882 ℳ —.60
— Von der Hesse'schen Determinante. Abh. II. Kl. XIV, 3. 1883 ℳ —.50
— Ueber einige Determinanten. Sitzb. 1872, p. 345—354.
— Ueber Kugelfunktionen. Sitzb. 1875, pag. 247—272.
— Ueber Systeme von Curven 6. Ordnung, auf welche das Normalenproblem bei Curven 2. Ordnung führt. Sitzb. 1878, p. 121—135.
— Ueber das geradlinige Hyperboloid. Sitzb. 1880, p. 635—640.
— Tripel von Geraden auf einem Hyperboloid. Sitzb. 1881, p. 241—248.
— Ueber die Hesse'sche Determinante der Hesse'schen Fläche einer Fläche dritter Ordnung. Sitzb. 1883, p. 320.
— Von den gestaltlichen Verhältnissen der parabolischen Curve auf einer Fläche dritter Ordnung. Sitzb. 1883. p. 320—343.
— Ueber d. Discriminante einer binären Form. Sitzb. 1886, p. 183—191.
— Ueber Flächen vierter Ordnung, deren geometrische Erzeugung sich an zwei Tetraeder knüpft. Sitzb. 1888, p. 337—354.
— Darstellung binärer Formen als Potenzsummen. Sitz. 1892, p. 3—20.
— Bemerkungen über zahlentheoretische Eigenschaften der Legendre'schen Polynome. Sitzb. 1894, p. 343—359.
— Von zwei Tetraëdern, welche einander zugleich eingeschrieben und umschrieben sind. Sitz. 1897, p. 359—366.

Brill, Al. Zur Theorie der geodätischen Linie etc. Abh. II. Kl. XIV, 2, 1883 ℳ 1.—
— Bestimmung der optischen Wellenfläche etc. 1883, 3 p. 423—435.
— Ueber rationale Curven und Regelflächen, 1885, 2 p. 276—287.
— Ueber die Multiplicität der Schnittpunkte von zwei ebenen Curven. Sitzb. 1888, p. 81—94.
— Die reducirte Resultante. Abh. II. Kl. XVII, 1889, p. 89—181. ℳ —.40.
— Ueber das Verhalten einer Funktion von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle. Sitzb. 1891, p. 207—220.

Du Bois-Reymond, Paul. Coefficienten der trigonometrischen Reihe. Abh. II. Kl. XII, 2. 1876 ℳ 3.60.
— Ueber den Gültigkeitsbereich der Taylor'schen Reihenentwicklung. Sitzb. 1876, p. 225—237.
— Ein allgemeiner Satz über die Integrirbarkeit von Funktionen integrirbarer Funktionen. Sitz. 1882, p. 240—242.

Dyck, W. Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln definirten Curvensysteme. Erste Mittheilung (mit 4 Taf.). Sitzb. 1891, p. 23—57; zweite Mittheilung (mit 3 Taf.). Sitzb. 1892, p. 101—138.
— Beiträge zur Potentialtheorie. I. Kronecker'sche Charakteristiken. Sitzb. 1895, p. 261—277.

Zur Theorie der ganzen transcendenten Functionen.

(Nachtrag zu dem Aufsatze auf S. 163—192 dieses Bandes.)

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 8. November.*)

Der in dem oben citirten Aufsatze mitgetheilte elementare Beweis für die Poincaré-Hadamard'schen Sätze über den Zusammenhang zwischen dem infinitären Verhalten gewisser ganzer transcendenter Functionen und demjenigen ihrer Coefficienten gestattet noch eine merkliche Vereinfachung. Herr Lüroth hat mich darauf aufmerksam gemacht, dass der auf die Voraussetzung $\sum C_\nu r^\nu \geqq A \cdot e^{\gamma r}$ sich beziehende Theil des Hauptsatzes § 1 und zwar zunächst in der Form, welche a. a. O. in dem Zusatze unter (12^b) angegeben wird, ganz unmittelbar aus einer allgemeinen Bemerkung über Potenzreihen mit reellen Gliedern resultirt. Macht man nun aber von dieser Vereinfachung Gebrauch, so erscheint es angemessen, auch denjenigen Theil des Beweises, der sich auf die Voraussetzung $\sum c_\nu r^\nu \leqq A \cdot e^{\gamma r}$ bezw. $\leqq A \cdot e^{\gamma r^\alpha}$ bezieht, entsprechend umzugestalten. Während nämlich bei der a. a. O. von mir benützten Methode die zur Behandlung der C_ν erforderlichen Hülfsmittel auch die entsprechenden Resultate für die c_ν lieferten und mir in Folge dessen eine vollkommene symmetrische Behandlung der beiden in Betracht kommenden Voraussetzungen am Platze schien, so hört diese Möglichkeit auf, wenn man bezüglich der C_ν den von Herrn Lüroth angegebenen kürzeren Weg einschlägt. Alsdann erweist es sich

aber als zweckmässiger, den Fall der c_ν mit Hülfe der schon von Herrn Hadamard[1]) benützten Schlussweise zu behandeln: man gewinnt dabei zugleich den Vortheil, von vornherein mit beliebigen complexen c_ν und der Voraussetzung $|\sum c_\nu x^\nu| \leqq A \cdot e^{\gamma^{\alpha} \cdot |x|}$ operiren zu können.[2]) Für die C_ν ist dies ohnehin der Fall, da ja die Voraussetzung $|\sum C_\nu x^\nu| \geqq A \cdot e^{\gamma^{\alpha} \cdot |x|}$ allemal a fortiori die folgende: $\sum |C_\nu| \cdot r^\nu \geqq A \cdot e^{\gamma^{\alpha} \cdot r}$ nach sich zieht.

Hiernach ergiebt sich nun für den Gesammtbeweis des a. a. O. p. 187 formulirten Haupt-Resultates die folgende ausserordentlich kurze und elementare Darstellung.

---

§ 1.

Hauptsatz A. *Ist für alle x, deren absoluter Betrag eine gewisse positive Zahl R übersteigt:*

$$\text{(A)} \qquad \left| \sum_0^\infty {}^\nu \, c_\nu x^\nu \right| \leqq A \cdot e^{\gamma \cdot |x|^\alpha} \quad (A > 0,\ \gamma > 0,\ \alpha > 0),$$

so hat man:

$$\text{(a)} \qquad \overline{\lim_{\nu = \infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \overline{\lim_{\nu = \infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_\nu|} \leqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Beweis. Aus (A) folgt auf Grund des Cauchy'schen Coefficientensatzes, dass:

$$|c_\nu x^\nu| \leqq A \cdot e^{\gamma \cdot |x|^\alpha} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots;\ |x| > R).$$

Setzt man:

$$|x| = \left(\frac{\nu}{\alpha\gamma}\right)^{\frac{1}{\alpha}} > R, \quad \text{also: } \nu > \alpha\gamma \cdot R^\alpha,$$

so wird:

---

[1]) Journ. de Math., Série IV, T. 9 (1893), p. 183.

[2]) Man erspart auf diese Weise die auf p. 186 meines Aufsatzes angestellte Betrachtung.

$$|c_\nu| \cdot \left(\frac{\nu}{\alpha\gamma}\right)^{\frac{\nu}{\alpha}} \leqq A \cdot e^{\frac{\nu}{\alpha}},$$

anders geschrieben:

$$\left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{\nu}{\alpha}} \cdot |c_\nu| \leqq A \cdot (\alpha\gamma)^{\frac{\nu}{\alpha}},$$

woraus durch Erhebung in die $\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\text{te}}$ Potenz und Uebergang zur Grenze $\nu = \infty$ unmittelbar die erste Form der Behauptung (a) resultirt.

Um die zweite zu gewinnen, braucht man nur auf die letzte Ungleichung die auf p. 170 angegebene Relation:

$$n!\, e^{n-1} < n^{n+1}, \quad \text{also: } n! < \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot n\, e$$

anzuwenden.[1]) Alsdann ergiebt sich die Beziehung:

---

[1]) Man kann sich, wie Herr Lüroth bemerkt hat, auch der Ungleichung:

$$n! < \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot (2n+1)$$

bedienen, welche aus der Reihe für e^n in folgender Weise resultirt. Man hat:

$$e^n = \sum_0^{n-1}{}_\nu \frac{n^\nu}{\nu!} + \sum_n^\infty{}_\nu \frac{n^\nu}{\nu!}$$

$$= s_n + r_n .$$

Da $\frac{n}{\nu} > 1$ für $\nu < n$, so nehmen in s_n die Terme beständig zu, sodass also:

$$s_n < n \cdot \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n^n}{(n-1)!}.$$

Andererseits hat man nach bekannter Schlussweise:

$$r_n < \frac{n^n}{n!} \sum_0^\infty{}_\nu \left(\frac{n}{n+1}\right)^\nu = \frac{n^n}{n!} \cdot (n+1),$$

und somit

$$e^n < \frac{n^n}{(n-1)!} + \frac{n^n}{n!}(n+1) = \frac{n^n}{n!}(2n+1),$$

also schliesslich:

$$n! < \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot (2n+1).$$

$$(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |c_\nu| \leqq A \cdot (\nu e)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot (\alpha\gamma)^{\frac{\nu}{\alpha}},$$

welche, in die $\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\text{te}}$ Potenz erhoben, für $\nu = \infty$ die zweite Form der Behauptung (a) liefert.

---

§ 2.

Hauptsatz B. *Ist für unendlich viele x, unter denen auch beliebig grosse vorkommen:*

$$\text{(B)} \qquad \left|\sum_0^\infty{}^\nu C_\nu x^\nu\right| \geqq A \cdot e^{\gamma \cdot |x|^\alpha} \quad (A > 0,\ \gamma > 0,\ \alpha > 0),$$

so hat man:

$$\text{(b)} \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|C_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |C_\nu|} \geqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Zum Beweise dieses Satzes dienen die folgenden zwei Hülfssätze:

Hülfssatz I. *Bedeutet r eine positive Veränderliche, $\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu r^\nu$ eine beständig convergirende Reihe mit reellen Coefficienten und ist für unendlich viele r, unter denen auch beliebig grosse vorkommen:*

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu r^\nu \geqq 0,$$

so giebt es unendlich viele Indices m_ν, für welche:

$$a_{m_\nu} \geqq 0$$

ausfällt.

Beweis. Angenommen die Behauptung wäre unrichtig, so müsste von einer bestimmten Stelle ab, etwa für $\nu \geqq n$, beständig

$$a_\nu < 0$$

sein. Sodann könnte man R so fixiren, dass für $r > R$:

$$|a_n| \cdot r^n > \left| \sum_0^{n-1} {}^{\nu} a_\nu r^\nu \right|,$$

und daher, wegen $a_n r^n < 0$:

$$\sum_0^n {}^{\nu} a_\nu r^\nu < 0 \quad (\text{für } r > R).$$

Da überdies für jedes r

$$\sum_{n+1}^\infty {}^{\nu} a_\nu r^\nu < 0$$

wäre, so hätte man schliesslich:

$$\sum_0^\infty {}^{\nu} a_\nu r^\nu < 0 \quad \text{für } \textit{jedes } r > R,$$

was der Voraussetzung widerspricht. —

Hülfssatz II.[1]) *Ist* $\sum_0^\infty {}^{\nu} b_\nu^\varkappa$, *wo* $\varkappa > 0$, *eine convergente Reihe mit nicht-negativen Gliedern,* δ *eine beliebig anzunehmende positive Zahl, so hat man:*

(1) Für $\varkappa > 1$: $\sum_0^\infty {}^{\nu} b_\nu^\varkappa < \left(\sum_0^\infty {}^{\nu} b_\nu \right)^\varkappa$.

(2) Für $\varkappa < 1$: $\sum_0^\infty {}^{\nu} b_\nu^\varkappa < \left(\frac{1+\delta}{\delta} \right)^{1-\varkappa} \cdot \left(\sum_0^\infty {}^{\nu} (1+\delta)^{\left(\frac{1}{\varkappa}-1\right)\nu} \cdot b_\nu \right)^\varkappa$.

Beweis. Setzt man: $\sum_0^\infty {}^{\nu} b_\nu = B$, so besteht für jedes ν die Beziehung:

$$\frac{b_\nu}{B} < 1$$

und daher auch, falls $\varkappa > 1$:

$$\left(\frac{b_\nu}{B} \right)^{\varkappa - 1} < 1,$$

also:

---

[1]) Es ist dies der hier ausschliesslich in Betracht kommende Theil des auf p. 179 von mir bewiesenen Hülfssatzes. Der hier gegebene, etwas kürzere Beweis rührt in der Hauptsache von Herrn Lüroth her.

$$\left(\frac{b_\nu}{B}\right)^\varkappa < \frac{b_\nu}{B}.$$

Substituirt man hier $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ in inf., so folgt durch Summation:

$$\frac{1}{B^\varkappa} \cdot \sum_0^\infty{}^\nu b_\nu^\varkappa < \frac{1}{B} \cdot \sum_0^\infty{}^\nu b_\nu = 1,$$

also in der That, wie unter (1) behauptet:

$$\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu^\varkappa < \left(\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu\right)^\varkappa \quad (\varkappa > 1).$$

Um die Richtigkeit von (2) zu beweisen, werde gesetzt:

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu = A, \quad \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu c_\nu = S,$$

wobei $\sum a_\nu$, $\sum a_\nu c_\nu$ irgend zwei convergente Reihen mit nicht-negativen Gliedern bedeuten sollen. Ist sodann für $\varkappa < 1$ auch $\sum a_\nu c_\nu^\varkappa$ convergent, so besteht die Identität:

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu c_\nu^\varkappa = \left(\frac{S}{A}\right)^\varkappa \cdot \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \cdot \left(\frac{A}{S} \cdot c_\nu\right)^\varkappa.$$

Nun ist aber[1]) für $\varkappa < 1$:

$$\left(\frac{A}{S} \cdot c_\nu\right)^\varkappa < 1 + \varkappa\left(\frac{A}{S} \cdot c_\nu - 1\right),$$

woraus durch Multiplication mit a_ν, Substitution von $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ in inf. und Summation sich ergiebt:

---

[1]) Die betreffende, für jedes $a > 0$, $\varkappa < 1$ geltende Ungleichung, nämlich:

$$a^\varkappa < 1 + \varkappa(a-1),$$

geht aus der auf p. 176 für $\varkappa > 1$ abgeleiteten Ungl. (29):

$$A^\varkappa > 1 + \varkappa(A-1)$$

ohne weiteres hervor, wenn man $A = a^{\frac{1}{\varkappa}}$ setzt und schliesslich $\frac{1}{\varkappa}$ statt $\varkappa$ schreibt.

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu \cdot \left(\frac{A}{S} \cdot c_\nu\right)^\varkappa < \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu + \varkappa\left(\frac{A}{S} \cdot \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu c_\nu - \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu\right) = \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu .$$

Mit Benützung dieser Ungleichung liefert die obige Identität die Beziehung:

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu c_\nu^\varkappa < \left(\frac{S}{A}\right)^\varkappa \cdot \sum_0^\infty{}^\nu a_\nu = \left(\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu\right)^{1-\varkappa} \cdot \left(\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu c_\nu\right)^\varkappa .$$

Setzt man noch:

$$a_\nu = \left(\frac{1}{1+\delta}\right)^\nu, \qquad a_\nu c_\nu^\varkappa = b_\nu^\varkappa,$$

also:

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu = \frac{1+\delta}{\delta}, \qquad c_\nu = a_\nu^{-\frac{1}{\varkappa}} \cdot b_\nu = (1+\delta)^{\frac{\nu}{\varkappa}} \cdot b_\nu ,$$

so folgt, wie unter (2) behauptet:

$$\sum_0^\infty{}^\nu b_\nu^\varkappa < \left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)^{1-\varkappa} \cdot \left(\sum_0^\infty{}^\nu (1+\delta)^{\left(\frac{1}{\varkappa}-1\right)\nu} \cdot b_\nu\right)^\varkappa \quad (\varkappa < 1). —$$

B e w e i s d e s H a u p t s a t z e s B. Es werde zunächst $\alpha = 1$ angenommen. Setzt man sodann $|x| = r$, so resultirt aus der Voraussetzung (B) a f o r t i o r i die folgende:

$$\sum_0^\infty{}^\nu |C_\nu| r^\nu \geqq A \cdot e^{\gamma r} = A \cdot \sum_0^\infty{}^\nu \frac{\gamma^\nu r^\nu}{\nu!},$$

sodass also für unendlich viele r, unter denen auch beliebig grosse, die Beziehung besteht:

$$\sum_0^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu!}(\nu! |C_\nu| - A\gamma^\nu) \cdot r^\nu \geqq 0 .$$

Man hat somit nach Hülfssatz I für u n e n d l i c h v i e l e m_ν:

$$m_\nu! \, |C_{m_\nu}| \geqq A \cdot \gamma^{m_\nu}$$

und wegen:

$$\left(\frac{m_\nu}{e}\right)^{m_\nu} > \frac{1}{m_\nu e} \cdot m_\nu! ,$$

zugleich auch:

$$\left(\frac{m_\nu}{e}\right)^{m_\nu} \cdot |C_{m_\nu}| > A \cdot \frac{1}{m_\nu e} \cdot \gamma^{m_\nu}.$$

Aus den beiden gefundenen Ungleichungen ergiebt sich sodann:

$$(\mathrm{b}') \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{\nu}{e} \cdot \sqrt[\nu]{|C_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu! \, |C_\nu|} \geqq \gamma,$$

eine Beziehung, welche mit der unter (b) behaupteten für $\alpha = 1$ zusammenfällt.

Ist jetzt α von 1 verschieden, so bringe man die aus der Voraussetzung (B) resultirende Beziehung:

$$\sum_0^\infty{}^\nu |C_\nu x^\nu| \geqq e^{\gamma \cdot |x|^\alpha}$$

durch die Substitution:

$$|x| = r^{\frac{1}{\alpha}}$$

auf die Form:

$$(\mathrm{C}) \qquad \sum_0^\infty{}^\nu |C_\nu| \cdot r^{\frac{\nu}{\alpha}} \equiv \sum_0^\infty{}^\nu (|C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu)^{\frac{1}{\alpha}} \geqq A \cdot e^{\gamma \cdot r}.$$

Im Falle $\alpha < 1$ hat man nun nach Ungl. (1) des Hülfssatzes II (für $\varkappa = \frac{1}{\alpha}$, $b_\nu = |C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu$):

$$\sum_0^\infty{}^\nu (|C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(\sum_0^\infty{}^\nu |C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

also, wenn man diese Ungleichung in die α^{te} Potenz erhebt, mit Berücksichtigung von Ungl. (C):

$$\sum_0^\infty{}^\nu |C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu > A^\alpha \cdot e^{\alpha \gamma r},$$

sodass sich mit Hülfe von (b′) unmittelbar ergiebt:

$$(\mathrm{b}_1) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{\nu}{e} \cdot \sqrt[\nu]{|C_\nu|^\alpha} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu! \, |C_\nu|^\alpha} \geqq \alpha \gamma \quad (\alpha < 1).$$

Im Falle $\alpha > 1$ hat man analog nach Ungl. (2) des Hülfssatzes II:

$$\sum_0^\infty {}^\nu (|C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(\frac{1+\delta}{\delta}\right)^{1-\frac{1}{\alpha}} \cdot \left(\sum_0^\infty {}^\nu (1+\delta)^{(\alpha-1)\nu} C_\nu^\alpha \cdot r^\nu\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

folglich, wenn man diese Ungleichung in die α^{te} Potenz erhebt, mit Berücksichtigung von Ungl (C), zunächst:

$$\sum_0^\infty {}^\nu (1+\delta)^{(\alpha-1)\nu} \cdot |C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu > \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^{\alpha-1} \cdot \left(\sum_0^\infty {}^\nu (|C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha$$

$$\geqq \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^{\alpha-1} A^\alpha \cdot e^{\alpha\gamma r}$$

und, wenn man noch r durch $(1+\delta)^{1-\alpha} \cdot r$ ersetzt:

$$\sum_0^\infty {}^\nu |C_\nu|^\alpha \cdot r^\nu > \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^{\alpha-1} \cdot A^\alpha \cdot e^{\alpha\gamma(1+\delta)^{1-\alpha} \cdot r}.$$

Hieraus würde sich mit Hülfe von (b′) zunächst ergeben:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{\nu}{e} \cdot \sqrt[\nu]{|C_\nu|^\alpha} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu!\, |C_\nu|^\alpha} \geqq (1+\delta)^{1-\alpha} \cdot \alpha\gamma,$$

und da $\delta > 0$ unbegrenzt verkleinert werden darf, schliesslich:

$$(\mathrm{b}_2) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{\nu}{e} \cdot \sqrt[\nu]{|C_\nu|^\alpha} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{\nu!\, |C_\nu|^\alpha} \geqq \alpha\gamma \quad (\alpha > 1).$$

Durch Erhebung der Relationen (b_1), (b_2) in die $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\text{te}}$ Potenz und Zusammenfassung mit Ungl. (b′) findet man also, wie behauptet:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(\frac{\nu}{e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \sqrt[\nu]{|C_\nu|} = \overline{\lim_{\nu=\infty}} \sqrt[\nu]{(\nu!)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot |C_\nu|} \geqq (\alpha\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}$$

für jedes positive α.

Die in den Hauptsätzen (A) und (B) enthaltenen Resultate stimmen genau mit den früher auf p. 187 angegebenen

überein. Daraus folgen dann die auf pp. 188, 189 zusammengestellten umkehrbaren Sätze mit Hülfe der nämlichen Schlüsse, welche a. a. O. zum Beweise der analogen Sätze von §§ 4 und 5 angewendet wurden.

24

Separat-Abdruck
aus den Sitzungsberichten der mathem.-phys. Klasse
der Kgl. Bayer. Akademie der Wissenschaften
Bd. XXXIII 1903 Heft I.

Zur Theorie der ganzen transcendenten Funktionen von endlichem Range.

Von

Alfred Pringsheim.

München 1903
Verlag der K. Akademie.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Die in den Sitzungsberichten erschienenen Abhandlungen sind nicht in einzelnen Abzügen ausgegeben.
(Preis des betr. Heftes der Sitzungsberichte 1 Mark 20 Pfennig).

Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Klasse. Bd. I—XXI in je 3 Abtheilungen, von 1832—1900.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse. Bd. I—XXX, von 1871—1900.

Bauer, Gustav. Kettenbruch Eulers. Abh. II. Kl. XI, 2. 1872 ℳ —.50
— Pascal's Theorem. Abh. II. Kl. XI, 3 1874 ℳ 1.—
— Gedächtnissrede auf Otto Hesse. 1882 ℳ —.60
— Von der Hesse'schen Determinante. Abh. II. Kl. XIV, 3. 1883 ℳ —.50
— Ueber einige Determinanten. Sitzb. 1872, p. 345—354.
— Ueber Kugelfunktionen. Sitzb. 1875, pag. 247—272.
— Ueber Systeme von Curven 6. Ordnung, auf welche das Normalenproblem bei Curven 2. Ordnung führt. Sitzb. 1878, p. 121—135.
— Ueber das geradlinige Hyperboloid. Sitzb. 1880, p. 635—640.
— Tripel von Geraden auf einem Hyperboloid. Sitzb. 1881, p. 241—248.
— Ueber die Hesse'sche Determinante der Hesse'schen Fläche einer Fläche dritter Ordnung. Sitzb. 1883, p. 320.
— Von den gestaltlichen Verhältnissen der parabolischen Curve auf einer Fläche dritter Ordnung. Sitzb. 1883. p. 320—343.
— Ueber d. Discriminante einer binären Form. Sitzb. 1886, p. 183—191.
— Ueber Flächen vierter Ordnung, deren geometrische Erzeugung sich an zwei Tetraeder knüpft. Sitzb. 1888, p. 337—354.
— Darstellung binärer Formen als Potenzsummen. Sitz. 1892, p. 3—20.
— Bemerkungen über zahlentheoretische Eigenschaften der Legendre'schen Polynome. Sitzb. 1894, p. 343—359.
— Von zwei Tetraëdern, welche einander zugleich eingeschrieben und umschrieben sind. Sitz. 1897, p. 359—366.

Brill, Al. Zur Theorie der geodätischen Linie etc. Abh. II. Kl. XIV, 2, 1883 ℳ 1.—
— Bestimmung der optischen Wellenfläche etc. 1883, 3 p. 423—435.
— Ueber rationale Curven und Regelflächen, 1885, 2 p. 276—287.
— Ueber die Multiplicität der Schnittpunkte von zwei ebenen Curven. Sitzb. 1888, p. 81—94.
— Die reducirte Resultante. Abh. II. Kl. XVII, 1889, p. 89—181. ℳ —.40.
— Ueber das Verhalten einer Funktion von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle. Sitzb. 1891, p. 207—220.

Du Bois-Reymond, Paul. Coefficienten der trigonometrischen Reihe. Abh. II. Kl. XII, 2. 1876 ℳ 3.60.
— Ueber den Gültigkeitsbereich der Taylor'schen Reihenentwicklung. Sitzb. 1876, p. 225—237.
— Ein allgemeiner Satz über die Integrirbarkeit von Funktionen integrirbarer Funktionen. Sitz. 1882, p. 240—242.

Dyck, W. Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln definirten Curvensysteme. Erste Mittheilung (mit 4 Taf.). Sitzb. 1891, p. 23—57; zweite Mittheilung (mit 3 Taf.). Sitzb. 1892, p. 101—138.
— Beiträge zur Potentialtheorie. I. Kronecker'sche Charakteristiken. Sitzb. 1895, p. 261—277.

Zur Theorie der ganzen transcendenten Funktionen von endlichem Range.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 7. Februar.*)

In einer früheren Mitteilung[1]) habe ich, anknüpfend an einen grundlegenden Aufsatz des Herrn Poincaré,[2]) die Beziehungen behandelt, welche zwischen dem infinitären Verhalten einer ganzen transcendenten Funktion $g(x) = \sum c_\nu x^\nu$ für $x = \infty$ und demjenigen der Koeffizienten c_ν für $\nu = \infty$ bestehen. Andererseits hängt aber, wie Herr Poincaré in jenem Aufsatze ebenfalls zuerst gezeigt hat, das infinitäre Anwachsen einer ganzen Funktion, welche unendlich viele Nullstellen a_ν mit konvergenter Summe $\sum \left| \frac{1}{a_\nu} \right|^{p+1}$ $(p \geqq 0)$ besitzt, wesentlich von p, d. h. schliesslich von der Dichtigkeit der Nullstellen ab. Eine vereinfachte Herleitung bezw. Vervollständigung gewisser in dieser Hinsicht bestehender Beziehungen bildet den Inhalt der folgenden Mitteilung.

Zur näheren Orientierung diene zunächst folgendes. Es sei ein für allemal $0 < |a_\nu| \leqq |a_{\nu+1}|$, $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = \infty$, und es werde angenommen, dass für irgend ein $\sigma > 0$ die Reihe $\sum \left| \frac{1}{a_\nu} \right|^\sigma$ konvergiere. Ist dann $\sigma = p + 1$ die kleinste ganze Zahl, für welche dies stattfindet, so soll das für jeden endlichen Bereich absolut und gleichmässig konvergente Produkt:

---

[1]) Dieser Berichte Bd. 32 (1902), p. 163; 295.

[2]) Bullet. de la soc. math. de France, T. 11 (1883), p. 136.

$$P(x) = \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{\sum_1^p{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\varkappa}$$

(wobei im Falle $p = 0$ der Exponent $\sum_1^p{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\varkappa$ durch 0 zu ersetzen ist) als eine ganze Funktion p^{ten} Ranges bezeichnet werden.[1]) Ein von Herrn Poincaré (a. a. O. p. 142) bewiesener Satz kann alsdann folgendermassen formuliert werden: Für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$ und alle x, deren absoluter Betrag eine passend gewählte Zahl R_ε übersteigt, hat man:

(A) $$|P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^{p+1}}.$$

Späterhin hat Herr Borel gezeigt,[2]) dass sogar die Beziehung besteht:

(B) $$|P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\sigma},$$

---

[1]) Ich gebrauche die Bezeichnung Rang in etwas anderem Sinne, wie diejenigen Autoren, welche jenen Ausdruck als völlig gleichwertig mit dem Laguerreschen „genre“ (Oeuvres compl. I, p. 167) verwenden. Hierunter versteht man bekanntlich, wenn:

$$G(x) = e^{g(x)} \cdot x^m \cdot \prod_1^\infty{}_\nu \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{\sum_1^p{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\varkappa}$$

und $g(x)$ vom Grade q, die grössere Zahl h der beiden Zahlen p und q (eventuell hat man $h = p = q$). Ich bezeichne diese Zahl h nach dem Vorgange von K. v. Schaper (Dissertat. Göttingen 1898, p. 24) als Höhe von $G(x)$, dagegen p (was auch q sein mag) als Rang von $G(x)$. Nur wenn $q \leqq p$, insbesondere, wenn $q = 0$ (in welchem Falle ich $G(x)$ eine primitive ganze Funktion nenne) fallen nach der von mir benützten Terminologie Rang und Höhe zusammen.

[2]) Leçons sur les fonctions entières (Paris, 1900) p. 56. Den sehr komplizierten Beweis hat neuerdings Herr E. Lindelöf durch einen überaus einfachen ersetzt: Acta soc. scient. Fennicae, T. 31 (1902), p. 4. Die weniger scharfe Relation (D) des Textes war schon etwas früher von Herrn Borel mit Andeutung eines Beweises ausgesprochen (Acta math. T. 20 [1897], p. 361) und zuerst von Herrn v. Schaper vollständig (wenn auch recht umständlich) bewiesen worden.

auch für $\sigma < p+1$, sofern nur $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma$ konvergiert. Da nun nach Voraussetzung $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{p+1}$ konvergiert, dagegen $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^p$ schon divergiert, so haben die Exponenten σ, für welche $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma$ konvergiert eine dem Intervalle $p \leqq \varrho \leqq p+1$ angehörige untere Grenze ϱ, sodass also für jedes $\varepsilon > 0$ zwar $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho+\varepsilon}$ konvergiert, $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho-\varepsilon}$ divergiert, während das Verhalten von $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho$ hierdurch noch in keiner Weise präjudiziert wird. Ich bezeichne diese Zahl ϱ als den zur Folge $\left(\frac{1}{a_\nu}\right)$ oder auch zur Funktion $P(x)$ gehörigen Grenz-Exponenten[1]) und spezialisiere diesen letzteren im Bedarfsfalle als Convergenz- bezw. Divergenz-Exponenten,[2]) je nachdem $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho$ konvergiert oder divergiert.[3]) Hiernach lässt sich der Inhalt von Ungl. (B) nunmehr folgendermassen formulieren:

Ist $P(x)$ vom Grenz-Exponenten ϱ, so hat man für jedes $\varepsilon > 0$ und $|x| > R_\varepsilon$:

(C) $$|P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\varrho},$$

falls ϱ Konvergenz-Exponent. Ist dies nicht der Fall oder zum mindesten nicht erwiesen, so kann man nur behaupten, dass für jedes $\delta > 0$ und $|x| > R_\delta$:

(D) $$|P(x)| < e^{|x|^{\varrho+\delta}}.$$ [4])

---

[1]) Bei Borel: „Ordre réel" de $P(x)$, späterhin nach dem Vorgange von Schaper, welcher ϱ als Konvergenz-Exponent bezeichnet, auch: „Exposant de convergence de la suite (a_ν)."

[2]) Bei Borel unterschieden als „ordre par excès" und „ordre par défaut."

[3]) Man hat also stets $\varrho > p$, wenn ϱ Konvergenz-Exponent, $\varrho < p+1$, wenn ϱ Divergenz-Exponent.

[4]) Da $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho+\delta}$ für jedes $\delta > 0$ konvergiert, so hätte man

Dieses Resultat ist nun aber, wie die Fassung des zweiten Teiles zeigt, ein unvollständiges. Denn die Konvergenz von $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho$ erscheint darnach zwar als eine hinreichende, aber keineswegs als eine notwendige Bedingung für die Gültigkeit der Beziehung (C). Dass aber tatsächlich auch im Falle der Divergenz von $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho$ die Beziehung (C) bestehen kann, wurde seinerzeit schon von Herrn Poincaré an einem speziellen Beispiele bemerkt (a. a. O. p. 139), nämlich:

$$P_1(x) = \prod_2^\infty{}^\nu \left(1 - \frac{x^2}{(\nu \cdot \lg \nu)^2}\right)$$

$$= \prod_2^\infty{}^\nu \left(1 + \frac{x}{\nu \cdot \lg \nu}\right) \cdot e^{-\frac{x}{\nu \cdot \lg \nu}} \cdot \left(1 - \frac{x}{\nu \cdot \lg \nu}\right) \cdot e^{\frac{x}{\nu \cdot \lg \nu}},$$

also einer Funktion vom Range $p = 1$, welche, wie die direkte Vergleichung mit:

$$\sin i\varepsilon x = i\varepsilon x \cdot \prod_1^\infty{}^\nu \left(1 + \frac{\varepsilon^2 x^2}{\nu^2 \pi^2}\right)$$

zeigt, der Bedingung genügt:

$$|P_1(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|},$$

---

auf Grund von Ungl. (A) an Stelle der Beziehung (D) zunächst eine solche von der Form:

$$\text{(D')} \qquad |P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^{\varrho + \delta}}.$$

Diese letztere Beziehung sagt aber in Wahrheit nicht mehr (und *eo ipso* nicht weniger) aus, als die etwas einfachere Relation (D). Denn ist diese letztere erfüllt, so hat man für alle hinlänglich grossen x auch:

$$|P(x)| < e^{|x|^{\varrho + \frac{\delta}{2}}} = e^{\left|\frac{1}{x}\right|^{\frac{\delta}{2}} \cdot |x|^{\varrho + \delta}}$$

und kann sodann für jedes $\varepsilon > 0$ nötigenfalls durch weitere Vergrösserung von $|x|$ stets erzielen, dass: $\left|\frac{1}{x}\right|^{\frac{\delta}{2}} \leqq \varepsilon$, also schliesslich:

$$|P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^{\varrho + \delta}}.$$

also derjenigen Beziehung, welche nach (A) zunächst einer Funktion vom Range $p = 0$ zukommt. Oder anders ausgesprochen: Obschon hier $\varrho = p = 1$ Divergenz-Exponent ist, so genügt $P_1(x)$ immerhin der lediglich für den Konvergenz-Fall bewiesenen Relation (C).

Die in der eben angedeuteten Richtung bestehende Lücke ist neuerdings durch die Herren P. Boutroux und E. Lindelöf im wesentlichen ausgefüllt worden, ja sogar hat das in Ungl. (C) enthaltene Resultat insofern noch eine Verschärfung erfahren, als an die Stelle des „beliebig kleinen" Faktors ε eine durch das infinitäre Verhalten der a_ν bedingte, gleichzeitig mit $x = \infty$ gegen Null konvergierende (oder auch ins Unendliche wachsende) Funktion von $|x|$ getreten ist. Herr Lindelöf hat nämlich den folgenden Satz bewiesen:[1])

Ist $p < \varrho < p + 1$ und von einem bestimmten n ab:

$$|a_n| > (n \cdot \lambda(n))^{\frac{1}{\varrho}}, \quad wo: \lambda(n) = (\lg n)^{\alpha_1} \cdot (\lg_2 n)^{\alpha_2} \cdots (\lg_\varkappa n)^{\alpha_\varkappa},$$

($\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\varkappa$ beliebig reell), so hat man für alle hinlänglich grossen x:

$$(C') \qquad |P(x)| < e^{A \cdot \lambda(|x|)^{-1} \cdot |x|^\varrho} \quad (A > 0).$$

Und Herr Boutroux hat darauf aufmerksam gemacht,[2]) dass dieses Resultat schon in einem von ihm zuvor mitgeteilten,[3]) etwas allgemeineren Satze enthalten sei. Durch die obige Verschärfung der Ungleichung (C) haben indessen die betreffenden Beweise so erhebliche Komplikationen erlitten, dass sie als elementare wohl kaum noch bezeichnet werden können. Zugleich hat sich gezeigt, dass die im Falle eines ganzzahligen ϱ auftretenden Schwierigkeiten,[4]) welche eigentlich den Anlass zur Einführung jener Verschärfung ge-

---

[1]) A. a. O. p. 24 (eine vorläufige Mitteilung schon: Comptes rendus, T. 133 [1901], p. 1279).

[2]) Comptes rendus, T. 134 (1902), p. 82.

[3]) Ebendas. T. 132 (1901), p. 252.

[4]) Vgl. § 3.

geben hatten, auf diesem Wege wohl einigermassen eingeschränkt, aber keineswegs prinzipiell behoben werden können. Auf der anderen Seite gewinnt man tatsächlich schon eine einigermassen befriedigende Einsicht in das Wesen der hier in Betracht kommenden Fragen, sobald man nur über die Gültigkeitsgrenzen der Ungleichung (C) möglichst genau orientiert ist. Im folgenden soll nun vollkommen elementar gezeigt werden, dass jene Gültigkeitsgrenzen im Falle eines nichtganzzahligen ϱ vollständig, im Falle eines ganzzahligen[1]) ϱ wenigstens teilweise festgestellt werden können, nämlich:

Die notwendige Bedingung für die Existenz der Beziehung (C) *besteht keineswegs in der* (*allemal hinreichenden*) *Konvergenz der Reihe* $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho$, *vielmehr lediglich in der Beziehung:*

$$\text{(E)} \qquad \lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho = 0.$$

Diese letztere ist zugleich auch hinreichend, wenn ϱ keine ganze Zahl. Ist dagegen ϱ eine ganze Zahl, $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho$ *divergent, so erscheint in Verbindung mit Gl.* (E) *als hinreichende Bedingung die Beziehung:* $\sum_1^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^\varrho = 0.$[2])

Der erste Teil dieses Satzes wird in § 1, der zweite für Funktionen vom Range 0 in § 2, für solche vom Range $p \geq 1$ in § 3 bewiesen. In § 4 werden dann die bekannten

---

[1]) Der Fall des Grenz-Exponenten (und zwar offenbar allemal Divergenz-Exponenten) $\varrho = 0$, welcher z. B. eintritt, wenn $a_\nu = a^\nu$ und $|a| < 1$, ist hier ein für allemal auszuschliessen, da alsdann die Möglichkeit der Bedingung (C) hinfällig wird.

[2]) Dabei wird also die Reihe $\sum \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^\varrho$ nur als bedingt konvergent vorausgesetzt.

Sätze über den Zusammenhang zwischen dem Grenz-Exponenten und dem infinitären Verhalten einer primitiven[1]) ganzen Funktion auf Grund des obigen Resultates entsprechend vervollständigt.

---

§ 1.

1. Lehrsatz. *Ist für jedes* $\varepsilon > 0$ *und alle hinlänglich grossen* x:

$$(1) \qquad |G(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^{\sigma}} \qquad (\sigma > 0),$$

und besitzt $G(x)$ *überhaupt unendlich viele Nullstellen* a_ν (*wo* $0 < |a_\nu| \leqq |a_{\nu+1}|$), *so hat man:*

$$(2) \qquad \lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\sigma} = 0.$$ [2])

Beweis. Da $G(x)$ die Nullstellen a_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) besitzen soll, überdies noch eventuell $x = 0$ zur λ-fachen Nullstelle haben kann, so muss sich $G(x)$ in die Form setzen lassen:

$$(3) \qquad G(x) = C \cdot e^{g(x)} \cdot x^{\lambda} \cdot \prod_{1}^{\infty}{}^{\nu} \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{g_\nu(x)},$$

wo $\lambda \geqq 0$, $g(x)$ eine ganze (rationale oder transcendente) Funktion ohne konstantes Glied (eventuell auch $g(x) \equiv 0$) und:

$$g_\nu(x) = \sum_{1}^{m_\nu}{}^{\varkappa} \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^{\varkappa}.$$ [3])

Wir bringen $G(x)$ zunächst auf die Form:

---

[1]) S. p. 1, Fussn. 3.

[2]) Modifikation eines bekannten Satzes von E. Schou (Comptes rendus, T. 125 [1897], p. 763) und elementarere Darstellung der a. a. O. benützten Beweis-Methode.

[3]) Die m_ν könnten auch mit ν ins Unendliche wachsen, d. h. es wird keineswegs vorausgesetzt, dass $G(x)$ von endlichem Range, vielmehr ergibt sich dies schliesslich als selbstverständliche Folgerung aus der zu beweisenden Relation (2).

$$G(x) = C \cdot x^{\lambda} \cdot \prod_1^n {}^{\nu} \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{g(x) + \sum_1^n {}^{\nu} g_\nu(x)} \cdot \prod_{n+1}^{\infty} {}^{\nu} \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{g_\nu(x)}$$

$$= \frac{C \cdot x^{\lambda}}{a_1 a_2 \ldots a_n} \prod_1^n {}^{\nu} (a_\nu - x) \cdot G_1(x),$$

wo $G_1(x)$ eine transcendente ganze Funktion, also wegen: $G(0) = 1$, von der Form:

$$G_1(x) = 1 + \sum_1^{\infty} {}^{\nu} c_\nu x^\nu,$$

und daher:

$$\text{(4)} \qquad \frac{G(x)}{C \cdot x^{\lambda} \cdot \prod_1^n {}^{\nu} (a_\nu - x)} = \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} (1 + \sum_1^{\infty} {}^{\nu} c_\nu x^\nu).$$

Auf Grund des Cauchyschen Koeffizienten-Satzes ergibt sich sodann für jedes $r > 0$:

$$\left| \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n} \right| < \underset{|x| = r}{\text{Max.}} \left| \frac{G(x)}{C \cdot x^{\lambda} \cdot \prod_1^n {}^{\nu} (a_\nu - x)} \right|$$

und für $r \geqq 1$ a fortiori:

$$\text{(5)} \qquad \begin{aligned} \left| \frac{1}{a_n} \right|^n &\leqq \frac{1}{\prod_1^n {}^{\nu} \left| r - |a_\nu| \right|} \cdot \underset{|x| = r}{\text{Max.}} \left| C^{-1} \cdot G(x) \right| \\ &< \frac{1}{\prod_1^n {}^{\nu} \left| r - |a_\nu| \right|} \cdot e^{\varepsilon \cdot r^{\sigma}}, \end{aligned}$$

da aus der Beziehung (1) offenbar auch die folgende resultiert:

$$\left| C^{-1} \cdot G(x) \right| < e^{\varepsilon \cdot |x|^{\sigma}}, \quad \text{etwa für } |x| > R_\varepsilon.$$

Setzt man jetzt:

$$r = (e + 1) \cdot |a_n|$$

und nimmt n gross genug, dass:

$$|a_n| > \frac{1}{e + 1} \cdot R_\varepsilon$$

wird, so geht Ungl. (5) in die folgende über:

$$(6)\qquad \left|\frac{1}{a_n}\right|^n < \frac{1}{\prod\limits_1^n{}^{\nu}\left((e+1)\,|\,a_n\,|-|\,a_\nu\,|\right)}\cdot e^{\varepsilon\cdot(e+1)^\sigma\cdot|\,a_n\,|^\sigma}.$$

Da aber für $\nu = 1, 2, \ldots (n-1)$:

$$(e+1)\cdot|\,a_n\,| - |\,a_\nu\,| \geqq (e+1)\cdot|\,a_n\,| - |\,a_n\,| = e\cdot|\,a_n\,|,$$

so folgt a fortiori:

$$\left|\frac{1}{a_n}\right|^n < \frac{1}{e^n\cdot|\,a_n\,|^n}\cdot e^{\varepsilon\cdot(e+1)^\sigma\cdot|\,a_n\,|^\sigma},$$

und daher:

$$e^n < e^{\varepsilon\cdot(e+1)^\sigma\cdot|\,a_n\,|^\sigma},$$

also:

$$(7)\quad n\cdot\left|\frac{1}{a_n}\right|^\sigma < \varepsilon\cdot(e+1)^\sigma \qquad \left(\text{falls: } |\,a_n\,| > \frac{1}{e+1}\cdot R_\varepsilon\right)$$

und, da ε unbegrenzt verkleinert werden kann, schliesslich:

$$\lim_{\nu=\infty} \nu\cdot\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma = 0, \qquad \text{q. e. d.}$$

2. Als Folgerung aus dem eben bewiesenen Satze ergibt sich unmittelbar:

Ist $P(x)$ eine primitive ganze Funktion mit dem Grenz-Exponenten $\varrho > 0$, so bildet die Relation:

$$(8)\qquad \lim_{\nu=\infty} \nu\cdot\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho = 0$$

eine notwendige Bedingung dafür, dass für jedes $\varepsilon > 0$ und $|\,x\,| > R_\varepsilon$:

$$(9)\qquad |\,P(x)\,| < e^{\varepsilon\cdot|\,x\,|^\varrho}.$$

Zugleich erkennt man, dass allemal, wenn für irgend ein $\sigma > 0$ die Beziehnung besteht:

$$(10)\qquad \lim_{\nu=\infty} \nu\cdot\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma = 0,$$

$\varrho \leqq \sigma$ sein muss. Denn aus (10) folgt durch Erhebung in die $\left(1+\frac{\delta}{\sigma}\right)$te Potenz:

$$\lim_{\nu=\infty} \nu^{1+\frac{\delta}{\sigma}} \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\sigma+\delta} = 0$$

und somit die Konvergenz von $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\sigma+\delta}$. Man kann daher den Grenz-Exponenten ϱ geradezu auch definieren als die untere Grenze der Zahlen σ, für welche eine Relation von der Form (10) besteht.

Daraus folgt weiter, dass für jedes (beliebig kleine) $\delta > 0$:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho-\delta} > 0$$

sein muss und somit, nach dem eben bewiesenen Satze, die Existenz der Beziehung:

$$|P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^{\varrho-\delta}} \qquad (\text{für jedes } \varepsilon > 0 \text{ und } |x| > R_\varepsilon)$$

ausgeschlossen erscheint. Da aber diese letztere Ungleichung wegen der Willkürlichkeit von δ nicht mehr und nicht weniger aussagt, als die folgende:[1])

$$|P(x)| < e^{|x|^{\varrho-\delta}} \qquad (\text{für jedes } \delta > 0 \text{ und } |x| > R'_\delta),$$

so ergibt sich noch das folgende Resultat:

Besitzt $P(x)$ den Grenz-Exponenten $\varrho > 0$, so ist für jedes $\delta > 0$ und unendlich viele x, unter denen auch beliebig grosse vorkommen:

$$(11) \qquad |P(x)| > e^{|x|^{\varrho-\delta}}.$$

---

[1]) S. p. 2, Fussn. 4.

§ 2.

Lehrsatz. *Ist* $\sum \left| \frac{1}{a_\nu} \right|$ *konvergent, also:*

$$P(x) = \prod_1^\infty {}^\nu \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \tag{12}$$

eine ganze Funktion vom Range 0, *und besteht für irgend ein* $\sigma \leqq 1$ *die Relation:*

$$\lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left| \frac{1}{a_\nu} \right|^\sigma = 0 \quad \left(\textit{anders geschrieben: } |a_\nu| > \nu^{\frac{1}{\sigma}}\right), \tag{13}$$

so hat man für jedes $\varepsilon > 0$ *und* $|x| > R_\varepsilon$:

$$|P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\sigma}. \tag{14}$$

Beweis. Wir trennen die beiden Fälle $\sigma = 1$ und $\sigma < 1$.

I. Sei zunächst $\sigma = 1$, in welchem Falle also wegen der Konvergenz von $\sum \left| \frac{1}{a_\nu} \right|$ und der Voraussetzung $|a_\nu| \leqq |a_{\nu+1}|$ die Bedingung (13) stets eo ipso erfüllt ist. Man hat für jedes $m > 1$:

$$\begin{aligned} |P(x)| &\leqq \prod_1^m {}^\nu \left(1 + \left|\frac{x}{a_\nu}\right|\right) \cdot \prod_{m+1}^\infty {}^\nu \left(1 + \left|\frac{x}{a_\nu}\right|\right) \\ &< e^{m \cdot \lg\left(1 + \left|\frac{x}{a_1}\right|\right)} \cdot e^{\sum_{m+1}^\infty {}^\nu \left|\frac{x}{a_\nu}\right|}. \end{aligned} \tag{15}$$

Wird jetzt nach Annahme eines beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl m so fixiert, dass:

$$\sum_{m+1}^\infty {}^\nu \left|\frac{1}{a_\nu}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{15a}$$

und darauf eine positive Zahl R_ε so bestimmt, dass:

$$\frac{m \cdot \lg\left(1 + \left|\frac{x}{a_1}\right|\right)}{|x|} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für } |x| > R_\varepsilon, \tag{15b}$$

so ergibt sich aus (15), wie behauptet:

$$|P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|}.$$[1]

II. Es sei jetzt $\sigma < 1$, und es werde gesetzt:

$$|a_\nu| = \alpha_\nu, \qquad |x| = r.$$

Wird $\delta > 0$ beliebig klein angenommen, so lässt sich auf Grund der Voraussetzung (13) ein m so fixieren, dass für $\nu > m$:

$$(16) \qquad \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma \equiv \frac{\nu}{\alpha_\nu^\sigma} < \delta, \quad \text{also: } \frac{1}{\alpha_\nu} < \left(\frac{\delta}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Man hat sodann:

$$|P(x)| < \prod_1^m{}^\nu \left(1 + \frac{r}{\alpha_\nu}\right) \cdot \prod_{m+1}^\infty{}^\nu \left(1 + \frac{r}{\alpha_\nu}\right)$$

$$< e^{m \cdot \lg\left(1 + \frac{r}{\alpha_1}\right)} \cdot \prod_{m+1}^\infty{}^\nu \left(1 + \left(\frac{\delta}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \cdot r\right)$$

und, wenn wiederum r_δ so fixiert wird, dass:

$$(17) \qquad \frac{m \cdot \lg\left(1 + \frac{r}{\alpha_1}\right)}{r^\sigma} < \delta \qquad \text{für } r > r_\delta,$$

auch:

$$(18) \qquad |P(x)| < e^{\delta \cdot r^\sigma} \cdot \prod_{m+1}^\infty{}^\nu \left(1 + \left(\frac{\delta}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \cdot r\right) \qquad \text{für } |x| > r_\delta.$$

Es bedeute nun n diejenige g a n z e Zahl, welche durch die Bedingungen bestimmt ist:

$$(19) \qquad n - 1 < \delta \cdot r^\sigma \leq n,$$

und es werde gesetzt:

---

[1]) Dieser Teil des Satzes enthält lediglich das in der Einleitung erwähnte P o i n c a r é sche Resultat (A) (für den Fall $p = 0$) und wird hier nur der Vollständigkeit halber bewiesen.

(20) $$\prod_{m+1}^{\infty}{}^{\nu}\left(1+\left(\frac{\delta}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\cdot r\right)=\prod_{m+1}^{n}{}^{\nu}\left(1+\left(\frac{\delta}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\cdot r\right)\cdot\prod_{n+1}^{\infty}{}^{\nu}\left(1+\left(\frac{\delta}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\cdot r\right).$$ [1]

Für das erste der rechts auftretenden Teil-Produkte ergibt sich alsdann mit Berücksichtigung von Ungl. (19):

$$\begin{aligned}\prod_{m+1}^{n}{}^{\nu}\left(1+\left(\frac{\delta\, r^{\sigma}}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right) &\leqq \prod_{m+1}^{n}{}^{\nu}\left(1+\left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right)\\ &< \prod_{1}^{n}{}^{\nu}\frac{n^{\frac{1}{\sigma}}+\nu^{\frac{1}{\sigma}}}{\nu^{\frac{1}{\sigma}}}\\ &< \left(\prod_{1}^{n}{}^{\nu}\frac{2^{\sigma}\cdot n}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}=\left(\frac{(2^{\sigma}\cdot n)^{n}}{n!}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\\ &< e^{\frac{1}{\sigma}\cdot 2^{\sigma}\cdot n}.\end{aligned}\tag{21}$$

Da aber nach (19): $n<\delta\cdot r^{\sigma}+1$, so folgt weiter:

$$\begin{aligned}\prod_{m+1}^{n}{}^{\nu}\left(1+\left(\frac{\delta\, r^{\sigma}}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right) &< e^{\frac{1}{\sigma}\cdot 2^{\sigma}(\delta\cdot r^{\sigma}+1)}\\ &= e^{\delta\cdot r^{\sigma}\left(\frac{1}{\sigma}\cdot 2^{\sigma}+\frac{2^{\sigma}}{\sigma\,\delta\cdot r^{\sigma}}\right)}\\ &< e^{\delta\cdot r^{\sigma}\left(\frac{1}{\sigma}\cdot 2^{\sigma}+1\right)},\end{aligned}\tag{22}$$

sofern nur:

$$\frac{2^{\sigma}}{\sigma\,\delta\cdot r^{\sigma}}\leqq 1,\quad \text{d. h. } r\geqq 2\cdot\left(\frac{1}{\sigma\,\delta}\right)^{\frac{1}{\sigma}}.\tag{22a}$$

---

[1] Sollten unter den r, welche der Bedingung $r>r_{\delta}$ genügen, solche vorkommen, für welche $n\leqq m$ ausfällt, so würde für diese das erste der beiden Teil-Produkte einfach wegfallen, während das zweite zunächst in $\prod_{m+1}^{\infty}{}^{\nu}$ übergehen würde und in der Folge *a fortiori* durch $\prod_{n+1}^{\infty}{}^{\nu}$ ersetzt werden könnte.

Für das zweite Teil-Produkt in Gl. (20) findet man zunächst:

$$(23) \qquad \prod_{n+1}^{\infty}{}^{\nu}\left(1+\left(\frac{\delta}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\cdot r\right) < e^{\delta^{\frac{1}{\sigma}} r\cdot \sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}}.$$

Nun ist aber:

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}} < \frac{\sigma}{1-\sigma}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\sigma}-1} \quad {}^{1)}$$

$$= \frac{\sigma}{1-\sigma}\cdot\left(\frac{r^{\sigma}}{n}\right)^{\frac{1}{\sigma}-1}\cdot r^{\sigma-1}$$

$$\leqq \frac{\sigma}{1-\sigma}\cdot\delta^{1-\frac{1}{\sigma}}\cdot r^{\sigma-1} \text{ (da: } \frac{r^{\sigma}}{n} \leqq \delta^{-1} \text{ nach (19)),}$$

---

[1]) Man hat bekanntlich für $\lambda > 0$:

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{1+\lambda} < \frac{1}{\lambda}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{\lambda},$$

wie am kürzesten mit Hilfe der Beziehung:

$$\sum_{n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{1+\lambda} < \int_{n}^{\infty}\frac{dx}{x^{1+\lambda}}$$

resultiert, aber auch leicht rein elementar mit Hilfe der Ungleichungen:

$$b^{\lambda}-a^{\lambda}\begin{cases} > \lambda\cdot a^{\lambda-1}\cdot(b-a) & (\lambda > 1) \\ > \lambda\cdot b^{\lambda-1}\,(b-a) & (0<\lambda<1)\end{cases}$$

(s. Sitz.-Ber. Bd. 32 [1902], p. 177) gefunden wird. Darnach ergibt sich nämlich zunächst:

$$\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\lambda}-\left(\frac{1}{\nu+1}\right)^{\lambda}\begin{cases} > \dfrac{\lambda}{\nu\cdot(\nu+1)^{\lambda}} & (\lambda>1) \\ > \dfrac{\lambda}{\nu^{\lambda}\cdot(\nu+1)} & (0<\lambda<1),\end{cases}$$

also schliesslich für jedes $\lambda > 0$:

$$\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\lambda}-\left(\frac{1}{\nu+1}\right)^{\lambda} > \lambda\cdot\left(\frac{1}{\nu+1}\right)^{1+\lambda},$$

und hieraus durch Summation:

$$\sum_{n+1}^{\infty}{}^{\nu}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{1+\lambda} = \sum_{n}^{\infty}{}^{\nu}\left(\frac{1}{\nu+1}\right)^{1+\lambda} < \frac{1}{\lambda}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{\lambda}.$$

so dass Ungleichung (23) in die folgende übergeht:

$$(24) \qquad \prod_{n+1}^{\infty}{}^{\nu} \left(1 + \left(\frac{\delta}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \cdot r\right) < e^{\delta \cdot r^{\sigma} \cdot \frac{\sigma}{1-\sigma}}.$$

Durch Einsetzen von (22), (24) in Ungl. (18) ergibt sich also:

$$(25) \qquad |P(x)| < e^{\delta \cdot r^{\sigma}\left(2 + \frac{1}{\sigma} \cdot 2^{\sigma} + \frac{\sigma}{1-\sigma}\right)} \text{ für: } r > r'_{\delta},$$

wenn r'_{δ} die grössere der beiden Zahlen r_{δ} und $2 \cdot \left(\frac{1}{\sigma\,\delta}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$ bedeutet. Wird also δ zu beliebig klein vorgeschriebenem $\varepsilon > 0$ so angenommen, dass:

$$\delta \cdot \left(2 + \frac{1}{\sigma} \cdot 2^{\sigma} + \frac{\sigma}{1-\sigma}\right) \leqq \varepsilon$$

und sodann das entsprechende r'_{δ} mit R_{ε} bezeichnet, so findet man, wie behauptet:

$$(26) \qquad |P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^{\sigma}} \quad \text{für: } |x| > R_{\varepsilon}.$$

---

§ 3.

1. Hilfssatz. *Ist:*

$$(27) \qquad E_p(u) = (1-u) \cdot e^{\sum_1^p {}^{\varkappa} \frac{1}{\varkappa} \cdot u^{\varkappa}} \qquad (p \geqq 1),$$

so hat man für jedes von Null verschiedene u und für $0 \leqq \alpha \leqq 1$:

$$(28) \qquad |E_p(u)| < e^{c_{p,\alpha} \cdot |u|^{p+\alpha}},$$

wo $c_{p,\alpha}$ eine lediglich von p und α abhängige positive Zahl bedeutet.[1])

---

[1]) Ein im wesentlichen dasselbe aussagender Satz bei E. Lindelöf, a. a. O., p. 2.

Beweis: Man hat zunächst für $|u| < 1$:

$$E_p(u) = e^{-\sum_1^\infty \varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot u^\varkappa + \sum_1^p \varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot u^\varkappa} = e^{-\sum_{p+1}^\infty \varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot u^\varkappa},$$

also für $0 < |u| < 1$:

$$|E_p(u)| < e^{\sum_{p+1}^\infty \varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot |u|^\varkappa}$$

$$< e^{\frac{1}{p+1} \cdot \sum_{p+1}^\infty \varkappa |u|^\varkappa} = e^{\frac{1}{p+1} \cdot \frac{|u|^{p+1}}{1-|u|}}.$$

Ist jetzt $|u| \leqq \frac{p}{p+1}$, also $1 - |u| \geqq \frac{1}{p+1}$, so wird:

$$|E_p(u)| < e^{|u|^{p+1}}$$

und, wegen $|u| < 1$, a fortiori:

$$|E_p(u)| < e^{|u|^{p+\alpha}} \qquad \text{für: } 0 \leqq \alpha \leqq 1. \tag{29}$$

Andererseits hat man:

$$|E_p(u)| < (1 + |u|) \cdot e^{\sum_1^p \varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot |u|^\varkappa}$$

$$< e^{|u| + \sum_1^p \varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot |u|^\varkappa}$$

$$= e^{\left\{\left|\frac{1}{u}\right|^{p+\alpha-1} + \sum_1^p \varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot \left|\frac{1}{u}\right|^{p+\alpha-\varkappa}\right\} \cdot |u|^{p+\alpha}}.$$

Ist jetzt $|u| > \frac{p}{p+1}$, also $\left|\frac{1}{u}\right| < \frac{p+1}{p}$, so wird:

$$|E_p(u)| < e^{c_{p,\alpha} \cdot |u|^{p+\alpha}}, \tag{30}$$

wo:

$$c_{p,\alpha} = \left(\frac{p+1}{p}\right)^{p+\alpha-1} + \sum_1^p \varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{p+1}{p}\right)^{p+\alpha-\varkappa}. \tag{30a}$$

Da im übrigen offenbar $c_{p,\alpha} > 1$, so ergibt sich mit Rücksicht auf Ungl. (29) die Gültigkeit von (30) für jedes von Null verschiedene u.

2. Hauptsatz. *Es sei p eine positive ganze Zahl, $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^p$ divergent, $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{p+1}$ konvergent, also:*

$$(31)\quad P(x) = \prod_1^\infty{}^\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right), \text{ wo: } E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right) = \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{\sum_1^p {}^\varkappa \frac{1}{\varkappa}\cdot\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\varkappa},$$

eine ganze Funktion vom Range p. Ist sodann für irgend ein dem Intervalle $p < \sigma \leqq p+1$ angehöriges σ:

$$(32)\quad \lim_{\nu=\infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\sigma = 0 \quad \left(\textit{anders geschrieben: } |a_\nu| > \nu^{\frac{1}{\sigma}}\right),$$

so hat man für jedes $\varepsilon > 0$ und $|x| > R_\varepsilon$:

$$(33)\qquad |P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\sigma}.$$

Dieses Resultat gilt auch noch im Falle $\sigma = p$, wenn $\sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{a_\nu}$ bedingt konvergiert und die Summe 0 besitzt.[1])

Beweis. Wir unterscheiden hier die 3 Fälle $\sigma = p+1$, $p < \sigma < p+1$, $\sigma = p$.

I. Sei zunächst $\sigma = p+1$, in welchem Falle wiederum die Voraussetzung (32) eo ipso erfüllt ist. Man hat, wenn m eine beliebige natürliche Zahl bedeutet, mit Benützung des zuvor bewiesenen Hilfssatzes:

$$|P(x)| = \left|\prod_1^m{}^\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right)\right| \cdot \left|\prod_{m+1}^\infty{}^\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right)\right|$$

$$< e^{c_{p,0}\cdot \sum_1^m{}^\nu \left|\frac{x}{a_\nu}\right|^p + c_{p,1}\cdot \sum_{m+1}^\infty{}^\nu \left|\frac{x}{a_\nu}\right|^{p+1}}$$

$$(34)\qquad = e^{\left(\frac{c_{p,0}}{|x|}\cdot \sum_1^m{}^\nu \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^p + c_{p,1} \sum_{m+1}^\infty{}^\nu \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{p+1}\right)\cdot |x|^{p+1}}.$$

---

[1]) Das letzte Resultat findet sich auch bei P. Boutroux: Comptes rendus, T. 134 (1902), p. 83.

Wird jetzt über m so verfügt, dass:

$$(34^a) \qquad c_{p,1} \cdot \sum_{m+1}^{\infty}{}^{\nu} \left| \frac{1}{a_\nu} \right|^{p+1} < \frac{\varepsilon}{2},$$

darauf R_ε so fixiert, dass für $|x| > R_\varepsilon$:

$$(34^b) \qquad \frac{c_{p,0}}{|x|} \cdot \sum_{1}^{m}{}^{\nu} \left| \frac{1}{a_\nu} \right|^{p} < \frac{\varepsilon}{2},$$

so ergibt sich, wie behauptet:

$$(35) \qquad |P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^{p+1}} \qquad \text{für: } |x| > R_\varepsilon. \text{[1]}$$

II. In dem nunmehr zu betrachtenden Falle: $p < \sigma < p+1$ möge gesetzt werden:

$$(36) \qquad \begin{cases} P(x) = \prod_{1}^{m}{}^{\nu} E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \cdot \prod_{m+1}^{n}{}^{\nu} E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \cdot \prod_{n+1}^{\infty}{}^{\nu} E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right), \\ \quad = P_1^{(m)}(x) \cdot P_{m+1}^{(n)}(x) \cdot P_{n+1}^{(\infty)}(x) \end{cases}$$

wo die ganzen Zahlen m, n genau dieselbe Bedeutung haben, wie in § 2 (s. Formel (16), (19) nebst Fussnote 1 p. 113), also:

$$(37) \qquad \nu \cdot \left| \frac{1}{a_\nu} \right|^{\sigma} \equiv \frac{\nu}{a_\nu^\sigma} < \delta \qquad \text{für } \nu > m,$$

$$(38) \qquad n - 1 < \delta \cdot r^\sigma \leqq n \qquad (r = |x|).$$

Man hat nun wiederum mit Benützung des Hilfssatzes (28):

$$|P_1^{(m)}(x)| < e^{c_{p,0} \cdot \sum_{1}^{m}{}^{\nu} \left(\frac{r}{a_\nu}\right)^p} = e^{\left(\frac{c_{p,0}}{r^{\sigma-p}} \cdot \sum_{1}^{m}{}^{\nu} \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p\right) \cdot r^\sigma},$$

also, wenn r_δ so fixiert wird, dass:

$$(39) \qquad \frac{c_{p,0}}{r^{\sigma-p}} \sum_{1}^{m}{}^{\nu} \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p < \delta \qquad \text{für: } r > r_\delta,$$

zunächst:

$$(40) \qquad |P_1^{(m)}(x)| < e^{\delta \cdot r^\sigma}.$$

---

[1]) Dieser Teil des Satzes enthält wiederum nur das Poincarésche Resultat (A).

Für das zweite in Gl. (36) auftretende Teil-Produkt ergibt sich:

$$\left| P_{m+1}^{(n)}(x) \right| \leqq \prod_{m+1}^{n}{}_{\nu} \left(1 + \frac{r}{a_\nu}\right) \cdot e^{\sum_1^p {}_{\varkappa} \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{r}{a_\nu}\right)^{\varkappa}}$$

$$(41) \qquad < \prod_{m+1}^{n}{}_{\nu} \left(1 + \left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right) \cdot \prod_{m+1}^{n}{}_{\nu}\, e^{\sum_1^p {}_{\varkappa} \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{\sigma}}} \quad \text{(nach Ungl. (37), (38)).}$$

Für das erste dieser Produkte wurde bereits in § 2, Ungl. (21) die Beziehung gefunden:[1])

$$(42) \qquad \prod_{m+1}^{n}{}_{\nu} \left(1 + \left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right) < e^{\frac{1}{\sigma} \cdot 2^{\sigma} \cdot n}.$$

Andererseits hat man:

$$\prod_{m+1}^{n}{}_{\nu}\, e^{\sum_1^p {}_{\varkappa} \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{\sigma}}} < e^{\sum_1^p {}_{\varkappa} \frac{1}{\varkappa} \cdot n^{\frac{\varkappa}{\sigma}} \sum_1^n {}_{\nu} \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{\sigma}}}.$$

Nun ist für $\varkappa \leqq p < \sigma$:

$$\sum_1^n {}_{\nu} \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{\sigma}} < \frac{1}{1 - \frac{\varkappa}{\sigma}} \cdot n^{1 - \frac{\varkappa}{\sigma}} \quad ^{2)},$$

und daher:

---

[1]) Die betreffende Herleitung ist gänzlich unabhängig davon, ob $\sigma < 1$ oder $\sigma \geqq 1$.

[2]) Aus der oben (p. 114, Fussn. 1) benützten Ungleichung:

$$b^\lambda - a^\lambda > \lambda \cdot b^{\lambda - 1}(b - a) \qquad (0 < \lambda < 1)$$

folgt:

$$\nu^\lambda - (\nu - 1)^\lambda > \lambda \cdot \nu^{\lambda - 1} = \lambda \cdot \left(\frac{1}{\nu}\right)^{1 - \lambda}$$

und hieraus durch Summation:

$$\sum_1^n {}_{\nu} \left(\frac{1}{\nu}\right)^{1-\lambda} < \frac{1}{\lambda} \cdot n^\lambda.$$

$$\sum_1^p{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot n^{\frac{\varkappa}{\sigma}} \sum_1^n{}_\nu \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{\sigma}} < \sum_1^p{}_\varkappa \frac{\sigma}{\varkappa \cdot (\sigma - \varkappa)} \cdot n$$

$$< \frac{\sigma}{\sigma - p} \cdot n$$

$$\left(\text{wegen: } \sum_1^p{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa \cdot (\sigma - \varkappa)} < p \cdot \frac{1}{p \cdot (\sigma - p)} = \frac{1}{\sigma - p}\right)$$

also:

$$(43) \qquad \prod_{m+1}^n{}_\nu \, e^{\sum_1^p{}_\varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{\sigma}}} < e^{\frac{\sigma}{\sigma - p} \cdot n}.$$

Durch Einsetzen von (42), (43) in Ungl. (41) ergibt sich somit:

$$(44) \qquad \left| P_{m+1}^{(n)}(x) \right| < e^{n\left(\frac{1}{\sigma} \cdot 2^\sigma + \frac{\sigma}{\sigma - p}\right)}.$$

Wegen $n < \delta \cdot r^\sigma + 1$ (s. Ungl. (38)) hat man sodann:

$$n\left(\frac{1}{\sigma} \cdot 2^\sigma + \frac{\sigma}{\sigma - p}\right) < (\delta \cdot r^\sigma + 1)\left(\frac{1}{\sigma} \cdot 2^\sigma + \frac{\sigma}{\sigma - p}\right)$$

$$= \delta \cdot r^\sigma \left(\frac{1}{\sigma} \cdot 2^\sigma + \frac{\sigma}{\sigma - p} + \frac{2^\sigma \cdot (\sigma - p) + \sigma^2}{\sigma \cdot (\sigma - p) \cdot \delta \cdot r^\sigma}\right)$$

$$< \delta \cdot r^\sigma \left(\frac{1}{\sigma} \cdot 2^\sigma + \frac{\sigma}{\sigma - p} + 1\right),$$

wenn:

$$(45) \quad \frac{2^\sigma \cdot (\sigma - p) + \sigma^2}{\sigma\,(\sigma - p) \cdot \delta \cdot r^\sigma} \leqq 1, \text{ d. h. } r \geqq \left(\frac{2^\sigma \cdot (\sigma - p) + \sigma^2}{\sigma \cdot (\sigma - p) \cdot \delta}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

und daher:

$$(46) \qquad \left| P_{m+1}^{(n)}(x) \right| < e^{\delta \cdot r^\sigma \left(\frac{1}{\sigma} \cdot 2^\sigma + \frac{\sigma}{\sigma - p} + 1\right)},$$

wenn r der Bedingung (45) genügt.

Schliesslich findet man für das dritte in Gl. (36) auftretende Teil-Produkt:

$$(47)\qquad |P_{n+1}^{(x)}(x)| < e^{c_{p,1}\cdot\sum_{n+1}^{\infty}\nu\left(\frac{r}{a_\nu}\right)^{p+1}} \quad \text{(s. Ungl. (28))}$$
$$< e^{c_{p,1}\cdot r^{p+1}\cdot\sum_{n+1}^{\infty}\nu\left(\frac{\delta}{\nu}\right)^{\frac{p+1}{\sigma}}} \quad \text{(s. Ungl. (37))}.$$

Nun ist wiederum:

$$\sum_{n+1}^{\infty}\nu\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{\sigma}} < \frac{\sigma}{p+1-\sigma}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{p+1}{\sigma}-1} \quad \text{(s. p. 114, Fussn. 1))}$$
$$= \frac{\sigma}{p+1-\sigma}\cdot\left(\frac{r^\sigma}{n}\right)^{\frac{p+1}{\sigma}-1}\cdot r^{\sigma-(p+1)}$$
$$\leqq \frac{\sigma}{p+1-\sigma}\cdot\delta^{1-\frac{p+1}{\sigma}}\cdot r^{\sigma-(p+1)} \quad \left(\text{wegen: } \frac{r^\sigma}{n}\leqq\delta^{-1} \text{ nach (38)}\right),$$

so dass sich ergibt:

$$(48)\qquad |P_{n+1}^{(\infty)}(x)| < e^{\delta\, r^\sigma\cdot\frac{c_{p,1}\cdot\sigma}{p+1-\sigma}}.$$

Durch Zusammenfassung der Resultate (40), (46), (48) liefert also Gl. (36) die Beziehung:

$$(49)\qquad |P(x)| < e^{\delta\cdot r^\sigma\left(2+\frac{1}{\sigma}\cdot 2^\sigma+\frac{\sigma}{\sigma-p}+\frac{c_{p,1}\cdot\sigma}{p+1-\sigma}\right)} \quad \text{für: } r > r_\delta',$$

wenn r_δ' die grössere der beiden Zahlen r_δ und $\left(\frac{2^\sigma\cdot(\sigma-p)+\sigma^2}{\sigma(\sigma-p)\cdot\delta}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$ bedeutet.

Wird also $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgeschrieben und δ so angenommen, dass:

$$\delta\left(2+\frac{1}{\sigma}\cdot 2^\sigma+\frac{\sigma}{\sigma-p}+\frac{c_{p,1}\cdot\sigma}{p+1-\sigma}\right)\leqq\varepsilon,$$

so folgt, wenn man noch R_ε statt r_δ' schreibt:

$$(50)\qquad |P(x)| < e^{\varepsilon\cdot|x|^\sigma} \quad \text{für: } |x| > R_\varepsilon.$$

III. Sei jetzt $\sigma = p$, also:

$$(51)\qquad \lim_{\nu=\infty}\nu\cdot\left|\frac{1}{a_\nu}\right|^p = \lim_{\nu=\infty}\frac{\nu}{a_\nu^p} = 0$$

und ausserdem: $\sum_1^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p = 0$. Es mag dann m und n wiederum die frühere Bedeutung haben, so dass also:

$$\nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^p = \frac{\nu}{a_\nu^p} < \delta \text{ für: } \nu > m, \tag{52}$$

$$n - 1 < \delta \cdot r^p \leqq n. \tag{53}$$

Ferner möge n' eine Zahl von der Beschaffenheit bedeuten, dass für $n \geqq n'$:

$$\left|\sum_1^n{}^\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p\right| < \delta, \tag{54}$$

was offenbar, auf Grund der Voraussetzung: $\sum_1^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p = 0$, durch passende Wahl von n' stets erzielt werden kann. Zugleich soll dann die in Ungl. (53) auftretende Zahl $n \geqq n'$ $\left(\text{d. h. } r \geqq \left(\frac{n' - 1}{\delta}\right)^{\frac{1}{p}}\right)$ angenommen werden.

Man hat nun wiederum:

$$P(x) = \prod_1^m{}^\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \cdot \prod_{m+1}^n{}^\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \cdot \prod_{n+1}^\infty{}^\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right)$$

$$= e^{\sum_1^n{}^\nu \frac{1}{p}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^p} \cdot \prod_1^m{}^\nu E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \cdot \prod_{m+1}^n{}^\nu E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \cdot \prod_{n+1}^\infty{}^\nu E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right), \tag{55}$$

wo:

$$E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right) = \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) \cdot e^{\sum_1^{p-1}{}^\varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\varkappa},$$

und im Falle $p = 1$ der Exponential-Faktor durch die Einheit zu ersetzen ist.

Aus (54) folgt dann zunächst, dass:

$$\left|e^{\sum_1^n{}^\nu \frac{1}{p}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^p}\right| < e^{\frac{1}{p} \cdot \delta \cdot r^p}. \tag{56}$$

Für das erste Teil-Produkt in Gl. (55) ergibt sich analog wie früher (s. Ungl. (34), (34^b) bezw., im Falle $p-1=0$, Ungl. (15), (15^b)):

$$(57) \qquad \left| \prod_1^m{}^{\nu} E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \right| < e^{\delta \cdot r^p} \quad \text{etwa für: } r > r_\delta.$$

Für das zweite Teil-Produkt hat man mit Benützung von Ungl. (52), (53) (vgl. die analoge Beziehung (41)):

$$(58) \qquad \left| \prod_{m+1}^n{}^{\nu} E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \right| < \prod_1^n{}^{\nu} \left(1 + \left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{1}{p}}\right) \cdot e^{\sum_1^{p-1}{}^{\varkappa} \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{p}}}.$$

Dabei ergibt sich genau wie früher (cf. Ungl. (21), (42)):

$$(59) \qquad \prod_1^n{}^{\nu} \left(1 + \left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{1}{p}}\right) < e^{\frac{1}{p} \cdot 2^p \cdot n},$$

und andererseits im Falle $p > 1$:

$$(60) \qquad \prod_1^n{}^{\nu} e^{\sum_1^{p-1}{}^{\varkappa} \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{p}}} = e^{\sum_1^{p-1}{}^{\varkappa} \frac{1}{\varkappa} \cdot n^{\frac{\varkappa}{p}} \cdot \sum_1^n{}^{\nu} \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{p}}}$$
$$< e^{\sum_1^{p-1}{}^{\varkappa} \frac{p}{\varkappa \cdot (p-\varkappa)} \cdot n}$$

(wegen: $\sum_1^n{}^{\nu} \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\varkappa}{p}} < \frac{p}{p-\varkappa} \cdot n^{1-\frac{\varkappa}{p}}$ für $\varkappa < p$, s. p. 119, Fussnote 2)). Nun ist:

$$(61) \qquad \sum_1^{p-1}{}^{\varkappa} \frac{p}{\varkappa\,(p-\varkappa)} = \sum_1^{p-1}{}^{\varkappa} \left(\frac{1}{\varkappa} + \frac{1}{p-\varkappa}\right) = 2 \sum_1^{p-1}{}^{\varkappa} \frac{1}{\varkappa} < 2 \lg p,$$

so dass die Beziehung (58) mit Benützung von Ungl. (59)–(61) in die folgende übergeht:

$$(62) \qquad \left| \prod_{m+1}^n{}^{\nu} E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \right| < e^{n\left(\frac{1}{p} \cdot 2^p + \lg p\right)}.$$

Diese zunächst unter der Voraussetzung $p > 1$ abgeleitete Ungleichung gilt dann, wie leicht zu sehen, auch noch für

$p = 1$, da in diesem Falle die Exponential-Faktoren auf der rechten Seite von Ungl. (58) wegfallen und andererseits, wegen $\lg 1 = 0$, die rechte Seite von Ungl. (62) dann mit derjenigen von (59) identisch wird.

Wegen $n < \delta \cdot r^p + 1$ (s. Ungl. (53)) hat man sodann:

$$n\left(\frac{1}{p} \cdot 2^p + \lg p\right) < (\delta \cdot r^p + 1)\left(\frac{1}{p} \cdot 2^p + \lg p\right)$$
$$= \delta \cdot r^p \left(\frac{1}{p} \cdot 2^p + \lg p + \frac{2^p + p \cdot \lg p}{p \cdot \delta \cdot r^p}\right)$$
$$< \delta \cdot r^p \left(\frac{1}{p} \cdot 2^p + \lg p + 1\right),$$

wenn:

$$\text{(63)} \qquad \frac{2^p + p \cdot \lg p}{p \cdot \delta \cdot r^p} \leqq 1, \quad \text{d. h. } r \geqq \left(\frac{2^p + p \cdot \lg p}{p \cdot \delta}\right)^{\frac{1}{p}},$$

und daher:

$$\text{(64)} \qquad \left| \prod_{m+1}^{n}{}^{\nu} E_{p-1}\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \right| < e^{\delta \cdot r^p \left(\frac{1}{p} \cdot \;^{p} + \lg p + 1\right)},$$

wenn r der Bedingung (63) genügt.

Auf das l e t z t e der in Gl. (55) auftretenden Teil-Produkte lässt sich ohne weiteres die Ungleichung (48) anwenden, da, wie unmittelbar einleuchtet, die betreffenden Schlüsse auch noch für $\sigma = p$ giltig bleiben. Darnach wird also:

$$\text{(65)} \qquad \left| \prod_{n+1}^{\infty}{}^{\nu} E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right) \right| < e^{\delta \cdot r^p \cdot p \cdot c_{p,1}}.$$

Durch Zusammenfassung der in Ungl. (56), (57), (64), (65) enthaltenen Resultate liefert also Gl. (55) die Beziehung:

$$\text{(66)} \qquad |P(x)| < e^{\delta \cdot r^p \left(2 + \frac{1}{p}(1 + 2^p) + \lg p + p \cdot c_{p,1}\right)} \quad \text{für: } r > r'_\delta,$$

wenn r'_δ die grössere der beiden Zahlen r_δ und $\left(\frac{2^p + p \cdot \lg p}{p \cdot \delta}\right)^{\frac{1}{p}}$ bezeichnet.

Man findet also schliesslich wiederum:

$$(67) \qquad |P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^p} \quad \text{für: } |x| > R_\varepsilon,$$

wenn δ zu beliebig vorgeschriebenem ε entsprechend gewählt und $r'_\delta = R_\varepsilon$ gesetzt wird. —

3. Die in dem zuletzt behandelten Falle auftretende Bedingung $\sum_1^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p = 0$ (bei gleichzeitiger Divergenz von $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^p$) ist offenbar allemal erfüllt, wenn:

$$(68) \qquad a_{2\nu} = e^{\frac{\pi i}{p}} \cdot a_{2\nu-1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots);$$

desgl. für ungerade p, wenn:

$$(69) \qquad a_{2\nu} = -a_{2\nu-1} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

wobei im letzteren Falle ausser $\sum_1^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p$ auch allgemein $\sum_1^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^{2\lambda+1}$ $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$ verschwindet. Bezeichnet man ferner mit α eine primitive $(p+1)^{\text{te}}$ Einheitswurzel, etwa:

$$\alpha = e^{\frac{2\pi i}{p+1}},$$

und setzt sodann:

$$(70) \qquad \begin{cases} a_{(p+1)\nu+\lambda+1} = \alpha^{-\lambda} \cdot a_{(p+1)\nu+1} \\ \qquad\qquad\quad = \alpha^{-\lambda} \cdot b_{\nu+1} \end{cases} \begin{pmatrix} \nu = 0, 1, 2, \ldots \text{ in inf.} \\ \lambda = 0, 1, 2, \ldots p \end{pmatrix},$$

so hat man (wegen: $\sum_0^p{}^\lambda \alpha^{\pm\varkappa\lambda} = 0$ für $1 \leqq \varkappa \leqq p$) offenbar:

$$\sum_1^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^\varkappa = 0 \text{ für } \varkappa = 1, 2, \ldots p.$$

Es wird daher

$$(71) \qquad \begin{cases} P(x) = \prod_1^\infty{}^\nu \prod_0^p{}^\lambda \left(1 - \frac{\alpha^\lambda x}{b_\nu}\right) \cdot e^{\sum_1^p{}^\varkappa \frac{1}{\varkappa} \cdot \left(\frac{\alpha^\lambda x}{b_\nu}\right)^\varkappa} \\ \qquad = \prod_1^\infty{}^\nu \left(1 - \frac{x^{p+1}}{b_\nu^{p+1}}\right), \end{cases}$$

falls $\sum \left| \frac{1}{b_\nu} \right|^p$ divergiert, jedoch immerhin:

$$|b_\nu| > \nu^{\frac{1}{p}} \quad \left(\text{z. B. } b_\nu = [(\nu + 1) \lg (\nu + 1)]^{\frac{1}{p}}\right),$$

eine ganze Funktion $(p+1)^{\text{ten}}$ Ranges darstellen, welche für hinlänglich grosse x der Beziehung genügt:

$$|P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^p}. \tag{72}$$

Das in der Einleitung erwähnte Poincarésche Beispiel $\Pi \left(1 - \frac{x^2}{(\nu \lg \nu)^2}\right)$ fällt offenbar gleichzeitig unter den eben bezeichneten, wie auch unter den durch Gl. (69) charakterisierten Typus.

Im übrigen sei über den vorliegenden, in dem vorausgehenden Beweise unter III behandelten Fall $\sigma = p$ noch folgendes bemerkt. Bie Bedingung $\sum_1^\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p = 0$ in Verbindung mit der als notwendig erkannten: $|a_\nu| > \nu^{\frac{1}{p}}$ erscheint zunächst zwar hinreichend, aber keineswegs notwendig für das Zustandekommen der Beziehung (72). Immerhin wird man sagen dürfen, dass sie nahezu den Charakter einer notwendigen Bedingung besitzt; oder etwas genauer ausgedrückt, dass zum mindesten eine Bedingung ganz ähnlicher Art zu der allemal notwendigen: $|a_\nu| > \nu^{\frac{1}{p}}$ hinzukommen muss, wenn Ungl. (72) erfüllt sein soll.

Während nämlich im Falle $\sigma > p$ jeder einzelne Primfaktor $E_p\left(\frac{x}{a_\nu}\right)$, also auch jedes endliche Produkt solcher Faktoren nur wesentlich schwächer ins Unendliche wachsen kann, wie $e^{\varepsilon \cdot |x|^\sigma}$ (nämlich nur so, wie $e^{c \cdot |x|^p}$, wo c endlich) und naturgemäss die Erhaltung dieser Eigenschaft für das betreffende unendliche Produkt lediglich von dem infinitären Verhalten der $|a_\nu|$ abhängt, so wächst im Falle $\sigma = p$ schon jeder einzelne Primfaktor wesentlich stärker ins Unend-

liche, wie $e^{\varepsilon \cdot |x|^p}$ (nämlich wiederum, wie $e^{c \cdot |x|^p}$) und die Beziehung $|P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^p}$ wird dann überhaupt nur dadurch ermöglicht, dass die von den einzelnen Prim-Faktoren herrührenden Beträge von der Form: $e^{\frac{1}{p} \cdot \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^p}$ sich in ihrer Wirkung gegenseitig zerstören: das letztere geschieht in der Tat, wenn: $\sum_1^\infty {}^\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^p = 0$ wird. Ob die Relation $|P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^p}$ noch unter anderen Bedingungen zu Stande kommen kann, erscheint fraglich, wenn auch nicht besonders wahrscheinlich. Jedenfalls aber müssten derartige Bedingungen, geradeso wie die Bedingung $\sum_1^\infty {}^\nu \frac{1}{a_\nu} = 0$, allemal so geartet sein, dass sie erstens nicht nur von den absoluten Beträgen, sondern auch von den Argumenten der a_ν abhängen, und dass sie zweitens nicht nur auf das infinitäre Verhalten der a_ν, sondern auf die Gesamtheit aller a_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ sich erstrecken. Denn offenbar wird hier (im Gegensatze zu dem allgemeinen Falle $\sigma > p$) allemal jeder einzelne Primfaktor für das Zustandekommen der Beziehung $|P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^p}$ in dem Grade massgebend sein, dass schon durch Weglassung oder Abänderung irgendwelcher einzelnen Primfaktoren jene Beziehung hinfällig werden kann.

Um diese Bemerkung durch ein möglichst einfaches Beispiel zu illustrieren, werde etwa in dem Ausdrucke (71) $p = 2$ gesetzt und die b_ν reell, positiv angenommen (z. B. $b_\nu = [(\nu+1)\lg(\nu+1)]^{\frac{1}{2}}$), so dass also:

$$(73)\quad \begin{cases} P(x) = \prod_1^\infty {}^\nu \prod_0^2 {}^\lambda \left(1 - \dfrac{\alpha^\lambda x}{b_\nu}\right) \cdot e^{\frac{\alpha^\lambda x}{b_\nu} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\alpha^\lambda x}{b_\nu}\right)^2} \quad (\text{wo: } \alpha^3 = 1) \\[2ex] \quad\;\; = \prod_1^\infty {}^\nu \left(1 - \dfrac{x^3}{b_\nu^3}\right). \end{cases}$$

Entfernt man jetzt aus $P(x)$ lediglich die zwei von den Wurzeln αb_1, $\alpha^2 b_1$ herrührenden Faktoren, so entsteht:

$$(74)\qquad P_1(x) = \left(1 - \frac{x}{b_1}\right) \cdot e^{\frac{x}{b_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{b_1}\right)^2} \cdot \prod_2^\infty{}^\nu \left(1 - \frac{x^3}{b^3}\right),$$

und man findet unmittelbar für $x = -r$ (wo r reell, positiv):

$$(75)\quad P_1(-r) = \left(1 + \frac{r}{b_1}\right) \cdot e^{-\frac{r}{b_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{b_1}\right)^2} \cdot \prod_2^\infty{}^\nu \left(1 + \frac{r^3}{b_\nu^3}\right) > e^{c \cdot r^2}.$$

---

§ 4.

1. Es sei jetzt $\varrho \geq 0$ der Grenz-Exponent von $P(x)$, also zum mindesten für jedes $\delta > 0$:

$$(76)\qquad \lim_{\nu = \infty} \nu \cdot \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{\varrho + \delta} = 0 \quad (\text{vgl. § 1, Nr. 2}).$$

Alsdann ergibt sich aus den Sätzen von § 2, § 3, dass für alle hinlänglich grossen x:

$$(77)\qquad \begin{aligned} |P(x)| &< e^{\varepsilon \cdot |x|^{\varrho + \delta}} \\ &< e^{|x|^{\varrho + \delta}}. \end{aligned}$$

Diese Beziehung kann dann durch die engere ersetzt werden:

$$(77^a)\qquad |P(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\varrho},$$

wenn $|a_\nu| > \nu^{\frac{1}{\varrho}}$ und ϱ weder Null, noch eine ganze Zahl; desgleichen im Falle eines ganzzahligen ϱ, wenn $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho$ konvergiert, oder wenn $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho$ zwar divergiert, aber $a_\nu > \nu^{\frac{1}{\varrho}}$ und $\sum_1^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{a_\nu}\right)^\varrho = 0$. Umgekehrt ist stets $|a_\nu| > \nu^{\frac{1}{\varrho}}$, wenn $P(x)$ der Beziehung (77^a) genügt.

Andererseits hat man nach § 1, Ungl. (11) stets:

$$(78)\qquad |P(x)| > e^{|x|^{\varrho - \delta}},$$

für jedes $\delta > 0$ und unendlich viele x, unter denen auch beliebig grosse vorkommen.

2. Um diese Resultate kürzer formulieren zu können, führen wir die folgenden Bezeichnungen ein. Genügt eine ganze Funktion $G(x)$ für jedes $\delta > 0$ den beiden Bedingungen:

(79) $|G(x)| < e^{|x|^{\mu+\delta}}$ für alle $|x| > R_\delta$

(80) $|G(x)| > e^{|x|^{\mu-\delta}}$ für unendlich viele beliebig grosse x,

so soll gesagt werden, $G(x)$ sei von der Ordnung μ.[1])

Man bemerke zunächst, dass die durch Ungl. (79) statuierte obere Schranke von $|G(x)|$ merklich erniedrigt werden kann, ohne dass deshalb Ungl. (80) hinfällig zu werden braucht. Insbesondere kann, wenn $\mu > 0$, für jedes (noch so kleine) $\varepsilon > 0$ und $|x| > R_\varepsilon$:

(79[a]) $$|G(x)| < e^{\varepsilon \cdot |x|^\mu}$$

werden und $|G(x)|$ dennoch der Ungl. (80) genügen. Denn, wie klein auch $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ vorgeschrieben sein mögen, so hat man stets:

$$\varepsilon \cdot |x|^\delta > 1 \quad \text{für: } |x| > R = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\delta}},$$

und sodann:

$$\varepsilon \cdot |x|^\mu > |x|^{\mu-\delta},$$

so dass also die Existenz der Ungleichungen (79[a]) und (80) sich keineswegs gegenseitig ausschliesst. Ist nun $G(x)$ durch die beiden Ungleichungen (79[a]) und (80) charakterisiert, so wollen wir sagen: $G(x)$ gehöre dem Minimal-Typus der Ordnung μ, kürzer dem Minimal-Typus (μ), an.

3. Der Inhalt der Ungleichungen (77) (78) lässt sich daher zunächst folgendermassen aussprechen:

Die Ordnung einer primitiven ganzen Funktion $P(x)$ ist identisch mit dem Grenz-Exponenten.

---

[1]) Bei Borel (Leçons p. 74) „ordre apparent"; v. Schaper sagt, $G(x)$ sei vom Typus e^{x^μ} und gebraucht das Wort Ordnung in anderem Sinne (a. a. O., p. 12, 22). Nach seiner Terminologie wäre $G(x)$ von der Ordnung $\frac{1}{\mu}$.

Sodann ergibt sich mit Rücksicht auf (77[a]): Ist ϱ weder Null, noch eine ganze Zahl, so besteht die Beziehung $|a_\nu| < \nu^{\frac{1}{\varrho}}$ oder auch nicht, je nachdem $P(x)$ dem Minimal-Typus (ϱ) angehört oder nicht.

Bedeutet ferner $[\varrho] < \varrho$ die grösste in ϱ enthaltene ganze Zahl (eventuell die Null, wenn $\varrho < 1$), so ist $P(x)$ vom Range $[\varrho]$.

Ist ϱ eine ganze Zahl und gehört $P(x)$ nicht dem Minimal-Typus (ϱ) an, so kann $\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^\varrho$ nicht konvergieren, folglich ist in diesem Falle $P(x)$ vom Range ϱ. Gehört dagegen $P(x)$ dem Minimal-Typus (ϱ) an, so dass also $|a_\nu| > \nu^{\frac{1}{\varrho}}$ ausfällt, so wird in der Regel $P(x)$ vom Range $\varrho - 1$ (also ϱ Konvergenz-Exponent) sein; nur in besonderen Fällen, nämlich bei ganz spezieller Verteilung der a_ν, ist $P(x)$ vom Range ϱ.

Führt man statt des Grenz-Exponenten ϱ den Rang p ein, so kann der wesentliche Inhalt des letzten Absatzes auch folgendermassen formuliert werden: Eine primitive ganze Funktion $P(x)$ vom Range p ist höchstens vom Minimal-Typus $(p+1)$, mindestens vom Minimal-Typus p. Dabei gehören dem Minimal-Typus $(p+1)$ tatsächlich alle diejenigen $P(x)$ an, für welche $(p+1)$ Konvergenz-Exponent ist; dagegen dem Minimal-Typus (p) überhaupt nur solche $P(x)$, für welche p Divergenz-Exponent, ausserdem noch $|a_\nu| > \nu^{\frac{1}{p}}$ ist und die a_ν ganz speziellen, auf jeden einzelnen Index ν sich erstreckenden Beschränkungen unterliegen.

25

Separat-Abdruck
aus den Sitzungsberichten der mathem.-phys. Klasse
der Kgl. Bayer. Akademie der Wissenschaften
Bd. XXXIII 1903 Heft IV.

Der Cauchy-Goursat'sche Integralsatz und seine Übertragung auf reelle Kurven-Integrale.

Von

Alfred Pringsheim.

München 1904
Verlag der K. Akademie.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

DRUCKSCHRIFTEN

der

KGL. BAYER. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Die in den Sitzungsberichten erschienenen Abhandlungen sind nicht in einzelnen Abzügen ausgegeben.
(Preis des betr. Heftes der Sitzungsberichte 1 Mark 20 Pfennig.)

Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Klasse. Bd. I—XXI in je 3 Abtheilungen, von 1832—1900.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse. Bd. I—XXX, von 1871—1900.

Bauer, Gustav. Kettenbruch Eulers. Abh. II. Kl. XI, 2. 1872 ℳ —.50
— Pascal's Theorem. Abh. II. Kl. XI, 3 1874 ℳ 1.—
— Gedächtnissrede auf Otto Hesse. 1882 ℳ —.60
— Von der Hesse'schen Determinante. Abh. II. Kl. XIV, 3. 1883 ℳ —.50
— Ueber einige Determinanten. Sitzb. 1872, p. 345—354.
— Ueber Kugelfunktionen. Sitzb. 1875, pag. 247—272.
— Ueber Systeme von Curven 6. Ordnung, auf welche das Normalenproblem bei Curven 2. Ordnung führt. Sitzb. 1878, p. 121—135.
— Ueber das geradlinige Hyperboloid. Sitzb. 1880, p. 635—640.
— Tripel von Geraden auf einem Hyperboloid. Sitzb. 1881, p. 241—248.
— Ueber die Hesse'sche Determinante der Hesse'schen Fläche einer Fläche dritter Ordnung. Sitzb. 1883, p. 320.
— Von den gestaltlichen Verhältnissen der parabolischen Curve auf einer Fläche dritter Ordnung. Sitzb. 1883. p. 320—343.
— Ueber d. Discriminante einer binären Form. Sitzb. 1886, p. 183—191.
— Ueber Flächen vierter Ordnung, deren geometrische Erzeugung sich an zwei Tetraeder knüpft. Sitzb. 1888, p. 337—354.
— Darstellung binärer Formen als Potenzsummen. Sitz. 1892, p. 3—20.
— Bemerkungen über zahlentheoretische Eigenschaften der Legendre'schen Polynome. Sitzb. 1894, p. 343—359.
— Von zwei Tetraëdern, welche einander zugleich eingeschrieben und umschrieben sind. Sitz. 1897, p. 359—366.

Brill, Al. Zur Theorie der geodätischen Linie etc. Abh. II. Kl. XIV, 2, 1883 ℳ 1.—
— Bestimmung der optischen Wellenfläche etc. 1883, 3 p. 423—435.
— Ueber rationale Curven und Regelflächen, 1885, 2 p. 276—287.
— Ueber die Multiplicität der Schnittpunkte von zwei ebenen Curven. Sitzb. 1888, p. 81—94.
— Die reducirte Resultante. Abh. II. Kl. XVII, 1889, p. 89—181. ℳ —.40.
— Ueber das Verhalten einer Funktion von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle. Sitzb. 1891, p. 207—220.

Du Bois-Reymond, Paul. Coefficienten der trigonometrischen Reihe. Abh. II. Kl. XII, 2. 1876 ℳ 3.60.
— Ueber den Gültigkeitsbereich der Taylor'schen Reihenentwicklung. Sitzb. 1876, p. 225—237.
— Ein allgemeiner Satz über die Integrirbarkeit von Funktionen integrirbarer Funktionen. Sitz. 1882, p. 240—242.

Dyck, W. Ueber die gestaltlichen Verhältnisse der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln definirten Curvensysteme. Erste Mittheilung (mit 4 Taf.). Sitzb. 1891, p. 23—57; zweite Mittheilung (mit 3 Taf.). Sitzb. 1892, p. 101—138.
— Beiträge zur Potentialtheorie. I. Kronecker'sche Charakteristiken. Sitzb. 1895, p. 261—277.

Der Cauchy-Goursat'sche Integralsatz und seine Übertragung auf reelle Kurven-Integrale.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 5. Dezem'er.*)

Die wichtige Verallgemeinerung, welche der Cauchy'sche Satz über das Verschwinden eines geschlossenen Integrals von der Form $\int f(z) \cdot dz$ durch Herrn Goursat[1]) erfahren hat, ist neuerdings von Herrn Heffter[2]) auf reelle Kurven-Integrale von der Form $\int (P(x,y) \cdot dx + Q(x,y) \cdot dy)$ übertragen worden. An die Stelle der Goursat'schen Voraussetzung eines lediglich endlichen (aber an keinerlei Stetigkeits-Bedingungen gebundenen) $f'(z)$ tritt hierbei die folgende: P und Q müssen für jede Stelle des in Frage kommenden Bereiches ein vollständiges Differential besitzen[3]) und ausserdem der bekannten Integrabilitäts-Bedingung $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ genügen. Ich habe bei früherer Gelegenheit[4]) ausführlich gezeigt, dass jedes über eine abteilungsweise monotone Kurve erstreckte Integral durch ein solches über einen „Treppenweg" (d. h. eine aus Parallelen zu den Koordinaten-Axen zusammengesetzte gebrochene Linie) beliebig approximiert werden kann, und Herr Heffter hat die hierzu erforderlichen Definitionen auch auf den Fall einer lediglich rektifizierbaren Integrations-Kurve ausge-

---

[1]) Transact. of the Amer. Math. Soc. 1 (1900), p. 14.

[2]) Gött. Nachr. 1902, p. 137; 1903 (Sitzung vom 31. Oktober).

[3]) S. weiter unten Nr. 1.

[4]) Sitz.-Ber. Bd. 25 (1895), p. 56 ff.

dehnt, sofern nur diese letztere im Innern desjenigen Bereiches verläuft, für welchen die zu integrierende Funktion gewissen Bedingungen genügt. Darnach reicht es also in der Hauptsache vollständig hin, Sätze über geschlossene Integrale für den Fall eines zu den Koordinaten-Axen parallel gestellten Rechtecks zu beweisen. Dies gilt sogar auch noch, wenn man die von Herrn Heffter bezüglich der nur rektifizierbaren Integrations-Kurven gemachte Einschränkung fallen lässt und für die über letztere zu erstreckenden Integrale die (jene Einschränkung nicht erfordernde) Definition des Herrn Camille Jordan[1]) zu Grunde legt. Alsdann kommt es nämlich in letzter Linie nur darauf an, Integralsätze der fraglichen Art für den Fall eines beliebigen Dreiecks zu beweisen.[2]) Da man ja aber diesen Fall nach dem oben gesagten durch Approximation vermittelst eines „Treppenweges" erledigen kann, so ist schliesslich auch jener allgemeinste Fall auf den „Rechtecks"-Beweis zurückgeführt. Man kann hiernach sagen, dass dieser letztere dem praktischen Bedürfnisse im weitesten Umfange Genüge leistet; freilich wohl nicht ganz so vollständig dem logischen. Denn, wenn wir auch bei der Analyse krummer Linien gezwungen sind, zu Grenz-Vorstellungen zu greifen und sie durch passend gewählte gebrochene Linien zu approximieren, so muss es doch andererseits wohl als eine logische Anomalie gelten, wenn man nun auch die einfache Vorstellung der geraden Linie wiederum durch die Grenz-Vorstellung eines „Treppenweges" ersetzt. Infolge dessen will es mir aus logischen Gründen wünschenswert erscheinen, die Eigenschaften des geradlinigen Integrals direkt aus der Definition, ohne Benützung eines durch das Wesen der Sache in keiner Weise gebotenen Grenz-Prozesses herzuleiten:[3]) was

---

[1]) Cours d'Analyse, 2me éd. T. I (1893), p. 181.

[2]) A. a. O. p. 188.

[3]) Damit steht nicht im Widerspruch, dass auch die Erkenntnis der Möglichkeit, ein geradliniges Integral durch ein Treppen-Integral beliebig zu approximieren, an sich wertvoll erscheint, weil sie deutlich zeigt, dass für den Wert solcher Integrale die Länge des Integrations-

dann offenbar schliesslich darauf hinausläuft, dass man den für geschlossene Integrale erforderlichen Hauptbeweis nicht auf den Fall eines speziell gelagerten Rechtecks beschränkt, sondern von vornherein für ein beliebiges Dreieck zu führen sucht.[1]) Dies für den oben erwähnten, von Herrn Heffter für den Rechtecks-Fall bewiesenen Satz über reelle Linien-Integrale zu leisten und daran einige weitere Bemerkungen zu knüpfen, ist der Zweck der folgenden Mitteilung.

---

1. Es sei $f(x, y)$ eine in einem gewissen Bereiche T eindeutige und stetige Funktion der beiden reellen Veränderlichen (x, y). Wir setzen zur Abkürzung, wie üblich:

$$(1) \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \equiv f_1(x, y), \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \equiv f_2(x, y),$$

und ausserdem:

$$(2) \qquad f(x, y) - f(x_0, y_0) - f_1(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) - f_2(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \equiv f(x, y \mid x_0, y_0).$$

Man sagt alsdann, $f(x, y)$ habe im Punkte (x_0, y_0) ein vollständiges Differential[2]) oder, wie ich etwas kürzer es bezeichnen will, $f(x, y)$ sei bei (x_0, y_0) differenzierbar,[3]) wenn $f_1(x_0, y_0)$, $f_2(x_0, y_0)$ bestimmte Werte besitzen und zugleich:

$$(3) \qquad |f(x, y \mid x_0, y_0)| < \varepsilon(|x - x_0| + |y - y_0|) \text{ für } \left\{ \begin{matrix} |x - x_0| \\ |y - y_0| \end{matrix} \right\} < \delta$$

($\varepsilon > 0$ von beliebig vorgeschriebener, $\delta > 0$ von entsprechend zu bestimmender Kleinheit).

---

weges nicht als ausschlaggebend erscheint. (Vgl. die p. 1, Fussn. 3 zitierte Mitteilung p. 55, 60).

[1]) Vgl. im übrigen meine Bemerkungen: Transact. of the Amer. Math. Soc. 2 (1901), p. 418.

[2]) S. z. B. Stolz, Grundzüge der Diff.- und Integral-Rechnung, I (1893), p. 133.

[3]) Also „differenzierbar" (schlechthin) im Sinne von „total differenzierbar".

Ist $f(x, y)$ für jede einzelne Stelle (x_0, y_0) des Bereiches T differenzierbar, so braucht deshalb $f(x, y)$ noch nicht in T gleichmässig differenzierbar zu sein. Hierzu müssen nämlich noch die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sein, deren Bestehen durch die blosse Differenzierbarkeit für jedes einzelne (x_0, y_0) noch keineswegs gewährleistet wird:

1) $|f_1(x_0, y_0)|$, $|f_2(x_0, y_0)|$ bleiben für alle (x_0, y_0) des Bereiches T unter einer festen Schranke.
2) Es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein bestimmtes $\delta > 0$, welches für alle (x_0, y_0) die Existenz der Ungleichungen (3) nach sich zieht.

2. Bezeichnet man mit Δ irgend ein dem Bereiche T angehöriges Dreieck und mit $\int\limits_{(\Delta)} f(x, y) \cdot dx$, $\int\limits_{(\Delta)} f(x, y) \cdot dy$ Integrale, welche (etwa in positiver Richtung) über die Begrenzung dieses Dreiecks zu erstrecken sind, versteht man ferner unter (x_0, y_0) einen ganz beliebigen Punkt des Bereiches T, so ergibt sich mit Benützung der Identität (2) unmittelbar die folgende identische Umformung:

$$\begin{aligned}\int\limits_{(\Delta)} f(x, y) \cdot dx = \int\limits_{(\Delta)} f(x, y \mid x_0, y_0) \cdot dx \\ + (f(x_0, y_0) - f_1(x_0, y_0) \cdot x_0 - f_2(x_0, y_0) \cdot y_0) \cdot \int\limits_{(\Delta)} dx \\ + f_1(x_0, y_0) \cdot \int\limits_{(\Delta)} x \cdot dx + f_2(x_0, y_0) \cdot \int\limits_{(\Delta)} y \cdot dx.\end{aligned}$$

Da aber offenbar:

$$\int\limits_{(\Delta)} dx = 0, \quad \int\limits_{(\Delta)} x \cdot dx = 0,$$

so reduziert sich diese Gleichung auf die folgende:

$$(4^a) \quad \int\limits_{(\Delta)} f(x, y) \cdot dx = \int\limits_{(\Delta)} f(x, y \mid x_0, y_0) \cdot dx + f_2(x_0, y_0) \int\limits_{(\Delta)} y \cdot dx.$$

Analog ergibt sich:

$$(4^b) \quad \int\limits_{(\Delta)} f(x, y) \cdot dy = \int\limits_{(\Delta)} f(x, y \mid x_0, y_0) \cdot dy + f_1(x_0, y_0) \cdot \int\limits_{(\Delta)} x \cdot dy.$$

3. Dies vorausgeschickt beweisen wir jetzt den folgenden Satz (Übertragung der Goursat'schen Verallgemeinerung des Cauchy'schen Integral-Satzes auf reelle Kurven-Integrale):

Sind $P(x,y)$, $Q(x,y)$ eindeutig definiert und differenzierbar[1]) *im Innern und auf der Begrenzung*[2]) *eines Dreiecks Δ und besteht daselbst die Beziehung:*

$$P_2(x,y) = Q_1(x,y), \tag{5}$$

so hat man:

$$\int_{(\Delta)} (P \cdot dx + Q \cdot dy) = 0. \tag{6}$$

Beweis. Halbiert man die drei Seiten von Δ und zerlegt Δ durch geradlinige Verbindung der Halbierungspunkte in 4 kongruente, dem ursprünglichen ähnliche Dreiecke $\Delta_1^{(\varkappa)}$ $(\varkappa = 1, 2, 3, 4)$, so hat man:

$$\int_{(\Delta)} (P \cdot dx + Q \cdot dy) = \sum_1^4{}^{\varkappa} \int_{(\Delta_1^{(\varkappa)})} (P \cdot dx + Q \cdot dy),$$

und daher:

$$\left| \int_{(\Delta)} (P \cdot dx + Q \cdot dy \right| \leqq \sum_1^4{}^{\varkappa} \left| \int_{(\Delta_1^{(\varkappa)})} (P \cdot dx + Q \cdot dy) \right|.$$

Unter den 4 Dreiecken $\Delta_1^{(\varkappa)}$ muss dann offenbar mindestens eins vorhanden sein, für welches:

$$\left| \int_{(\Delta_1^{(\varkappa)})} (P \cdot dx + Q \cdot dy) \right| \overline{\geqq} \tfrac{1}{4} \left| \int_{(\Delta)} (P \cdot dx + Q \cdot dy) \right|$$

ausfällt. Es werde dieses Dreieck oder, wenn mehrere dieser Art vorhanden sein sollten, ein beliebig aus diesen herausge-

---

[1]) Die Differenzierbarkeit einer Funktion $f(x,y)$ in dem oben definierten Sinne schliesst offenbar allemal schon die Stetigkeit von $f(x,y)$ mit ein.

[2]) Das Verhalten bezw. die Existenz von $P(x,y)$, $Q(x,y)$ ausserhalb Δ kommt überhaupt nicht in Betracht. Insbesondere brauchen also $P(x,y)$, $Q(x,y)$ für die Punkte der Begrenzung nach aussen hin weder differenzierbar, noch stetig zu sein.

griffenes, aber nunmehr bestimmtes mit Δ_1 bezeichnet. Alsdann wird also:

$$\left|\int_{(\Delta)}(P\cdot dx + Q\cdot dy)\right| \leqq 4\cdot\left|\int_{(\Delta_1)}(P\cdot dx + Q\cdot dy)\right|.$$

Wendet man jetzt die analoge Vierteilung auf das Dreieck Δ_1 an, so ergibt sich mit Benützung der nämlichen Schlussweise:

$$\left|\int_{(\Delta_1)}(P\cdot dx + Q\cdot dy)\right| \leqq 4\cdot\left|\int_{(\Delta_2)}(P\cdot dx + Q\cdot dy)\right|,$$

und daher:

$$\left|\int_{(\Delta)}(P\cdot dx + Q\cdot dy)\right| \leqq 4^2\cdot\left|\int_{(\Delta_2)}(P\cdot dx + Q\cdot dy)\right|,$$

wo jetzt Δ_2 ein bestimmtes Viertel-Dreieck von Δ_1 bedeutet.

Durch n malige Anwendung dieser Schlussweise gelangt man zu einer Beziehung von der Form:

$$(7)\qquad \left|\int_{(\Delta)}(P\cdot dx + Q\cdot dy)\right| \leqq 4^n\cdot\left|\int_{(\Delta_n)}(P\cdot dx + Q\cdot dy)\right|.$$

Dabei bilden

$$\Delta,\quad \Delta_1,\quad \Delta_2,\quad \ldots . \Delta_n$$

eine (offenbar unbegrenzt fortsetzbare) Dreiecksfolge von folgender Beschaffenheit: jedes Dreieck Δ_ν ($\nu = 1, 2, \ldots n$) bildet einen Bestandteil (nämlich ein Viertel) des unmittelbar vorangehenden und besitzt halb so grosse Seiten, wie jenes. Bezeichnet man also mit

$$s,\quad s_1,\quad s_2,\quad \ldots . s_n$$

die Umfänge der betreffenden Dreiecke, so hat man: $s_1 = \frac{s}{2}$, $s_2 = \frac{s}{2^2}$ und allgemein:

$$(8)\qquad s_n = \frac{s}{2^n}.$$

Bei unbegrenzter Fortsetzung des angedeuteten Prozesses konvergieren die Dreiecke Δ_n gegen einen bestimmten, dem Innern oder der Begrenzung von Δ angehörigen Punkt (x_0, y_0). Wird dann $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgeschrieben, so muss sich

auf Grund der vorausgesetzten Differenzierbarkeit von $P(x, y)$, $Q(x, y)$ ein $\delta > 0$ so fixieren lassen, dass:

$$(9) \qquad \left.\begin{array}{l} |P(x, y \mid x_0, y_0)| \\ |Q(x, y \mid x_0, y_0)| \end{array}\right\} < \varepsilon \cdot (|x - x_0| + |y - y_0|)$$

für alle dem Bereiche $\varDelta$ angehörigen (x, y), welche den Ungleichungen genügen:

$$(9^a) \qquad \left.\begin{array}{l} |x - x_0| \\ |y - y_0| \end{array}\right\} < \delta.$$

Andererseits ergibt sich mit Benützung der Transformation (4^a), (4^b) zunächst:

$$\int_{(\varDelta_n)} (P \cdot dx + Q \cdot dy) = \int_{(\varDelta_n)} (P(x, y \mid x_0, y_0) \cdot dx + Q(x, y \mid x_0, y_0) \cdot dy)$$
$$+ P_2(x_0, y_0) \int_{(\varDelta_n)} y \cdot dx + Q_1(x_0, y_0) \int_{(\varDelta_n)} x \cdot dy.$$

Da aber nach Voraussetzung (Gl. (5)):

$$P_2(x_0, y_0) = Q_1(x_0, y_0)$$

und sodann:

$$\int_{(\varDelta_n)} y \cdot dx + \int_{(\varDelta_n)} x \cdot dy = \int_{(\varDelta_n)} d(xy) = 0,$$

so reduziert sich die obige Gleichung auf die folgende:

$$(10) \quad \int_{(\varDelta_n)} (P \cdot dx + Q \cdot dy) = \int_{(\varDelta_n)} (P(x, y \mid x_0, y_0) \cdot dx + Q(x, y \mid x_0, y_0) \cdot dy).$$

Wird jetzt n gross genug angenommen, dass $\varDelta_n$ vollständig in die durch Ungl. (9^a) charakterisierte Umgebung des Punktes (x_0, y_0) hineinfällt, so folgt aus Gl. (10) mit Benützung der Ungleichungen (9):

$$\left| \int_{(\varDelta_n)} (P \cdot dx + Q \cdot dy) \right| < \varepsilon \cdot \int_{(\varDelta_n)} (|x - x_0| + |y - y_0|) \cdot (|dx| + |dy|).$$

Wegen:

$$\left.\begin{array}{l} |x - x_0| \\ |y - y_0| \end{array}\right\} \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \frac{s_n}{2}$$

wird sodann:

$$\left|\int_{(\Delta_n)}(P\,dx + Q\cdot dy)\right| < \varepsilon\cdot s_n\cdot\int_{(\Delta_n)}(|dx| + |dy|)$$

$$< \varepsilon\cdot s_n\cdot 2\,s_n = \varepsilon\cdot 2\,s_n^2 = \varepsilon\cdot 2\cdot\frac{s^2}{4^n}\ \text{(s. Gl. (8))},$$

sodass also die Ungleichung (7) in die folgende übergeht:

$$\left|\int_{(\Delta)}(P\,dx + Q\cdot dy)\right| < \varepsilon\cdot 2\,s, \tag{11}$$

d. h., da ε unbegrenzt verkleinert werden kann, schliesslich, wie behauptet:

$$\int_{(\Delta)}(P\cdot dx + Q\cdot dy) = 0.$$

4. Man bemerke, dass die bei dem obigen Beweise als grundlegend vorausgesetzte Bedingung der Differenzierbarkeit von $P(x, y)$, $Q(x, y)$ (immer in dem oben näher definierten Sinne) einen wesentlich anderen Charakter besitzt, wie diejenigen Bedingungen, welche zum Beweise des betreffenden Integralsatzes mit Hilfe des Green'schen Satzes:

$$\int\int(Q_1 - P_2)\,dx\cdot dy = \int(P\cdot dx + Q\cdot dy)$$

erforderlich sind. Diese letzteren sind Stetigkeits-Bedingungen für $Q_1(x, y)$, $P_2(x, y)$, welche die Existenz der Doppel-Integrale $\int\int Q_1\cdot dx\,dy$, $\int\int P_2\cdot dx\,dy$ nach sich ziehen sollen, welche also, allgemein zu reden, in gewissem Umfange die Existenz von Stetigkeitspunkten für $Q_1(x, y)$, $P_2(x, y)$ als Funktionen der beiden Veränderlichen (x, y) verlangen.[1]) Dagegen hat die Differenzierbarkeit von $Q(x, y)$, $P(x, y)$ zunächst mit der Stetigkeit von $Q_1(x, y)$, $P_2(x, y)$ überhaupt nichts zu tun (wenn auch umgekehrt nach einem bekannten Satze[2]) die Stetigkeit von $Q_1(x, y)$, $P_2(x, y)$ als Funktionen von (x, y) für die Differenzierbarkeit von $Q(x, y)$, $P(x, y)$ sich als hinreichend erweist). Hierin liegt aber eine neue Bestätigung der von mir bei früherer Gelegenheit[3]) gemachten Bemerkung,

---

[1]) Genaueres s. dieser Berichte Bd. 29 [1899], p. 59.

[2]) Stolz, a. a. O. p. 134.

[3]) A. a. O. p. 60.

dass der Green'sche Satz keineswegs als allgemeinste Grundlage der Relation $\int (P \cdot dx + Q \cdot dy) = 0$ angesehen werden kann.

5. Aus dem in Nr. 3 bewiesenen Satze für reelle Integrale gewinnt man unmittelbar den Cauchy-Goursat'schen Satz für komplexe Integrale: $\int\limits_{(\Delta)} f(z) \cdot dz = 0$, wenn man $\int f(z) \cdot dz$ in seinen reellen und imaginären Teil zerlegt. Dagegen lässt sich nicht umgekehrt der Satz von Nr. 3 aus dem entsprechenden Satze für $\int f(z) \cdot dz$ herleiten. Man würde auf diesem Wege immer nur das Resultat gewinnen, dass:

$$\int\limits_{(\Delta)} (P \cdot dx + Q \cdot dy) = 0,$$

wenn $P(x, y)$, $Q(x, y)$ ausser den früher angegebenen Bedingungen auch noch der Beziehung:

$$P_1(x, y) = -Q_2(x, y)$$

genügen. Der Satz von Nr. 3 ist also der allgemeinere und schon aus diesem Grunde dürfte es zweckmässig erscheinen, ihn als den eigentlichen Fundamentalsatz zum Ausgangspunkt zu nehmen, zumal ja überhaupt die prinzipielle Zurückführung der komplexen Integrale auf reelle Kurven-Integrale in logischer und praktischer Hinsicht erhebliche Vorzüge besitzt.

Will man freilich nur die Beziehung $\int\limits_{(\Delta)} f(z) \cdot dz = 0$ (unter der Voraussetzung eines eindeutigen, differenzierbaren $f(z)$) auf dem denkbar kürzesten Wege herleiten, so braucht man nur das in Nr. 3 angewendete Beweisverfahren mutatis mutandis direkt auf $\int f(z) \cdot dz$ zu übertragen. Man findet zunächst, analog wie dort:

$$\left| \int\limits_{(\Delta)} f(z) \cdot dz \right| \leq 4^n \cdot \left| \int\limits_{(\Delta_n)} f(z) \cdot dz \right|. \tag{12}$$

Bezeichnet man sodann mit z_0 den Grenzpunkt der Δ_n, so besteht auf Grund der vorausgesetzten Differenzierbarkeit von $f(z)$ eine Beziehung von der Form:

$$|f(z|z_0)| \equiv |f(z) - f(z_0) - f'(z_0) \cdot (z - z_0)| < \varepsilon \cdot |z - z_0| \quad \text{für } |z - z_0| < \delta. \tag{13}$$

Durch identische Umformung ergibt sich aber:

$$\text{(14)}\quad \begin{aligned}\int_{(\Delta_n)} f(z)\cdot dz &= \int_{(\Delta_n)} f(z|z_0)\cdot dz + (f(z_0) - f'(z_0)\cdot z_0)\int_{(\Delta_n)} dz + f'(z_0)\int_{(\Delta_n)} z\cdot dz \\ &= \int_{(\Delta_n)} f(z|z_0)\cdot dz\end{aligned}$$

(wegen: $\int_{(\Delta_n)} dz = 0$, $\int_{(\Delta_n)} z \cdot dz = 0$, wie unmittelbar aus der Definition des komplexen Integrals als Summen-Grenzwert hergeleitet werden kann.[1]))

Wird also wiederum n so gross angenommen, dass Δ_n in die Umgebung $|z - z_0| < \delta$ hineinfällt, so ergibt sich mit Benützung von Ungl. (13):

$$\begin{aligned}\left|\int_{(\Delta_n)} f(z)\cdot dz\right| &< \varepsilon \cdot \int_{(\Delta_n)} |z - z_0| \cdot |dz| \\ &< \varepsilon \cdot \frac{s_n}{2} \cdot \int_{(\Delta_n)} |dz| \\ &= \varepsilon \cdot \frac{s_n}{2} \cdot s_n = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{s^2}{4^n},\end{aligned}$$

und daher schliesslich:

$$\left|\int_{(\Delta)} f(z) \cdot dz\right| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot s^2 \quad \text{d. h.} \quad \int_{(\Delta)} f(z) \cdot dz = 0.^{2)}$$

---

[1]) Vgl. Transact. of the Amer. Math. Soc. 2 (1901), p. 417.

[2]) Dieser Beweis unterscheidet sich von dem indirekt gefassten, welchen Herr Moore in den Transact. of the Amer. Math. Soc. 1 (1900), p. 505 bezw. 502 mitgeteilt hat, ausser durch die direkte Fassung (vgl. a. a. O. p. 503, Fussn. 1) nur noch durch die im vorliegenden Falle offenbar zweckmässigere Einführung von Teil-Dreiecken an Stelle der dort benützten quadratischen Teilung. Er ist noch merklich kürzer als der a. a. O. Bd. 2, p. 420 von mir angegebene Beweis, da er nicht erst die Herleitung des Goursat'schen Lemmas erfordert.

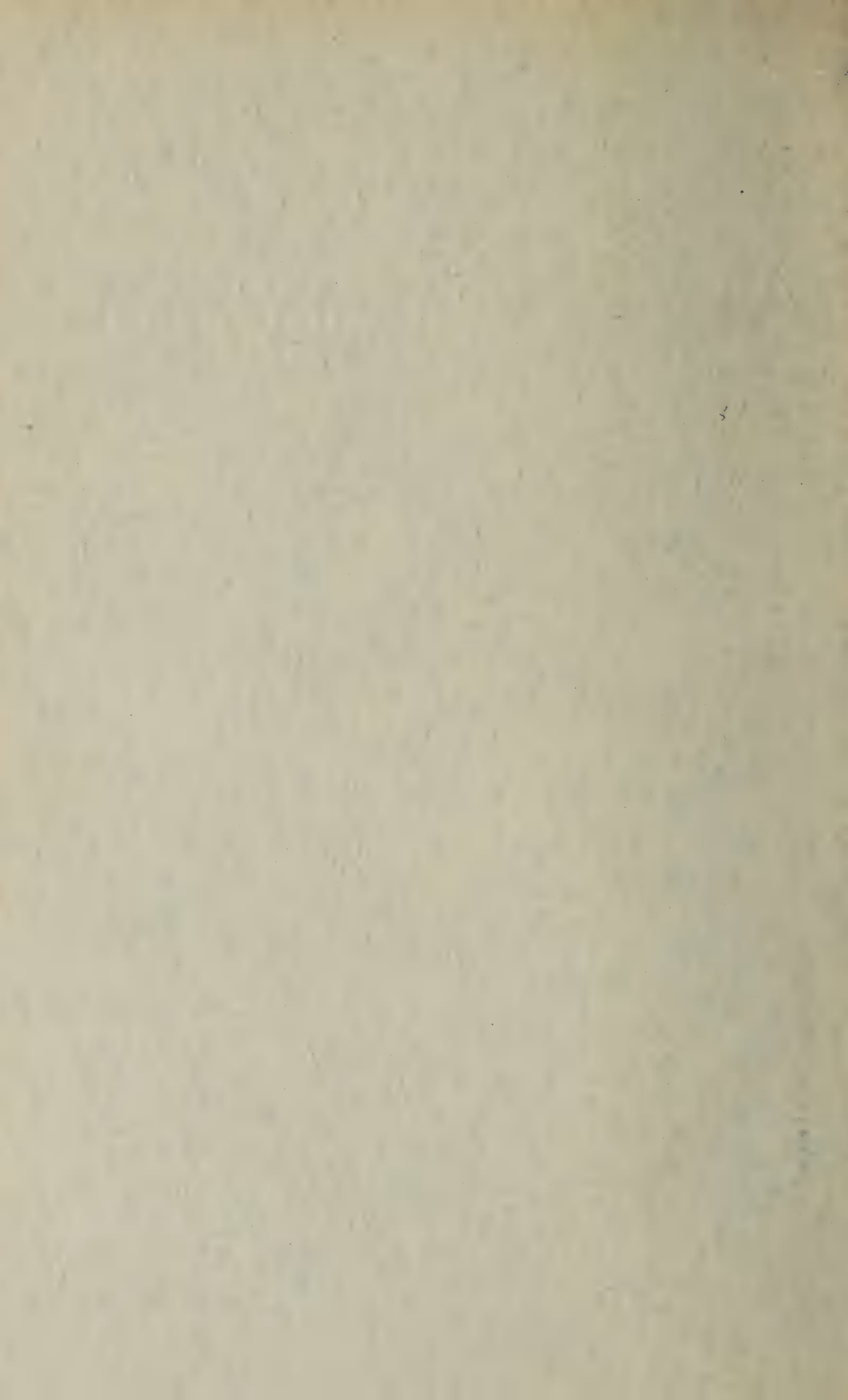
26

From the Congress Mathematical Papers.

ÜBER DIE NOTHWENDIGEN UND HINREICHENDEN BEDINGUNGEN FÜR DIE ENTWICKELBARKEIT VON FUNCTIONEN EINER REELLEN VARIABLEN NACH DER TAYLOR'SCHEN REIHE UND ÜBER NICHT-ENTWICKELBARE FUNCTIONEN MIT DURCHWEG ENDLICHEN DIFFERENTIAL-QUOTIENTEN

VON

ALFRED PRINGSHEIM IN MÜNCHEN.



ÜBER DIE NOTHWENDIGEN UND HINREICHENDEN BEDINGUNGEN FÜR DIE ENTWICKELBARKEIT VON FUNCTIONEN EINER REELLEN VARIABLEN NACH DER TAYLOR'SCHEN REIHE UND ÜBER NICHT-ENTWICKELBARE FUNCTIONEN MIT DURCHWEG ENDLICHEN DIFFERENTIAL-QUOTIENTEN.

VON

ALFRED PRINGSHEIM IN MÜNCHEN.

§ 1. *Einleitung.*

In seiner *Théorie des Fonctions* (Chap. v. Art. 30) * und den *Leçons sur le Calcul des Fonctions* (Leçon III.) † spricht Lagrange die Ansicht aus, dass eine Function $f(x)$, welche für einen gewissen Werth x_0 der reellen Variablen x bestimmte endliche Ableitungen jeder noch so grossen endlichen Ordnung besitzt, für eine gewisse Umgebung dieser Stelle stets durch die Taylor'sche Reihenentwickelung, also in der Form:

$$f(x_0+h) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} \cdot h^\nu$$

dargestellt werden könne ‡.

* Lagrange, *Œuvres compl.* T. IX. p. 65.

† Desgl. T. x. p. 72.

‡ Hierin ist natürlich die Gültigkeit der sog. MacLaurin'schen Formel als specieller Fall, nämlich für $x_0=0$, mitenthalten. Da man aber auch umgekehrt aus der MacLaurin'schen Formel:

$$\phi(h) = \Sigma \frac{\phi^{(\nu)}(0)}{\nu!} h^\nu$$

durch die Substitution:

$$\phi(h) = f(x_0+h)$$

die Taylor'sche herleiten kann, so werde ich im Folgenden die Ausdrücke Taylor'sche und MacLaurin'sche Reihe je nach Bedarf als vollständig gleichwerthig gebrauchen.

Von den *zwei* Hypothesen, welche diese Lagrange'sche Behauptung offenbar enthält, dass nämlich unter den über $f(x)$ gemachten Voraussetzungen:

(1) die Reihe $\Sigma \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} h^\nu$ stets convergire;

(2) ihre Summe den Werth $f(x_0 + h)$ besitze —

wurde merkwürdigerweise zunächst die zweite, an sich weit einleuchtender erscheinende, von Cauchy* angefochten, indem er auf das Beispiel der Function $e^{-\frac{1}{x^2}}$ hinwies: Obschon dieselbe nämlich für $x = 0$ mit sämmtlichen Ableitungen verschwinde, so gestatte sie dennoch nicht die Anwendung der MacLaurin-'schen Formel, da sie sonst für jedes x in der Umgebung der Nullstelle verschwinden müsste, was thatsächlich nicht der Fall ist.

War dieses Cauchy'sche Beispiel nun wohl auch geeignet, den Glauben an jene *zweite* Lagrange'sche Hypothese einigermaassen zu erschüttern, so kann man dasselbe doch keineswegs als einen vollgültigen Beweis gegen dieselbe gelten lassen. Denn die fragliche Stelle $x = 0$ erscheint hier von vorn herein als eine *singuläre*, für welche die Function $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ zunächst überhaupt *garnicht* oder zum mindesten nicht "*eigentlich*" *definirt* ist, d. h. nicht durch directes Einsetzen von $x = 0$ in eine der Definitions-Gleichungen:

$$e^{-\frac{1}{x^2}} = \sum_0^\infty{}^\nu (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu!} \cdot \frac{1}{x^{2\nu}} \qquad \text{oder: } e^{-\frac{1}{x^2}} = \left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)^{-1} = \left(\sum_0^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu!} \cdot \frac{1}{x^{2\nu}}\right)^{-1}$$

berechnet werden kann, sondern vielmehr erst durch eine *specielle Definition*, nämlich als $\lim_{x=0} f(\pm x)$—und auch da wiederum nur bei Benützung der *zweiten* Form der *sonst* gleichwerthigen Definitions-Gleichungen eine bestimmte Bedeutung gewinnt. Schliesst man nun derartige Stellen x bei der Formulirung der Lagrange'schen Behauptung von vorn herein aus, was so zu sagen geradezu *selbstverständlich* erscheint und, wie ich überzeugt bin, von Lagrange ohne weiteres acceptirt werden würde, so beweist

* *Leçons sur le Calcul infinitésimal* (1823), p. 152; *Leçons sur le Calcul différentiel* (1826), p. 105.

thatsächlich die fragliche Bemerkung Cauchy's *absolut nichts* gegen die Richtigkeit jener zweiten Lagrange'schen Hypothese.

Dazu kommt noch, dass die *erste* der Lagrange'schen Hypothesen bei diesem Angriffe völlig unberührt blieb: und doch fordert gerade sie schon auf den ersten Blick weit mehr den Zweifel heraus. Denn da die Ableitungen $f^{(n)}(x)$, auch wenn sie für jedes endliche n endliche Werthe besitzen, im allgemeinen mit n in's Unendliche wachsen (wie schon ein Blick auf jede beliebige nicht-ganze algebraische Function lehrt), so liegt gar kein Grund vor, an der Existenz von Functionen zu zweifeln, bei welchen für irgend welche Werthe $x = x_0$ die Zunahme von $f^{(n)}(x_0)$ mit wachsendem n so stark ist, dass $\Sigma \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} h^\nu$ für keinen noch so kleinen endlichen Werth h convergirt. Immerhin blieb die *Möglichkeit* auch für die Richtigkeit der so viel leichter anzufechtenden ersten Hypothese bestehen, solange man nicht Beispiele derartiger Functionen zur Hand hatte. Es kam somit zur endgültigen Widerlegung der Lagrange'schen Ansicht darauf an, analytische Ausdrücke $f(x)$ zu construiren, welche sammt ihren Differentialquotienten für alle Stellen eines Intervalles $a \leqq x \leqq b$ *eigentlich* definirt sind, welche daselbst durchgängig endliche Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung besitzen, und die dennoch in der Umgebung einer *im Innern* jenes Intervalles gelegenen Stelle x_0 *nicht* nach der Taylor'schen Reihe entwickelbar sind und zwar:

entweder (1) weil die Taylor'sche Reihe $\Sigma \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} h^\nu$ für kein noch so kleines h convergirt;

oder (2) weil die Summe der (convergirenden) Reihe

$$\Sigma \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} h^\nu$$

für kein noch so kleines die Stelle x_0 umgebendes Intervall den Werth $f(x_0 + h)$ hat.

Obschon es sich hierbei wesentlich um eine Frage der *reellen** Functionen-Theorie zu handeln scheint, so war es doch gerade die Theorie der Functionen *complexer* Variabeln, welche die

* Lässt man nämlich in der Lagrange'schen Formulirung des Taylor'schen Satzes von vorn herein statt eines *reellen Intervalles* ein *complexes Gebiet* treten, so besteht ja gerade seit Cauchy über die Entwickelbarkeit von $f(x_0 + h)$ und deren Grenzen keinerlei Zweifel.

nöthigen Hülfsmittel zur Lösung des vorliegenden Problems an die Hand gab.

Von der Erkenntniss ausgehend, dass ein für ein gewisses (auch *reelle* Werthe umfassendes) Gebiet einer *complexen* Variablen x definirter arithmetischer Ausdruck für *kein* die Stelle x_0 umgebendes *reelles Intervall* nach Potenzen von $(x - x_0)$ entwickelbar sein kann, falls dies nicht auch für ein gewisses, dieses reelle Intervall in sich aufnehmendes *complexes Gebiet* stattfindet, gelangte zunächst Du Bois Reymond* zur Construction einer Function, für welche, trotz der Endlichkeit aller in der *Richtung der reellen Axe* vor- oder rückwärts gebildeten Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung, aus dem eben angegebenen Grunde in der Umgebung der Stelle $x = 0$ die Entwickelbarkeit nach Potenzen von x *von vorn herein ausgeschlossen sein musste*, und für die sich dann auch nachträglich die *Divergenz* der MacLaurin'schen Reihe direct nachweisen liess. Damit war also die *erste* Lagrange'sche Hypothese definitiv beseitigt.

Mit Benützung des nämlichen Grundgedankens ist es mir kürzlich gelungen†, neben einfacheren Beispielen der eben erwähnten Kategorie auch solche zu construiren, für welche zwar die nach der MacLaurin'schen Formel hergestellte Potenzreihe *convergirt*, während sie auf Grund des obigen functionentheoretischen Principes *keinesfalls* auch nur für ein beliebig kleines reelles Intervall die erzeugende Function zur *Summe* haben kann.

Da hiermit auch die *zweite* Lagrange'sche Hypothese als hinfällig erwiesen ist, so erscheint die Endlichkeit aller Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung an der Stelle $x = x_0$ und die gleichfalls ausdrücklich unter die *Voraussetzungen* aufzunehmende *Convergenz* der Reihe $\Sigma \frac{f^{(\nu)} x_0}{\nu!} h^\nu$ wohl als eine *nothwendige*, aber *keineswegs* als eine *hinreichende* Bedingung für die Gültigkeit der Formel:

$$f(x_0 + h) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} h^\nu. \tag{1}$$

* "Über den Gültigkeits-Bereich der Taylor'schen Reihen-Entwickelung." *Math. Ann.* Bd. XXI. p. 109.

† "Zur Theorie der Taylor'schen Reihe und der analytischen Functionen mit beschränktem Convergenz-Bereich." *Math. Ann.* Bd. XLII. p. 109.

Auf der andern Seite giebt die aus dem Rolle'schen Mittelwerthsatz folgende Beziehung (die sog. Taylor'sche Formel mit dem Lagrange'schen Reste):

$$(2) \qquad f(x_0+h) = \sum_0^{n-1}{}^{\nu} \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} h^\nu + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} h^n \qquad (x_0 \leqq \xi \leqq x_0 + h)$$

wohl eine *hinreichende*, aber keine *nothwendige* Bedingung für die Gültigkeit der Taylor'schen Entwickelung. Denn will man aus Gl. (2) die Gültigkeit der Beziehung (1) für irgend einen bestimmten Werth h_0 erschliessen, so müsste—da man den in (2) vorkommenden Mittelwerth ξ ja nicht kennt—feststehen, dass:

$$(3) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{f^n(x)}{n!} h_0^n = 0,$$

für *alle* x, die dem Intervalle: $x_0 \leqq x \leqq x_0 + h_0$ angehören, und dies würde also thatsächlich eine *hinreichende* Bedingung für die Gültigkeit von (1) abgeben; während doch hierzu nur *nothwendig* wäre, dass der Grenzwerth (3) für jenen *einzigen* unbekannten Mittelwerth ξ verschwinden müsste.

Dagegen erhält man freilich eine gewisse Form der *nothwendigen und hinreichenden* Bedingungen für die Gültigkeit der Taylor'schen Entwickelung, wenn man, statt von dem Rolle'schen Satze auszugehen, die Beziehung:

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \int_0^h f'(x_0 + h - \alpha)\, d\alpha$$

durch successive factorenweise Integration überführt in die folgende:

$$f(x_0+h) = \sum_0^{n-1}{}^{\nu} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} h^\nu + R_n,$$

wo

$$R_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^h f^{(n)}(x_0 + h - \alpha) \,.\, \alpha^{n-1} \,.\, d\alpha.$$

Denn hieraus folgt in der That—die Endlichkeit und Stetigkeit der $f^{(n)}(x)$ für jedes endliche n vorausgesetzt—als *nothwendige und hinreichende* Bedingung für die Taylor'sche Formel:

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0.$$

Indessen ist der Werth dieses Resultates ein ziemlich illusorischer: das fragliche Integral lehrt uns über die Eigenschaften, welche $f(x)$ in dem betreffenden Intervalle von x_0 bis $x_0 + h$ besitzen muss, so zu sagen garnichts. Will man diesem Integrale irgendwie näher kommen, so muss man Mittelwerthsätze an-

wenden, und alsdann gelangt man wiederum nur zu der Lagrange'schen Restform oder ähnlichen Ausdrücken, deren Verschwinden zwar *hinreichende*, aber keine *nothwendigen* Bedingungen liefert.

Als einziger Versuch, die *nothwendigen und hinreichenden* Bedingungen für die Gültigkeit der Taylor'schen Reihe in anderer Weise zu fixiren (immer so verstanden, dass es sich dabei wesentlich um Functionen einer reellen Variablen handelt) ist mir bisher lediglich ein Aufsatz des Herrn F. König* bekannt geworden, dessen Resultat indessen meiner Ansicht nach ziemlich viel zu wünschen übrig lässt. Aus diesem Grunde habe ich das fragliche Problem von neuem wieder aufgenommen und glaube auch zu einer einigermaasen befriedigenden Lösung desselben gelangt zu sein, die ich in folgenden Paragraphen mittheilen will.

---

§ 2. *Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit der Taylor'schen Formel.*

Lehrsatz. Damit die für $x = x_0$ endliche, für das Intervall $(x_0 \leqq x < x_0 + R)$ eindeutige Function $f(x)$ darstellbar sei durch die Taylor'sche Formel:

$$f(x) = \sum_0^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu\,!} f^{(\nu)}(x_0) \,.\, (x - x_0)^\nu \qquad (x_0 \leqq x < x_0 + R)$$

oder anders geschrieben:

$$f(x_0 + h) = \sum_0^\infty \frac{1}{\nu\,!} f^{(\nu)}(x_0) \,.\, h^\nu = S(x_0, h) \qquad (0 \leqq h < R)$$

ist **nothwendig und hinreichend:**

(1) *dass $f(x)$ für alle Werthe x des Intervalles $(x_0 \leqq x < x_0 + R)$ eindeutig bestimmte, endliche Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung besitze;*

(2) *dass:*

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n\,!} f^{(n)}(x_0 + h) \,.\, k^n = 0,$$

für alle Werthe (h, k), welche den Bedingungen genügen:

$$0 \leqq h \leqq h + k < R\dagger.$$

---

* "Über die Bedingungen der Gültigkeit der Taylor'schen Reihe." *Math. Ann.* Bd. XXIII. p. 450.

† Genauer gesagt, muss der fragliche Grenzausdruck für alle h, k des angegebenen Intervalles *gleichmässig* gegen Null convergiren. Vgl. hierüber: *Math. Ann.* Bd. XLIV. p. 62 ff.

Ehe ich in den Beweis dieses Satzes eintrete, möchte ich über dessen Fassung und sein Verhältniss zu dem oben erwähnten König'schen Satze noch folgendes vorausschicken.

Die Forderung, dass $f(x)$ für das betreffende Intervall *eindeutig bestimmte* Differentialquotienten besitze, soll so verstanden werden, dass für $x > x_0$ jeder Differentialquotient nur *einen einzigen* bestimmten Werth hat, gleichgültig ob man ihn *nach rechts oder nach links* bilden mag (für die Stelle $x = x_0$ selbst kommt natürlich nur der rechtsseitige Differentialquotient in Betracht): in Folge dessen braucht die *Stetigkeit* von $f(x)$, $f^{(\nu)}(x)$ nicht ausdrücklich unter den Voraussetzungen aufgeführt zu werden, da sie in diesem Falle *eo ipso* vorhanden sein muss.

Ferner bedeutet die *Endlichkeit* aller Differentialquotienten *jeder endlichen* Ordnung nur so viel, dass $f^{(n)}(x)$ für jedes bestimmte endliche n einen (irgendwie von n abhängigen) bestimmten endlichen Werth haben muss, womit aber keineswegs ausgeschlossen sein soll, dass $f^{(n)}(x)$ zugleich mit n in's Unendliche wachsen kann. Letzteres wird vielmehr geradezu die *Regel* sein, da ja andernfalls, d. h. wenn $\lim_{n=\infty} f^{(n)}(x)$ stets unter einer endlichen Grenze bliebe, die Reihe $\Sigma \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(x_0) \, . \, h^\nu$ für *jedes noch so grosse* h, also *beständig* convergiren müsste, was offenbar ein ganz specieller Fall wäre. Die Bedingung (2) des oben ausgesprochenen Satzes bestimmt nun gerade das *Maass*, nach welchem ein Unendlichwerden von $f^{(n)}(x_0 + h)$ für $n = \infty$ stattfinden darf, wenn $f(x_0 + h)$ für ein gewisses Intervall nach Potenzen von h entwickelbar sein soll. In dieser Bedingung liegt der eigentliche *Kernpunkt* des Satzes, der sich folgendermaassen formuliren lässt: *Das unterscheidende Merkmal, welches die für irgend ein Intervall* **entwickelbaren** Functionen $f(x)$ aus der Classe der **unbeschränkt differenzirbaren** *heraushebt, besteht in genau zu praecisirenden Beschränkungen, an welche das Unendlichwerden von* $f^{(n)}(x)$ *für* $n = \infty$ *gebunden ist, und welche keineswegs eine blosse* **Folge** *der Differenzirbarkeit sind, sondern zu dieser noch ausdrücklich* **hinzukommen** *müssen.*

Sodann möchte ich noch hervorheben, dass im Gegensatze zu der sonst herrschenden Gepflogenheit, Bedingungen, die sich auf die Entwickelbarkeit von $f(x)$ beziehen, immer gleich für

eine gewisse (reelle) *Umgebung* einer Stelle x_0 zu formuliren, bei dem oben angegebenen Satze mit voller Absicht nur von einer *einseitigen*—um irgend eine Festsetzung zu treffen, der *rechtsseitigen—Nachbarschaft* von x_0 die Rede ist. Da es sich hier nämlich wesentlich um Functionen *reeller* Variablen handelt, so wird die Function $f(x)$, auch wenn man sich dieselbe für die rechte *und* linke Nachbarschaft von x_0 durch einen einheitlichen analytischen Ausdruck (nach Art einer Fourier'schen Reihe) gegeben denkt, für die beiden Nachbarschaften von x_0 vollkommen *verschiedene* Eigenschaften besitzen können. Wenn also auch für *positive* $h < R$ etwa die Beziehung besteht:

$$f(x_0 + h) = \Sigma \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(x_0) h^\nu$$

so braucht die Summe dieser natürlich auch für *negative* (numerisch unter R liegende) Werthe von h *convergirenden* Reihe für $h < 0$ zur Function $f(x_0 + h)$ nicht die geringste Beziehung zu haben *. Man würde also den fraglichen Satz zweifellos *zu eng* fassen, wenn man *von vorn herein* die *nothwendigen und hinreichenden* Bedingungen für die Gültigkeit der Taylor'schen Formel von Eigenschaften abhängig macht, welche $f(x)$ in der (zweiseitigen) *Umgebung* einer Stelle x_0 besitzt, da sich diese zwar als *hinreichend*, dagegen keineswegs als *nothwendig* erweisen würden, falls es sich nur um die Entwickelbarkeit für *eine* Nachbarschaft von x_0 handelt. Dagegen hat es bei der hier gewählten Fassung des Satzes offenbar garkeine Schwierigkeit, denselben zunächst auch auf negative Werthe von h zu übertragen und schliesslich durch Zusammensetzung der betreffenden Theil-Resultate für eine zweiseitige Nachbarschaft der Stelle x_0 zu formuliren.

Was nun ferner den analogen Satz des Herrn König betrifft, so unterscheidet er sich—ausser in dem eben besprochenen und einigen anderen Punkten von mehr untergeordneter Bedeutung—vor allem darin, dass unter den betreffenden Bedingungen dort noch eine erscheint, welche mit Anwendung der hier gebrauchten Bezeichnungen folgendermaassen lauten würde:

* Ich bin in der That im Stande, wie ich demnächst bei anderer Gelegenheit zeigen werde, unbeschränkt differenzirbare analytische Ausdrücke $f(x)$ anzugeben, welche z. B. *rechts* von der Nullstelle nach der MacLaurin'schen Reihe entwickelbar sind, während deren Summe für *negative* x nicht mehr mit $f(x)$ übereinstimmt.

"*Es muss* $S(x, h) = \Sigma \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(x) . h^\nu$ **als Function von x** *betrachtet* **gliedweise differenzirbar** *sein in der Umgebung jeder Stelle x, welche dem Intervalle* $(x_0 \leqq x < x_0 + R)$ *angehört, und für alle positiven Werthe h, welche der Bedingung genügen:*

$$x + h < x_0 + R."$$

Da wir nun aber von den *nothwendigen und hinreichenden* Bedingungen für die *gliedweise Differenzirbarkeit* einer Reihe, deren Glieder beliebige Functionen einer Veränderlichen x sind, *keine genügende Vorstellung* haben (wir kennen eigentlich nur *hinreichende* Bedingungen hierfür), so wird durch Einführung der obigen Bedingung der Werth des betreffenden Satzes geradezu *völlig illusorisch.* Dazu kommt aber noch, dass auch diese Bedingung noch nicht einmal ausreicht, um den König'schen Beweis zu einem einwurfsfreien zu machen. Wie Herr Stolz* mit Recht bemerkt hat, ist dazu noch folgendes erforderlich:

"*Es müssen* $S(x, h)$ *und* $\frac{\partial S(x, h)}{\partial x}$ **gleichmässig stetige** *Functionen von x und h sein in der Umgebung jedes Werthepaares (x, h), welches der Bedingung genügt:* $x_0 \leqq x \leqq x + h < x_0 + R$"— eine weitere Bedingung, durch welche der Function $f(x)$ wiederum Beschränkungen auferlegt werden, von deren eigentlicher Natur wir garkeine Vorstellung haben. Wie nun der von mir aufgestellte und sogleich zu beweisende Satz gerade *im Gegensatze* zu demjenigen des Herrn König zeigen wird, sind die erwähnten Bedingungen in Wahrheit durchaus *überflüssige*: sie sind nur *nothwendige* in dem Sinne, dass ihre Existenz stets verificirt werden kann, sobald die Gültigkeit der Taylor'schen Formel feststeht; hingegen erweisen sie sich als *nicht nothwendige* insofern, als es thatsächlich *nicht nothwendig* ist, sie unter die *Voraussetzungen* aufzunehmen, welche die Gültigkeit der Taylor'schen Formel nach sich ziehen.

Beweis des Lehrsatzes. Dass die aufgestellten Bedingungen *nothwendig* sind, ergiebt sich folgendermaassen. Angenommen man habe:

$$(1) \qquad f(x) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x - x_0)^\nu \qquad (x_0 \leqq x < x_0 + R)$$

* *Grundzüge der Differential- und Integralrechnung.* (Leipzig, 1893.) Bd. I. p. 110.

so folgt zunächst, damit die Reihe überhaupt einen Sinn habe, dass die $f^{(\nu)}(x_0)$ (für jedes endliche ν) eindeutig bestimmte endliche Werthe haben müssen; sodann aber, dass $f(x)$ für das Intervall $(x_0 \leqq x < x_0 + R)$ als Summe einer convergirenden Reihe nach Potenzen von $(x - x_0)$ eindeutig bestimmte, endliche Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung besitzt. Setzt man sodann Gl. (1) in die Form:

$$(2) \qquad f(x_0 + h) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} h^\nu \qquad (0 \leqq h < R)$$

so folgt dass:

$$(3) \qquad f(x_0 + h + k) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{f^\nu(x_0)}{\nu!} (h + k)^\nu \quad \text{für: } 0 \leqq h + k < R$$

oder wenn man nach Potenzen von k ordnet, was sicher gestattet ist, wenn man h und k auch einzeln $\gtreqless 0$ annimmt:

$$(4) \qquad f(x_0 + h + k) = \sum_0^\infty {}^\lambda \left\{ \sum_\lambda^\infty {}^\nu \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{(\nu - \lambda)!} h^{\nu - \lambda} \right\} \frac{k^\lambda}{\lambda!}.$$

Da aber aus (2) folgt:

$$f^{(\lambda)}(x_0 + h) = \frac{\partial f^{(\lambda)}(x_0 + h)}{\partial h} = \sum_\lambda^\infty {}^\nu \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{(\nu - \lambda)!} h^{\nu - \lambda},$$

so geht Gl. (4) in die folgende über:

$$(5) \qquad f(x_0 + h + k) = \sum_0^\infty {}^\lambda \frac{f^{(\lambda)}(x_0 + h)}{\lambda!} k^\lambda \quad (0 \leqq h \leqq h + k < R)$$

sodass in der That:

$$(6) \qquad \lim_{n = \infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + h) k^n = 0 \quad \text{für: } 0 \leqq h \leqq h + k < R$$

werden muss, wie es die Bedingung (2) des ausgesprochenen Satzes erheischt.

Um nun ferner die vorstehenden Bedingungen als *hinreichend* für die Gültigkeit der Taylor'schen Formel zu erkennen, bemerke man zunächst, dass aus den sub (1) aufgestellten Bedingungen mit Hülfe des gewöhnlichen (sog. Rolle'schen) Mittelwerthsatzes die folgende Beziehung (die Taylor'sche Formel mit dem Lagrange'schen Restgliede resultirt:

$$(7) \qquad f(x_0 + h) = \sum_0^{n-1} {}^\nu \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} h^\nu + \frac{f^n(x_0 + \theta h)}{n!} h^n,$$

wo für jedes n der Werth von θ dem Intervalle (0, 1) angehört. Da aber, falls die Bedingung (6) besteht, dieses Restglied für $n = \infty$ und jeden dem Intervalle (0, 1) angehörigen Werth θ

sicher verschwindet, falls $h < \frac{R}{2}$, so findet man zunächst, dass die Beziehung:

(8) $$f(x_0+h) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} h^\nu = S(x_0, h)$$

vorläufig gilt für: $0 \leqq h < \frac{R}{2}$. Nimmt man also eine positive Grösse r beliebig wenig unterhalb R an, so liegt $h = \frac{r}{2}$ noch *innerhalb* des Bereiches, für welchen Gl. (8) gültig ist, und man hat daher:

(9) $$f\left(x_0 + \frac{r}{2}\right) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^\nu = S\left(x_0, \frac{r}{2}\right),$$

wobei die betreffende Reihe noch absolut convergent und gliedweise differenzirbar ist, also:

(10) $$f^{(\lambda)}\left(x_0 + \frac{r}{2}\right) = \sum_\lambda^\infty {}^\nu \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{(\nu-\lambda)!} \left(\frac{r}{2}\right)^{\nu-\lambda}$$

wird.

Um nun den Gültigkeitsbereich der Gl. (8) zu erweitern, gehe man jetzt statt von der Stelle x_0 in analoger Weise von $\left(x_0 + \frac{r}{2}\right)$ aus. Man erhält dann genau so, wie oben Gl. (7):

(11) $$f\left(x_0 + \frac{r}{2} + k\right) = \sum_0^{n-1} {}^\nu \frac{f^{(\nu)}\left(x_0 + \frac{r}{2}\right)}{\nu!} k^\nu + \frac{f^{(n)}\left(x_0 + \frac{r}{2} + \theta h\right)}{n!} k^n$$

und erkennt mit Hülfe von Gl. (6), dass das Restglied für $n = \infty$ sicher verschwindet, falls $k \leqq \frac{r}{4}$ genommen wird, sodass also:

(12) $$f\left(x_0 + \frac{r}{2} + k\right) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{f^{(\nu)}\left(x_0 + \frac{r}{2}\right)}{\nu!} k^\nu = S\left(x_0 + \frac{r}{2}, k\right)$$

für $0 \leqq k \leqq \frac{r}{4}$.

Nun ist andererseits:

$$S\left(x_0, \frac{r}{2} + k\right) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} \left(\frac{r}{2} + k\right)^\nu,$$

und diese Reihe darf, solange $\left|\frac{r}{2} + k\right| < R$ ist, also sicher für

positive $k \leqq \frac{r}{2}$ nach Potenzen von k geordnet werden, so dass sich ergiebt:

$$S\left(x_0, \frac{r}{2}+k\right) = \sum_0^\infty{}^\lambda \left\{\sum_\lambda^\infty{}^\nu \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{(\nu-\lambda)!}\left(\frac{r}{2}\right)^{\nu-\lambda}\right\} \frac{k^\lambda}{\lambda!}$$

$$= \sum_0^\infty{}^\lambda \frac{f^{(\lambda)}\left(x_0+\frac{r}{2}\right)}{\lambda!} k^\lambda \qquad \text{(nach Gl. (10))}$$

$$= S\left(x_0+\frac{r}{2}, k\right).$$

Mit Benützung dieses Resultates lässt sich aber Gl. (12) jetzt folgendermaassen schreiben:

$$f\left(x_0+\frac{r}{2}+k\right) = S\left(x_0, \frac{r}{2}+k\right) \text{ für: } 0 \leqq k \leqq \frac{r}{4}$$

oder, wenn man $\frac{r}{2}+k=h$ setzt:

$$(13) \qquad f(x_0+h) = S(x_0, h) \quad \text{für: } \frac{r}{2} \leqq h \leqq \frac{r}{2}+\frac{r}{4},$$

sodass also in Verbindung mit dem oben durch Gl. (8) dargestellten Resultate die Gültigkeit der fraglichen Beziehung nunmehr erwiesen ist für das Intervall:

$$0 \leqq h \leqq \frac{r}{2}+\frac{r}{4}.$$

Durch Anwendung der nämlichen Schlussweise kann man jetzt, von der Stelle $x_0+\frac{r}{2}+\frac{r}{4}$ ausgehend, diesen Gültigkeitsbereich um die Grösse $\frac{r}{8}$ erweitern, u. s. f.—sodass man also durch $(m-1)$malige Wiederholung dieses Verfahrens als Gültigkeitsbereich der Gl. (8) erhalten würde:

$$0 \leqq n \leqq \frac{r}{2}+\frac{r}{4}+\ldots+\frac{r}{2^m} \quad \text{d. h.} \leqq r-\frac{r}{2^m}.$$

Da hier m beliebig gross gedacht werden kann, so folgt schliesslich die Gültigkeit für:

$$0 \leqq h < r,$$

und somit auch für jedes h, welches der Bedingung genügt:

$$0 \leqq h < R,$$

da es ja für jedes $h < R$ immer noch unendlich viele Grössen r giebt, sodass $h < r < R$.

Hiermit ist also der oben ausgesprochene Lehrsatz vollständig bewiesen *.

Zusatz I. Aus dem obigen Satze folgt, falls $f(x)$ für das Intervall $(x_0 \leqq x < x_0 + R)$ den nothwendigen Bedingungen bezüglich der Differentialquotienten genügt, als *hinreichende* Bedingung für die Gültigkeit der Beziehung

$$f(x_0 + h) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu\,!} h^\nu \qquad (0 \leqq h < R)$$

die folgende: $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{n\,!} f^{(n)}(x_0 + h) \,.\, (R - h)^n = 0 \qquad (0 \leqq h \leqq R)$

oder anders geschrieben:

$$\lim_{n=0} \frac{1}{n\,!} f^{(n)}(x_0 + \theta R)(1 - \theta)^n \,.\, R^n = 0 \qquad (0 \leqq \theta \leqq 1).$$

Zusatz II. Will man den Lehrsatz auf ein von der Stelle x_0 nach *links* gelegenes Intervall übertragen, so tritt, wie man ohne weiteres erkennt, an die Stelle der Bedingung (2) die folgende:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n\,!} f^{(n)}(x_0 - h) \,.\, k^n = 0 \qquad \text{für: } 0 \leqq h \leqq h + k < R.$$

---

§ 3. *Beispiele von Functionen, welche trotz der Endlichkeit aller Differentialquotienten für $x = 0$ nicht nach der MacLaurin'schen Reihe entwickelbar sind.*

Zur Erläuterung der in § 1 gemachten Bemerkungen über die Hinfälligkeit der beiden Lagrange'schen Hypothesen betrachte ich jetzt den Ausdruck:

$$(1) \qquad f(x) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{\lambda^\nu}{\nu\,!} \cdot \frac{1}{1 + a^{2\nu} x^2},$$

wo a und λ irgend welche reelle Grössen bedeuten und $|a| > 1$ sein soll. Die Reihe convergirt unbedingt und gleichmässig für alle reellen x, in's besondere auch für die Stelle $x = 0$ und deren reelle Umgebung. Dasselbe gilt für die durch gliedweise

---

* Der Beweis des vorstehenden Satzes lässt sich, wie ich neuerdings bemerkt habe, noch merklich abkürzen, wenn man statt von der Lagrange'schen, von der Cauchy'schen Form des Restgliedes ausgeht. Man erkennt dies unmittelbar, wenn man die Bedingung (2) des Lehrsatzes in die Form setzt:

$$\lim \frac{1}{n} f^{(n)}(x_0 + \theta r)\,(1 - \theta)^n \,.\, r^n = 0$$

für jedes $r < R$ und $0 \leqq \theta \leqq 1$. (Eine ausführlichere und in gewisser Beziehung praecisere Darstellung des fraglichen Satzes ist inzwischen in den *Mathematischen Annalen*, Bd. XLIV. p. 57 ff. erschienen.)

Differentiation daraus abgeleiteten Reihen, sodass dieselben nach einem bekannten Satze auch wirklich die Differentialquotienten von $f(x)$ darstellen und somit, wie $f(x)$ selbst, für jedes noch so grosse endliche n endlich und stetig sind. Man bildet die letzteren am bequemsten, wenn man zunächst $f(x)$ in die Form setzt:

$$f(x) = \frac{1}{2i} \sum_0^\infty {}^\nu \frac{\lambda^\nu}{\nu!} \left\{ \frac{1}{a^\nu x - i} - \frac{1}{a^\nu x + i} \right\},$$

woraus ohne weiteres folgt:

$$(2) \qquad f^{(n)}(x) = \frac{1}{2i} \cdot n! \sum_0^\infty {}^\nu \frac{\lambda^\nu a^{n\nu}}{\nu!} \cdot \frac{(a^\nu x + i)^{n+1} - (a^\nu x - i)^{n+1}}{1 + a^{2\nu} x^2}.$$

Für $x = 0$ hat man daher:

$$(3) \qquad \begin{cases} f(0) = e^\lambda \\ f^{(2m-1)}(0) = 0 \quad f^{(2m)}(0) = (-1)^m \cdot (2m)!\ e^{\lambda \cdot a^{2m}}. \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich aber, dass die nach der MacLaurin'schen Formel für $f(x)$ gebildete Potenzreihe, nämlich:

$$(4) \qquad \phi(x) = \sum_0^\infty {}^\nu (-1)^\nu e^{\lambda \cdot a^{2\nu}} x^{2\nu}$$

für jedes noch so kleine x *divergirt*, sobald $\lambda > 0$ gewählt wird. Denn man hat in diesem Falle:

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[2\nu]{e^{\lambda a^{2\nu}}} = \lim_{\nu=\infty} (e^\lambda)^{\frac{a^{2\nu}}{2\nu}} = \infty.$$

Somit stellt die Reihe (1) für $\lambda > 0$ ein—offenbar sehr einfaches—Beispiel einer Function dar, welche an der Stelle $x = 0$ und für jede reelle Umgebung derselben eindeutig bestimmte und endliche Differentialquotienten besitzt, und dennoch *nicht* nach der MacLaurin'schen Reihe entwickelt werden kann, weil dieselbe für jedes noch so kleine x *divergirt*.

Nimmt man jetzt hingegen für λ einen Werth < 0 an, sodass also e^λ ein ächter Bruch wird, so ergiebt sich:

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[2\nu]{e^{\lambda \cdot a^{2\nu}}} = 0.$$

Mithin *convergirt* nunmehr die Reihe $\phi(x)$ für jedes noch so grosse x. Nichtsdestoweniger kann ihre Summe *nicht* mit der erzeugenden Function $f(x)$ übereinstimmen.

Man erkennt dies sofort, falls man der Variablen x auch *complexe* Werthe beilegt. Die Reihe (1) stellt dann nach einem bekannten Satze des Herrn Weierstrass eine analytische

Function der complexen Variablen x dar mit den ausserwesentlich singulären Stellen $x = \pm i, \ \pm ia^{-1}, \ \pm ia^{-2}, \ldots$ und der wesentlich singulären Stelle $x = 0$ (als Häufungspunkt der Stellen $ia^{-\nu}$ für wachsende ν)*. Sie kann also keinesfalls für irgend eine *complexe Umgebung* der Nullstelle nach Potenzen von x entwickelbar sein und aus bekannten Sätzen über die Fortsetzung analytischer Functionen ergiebt sich sodann, dass die Beziehung $f(x) = \phi(x)$ für *kein noch so kleines Flächen- oder Linienstück*, in's besondere also für keine noch so kleine *reelle Nachbarschaft* der Stelle $x = 0$ stattfinden kann.

Übrigens lässt sich die Nicht-Übereinstimmung von $f(x)$ und $\phi(x)$ wenigstens für Werthe von a, die eine gewisse Grösse erreichen oder übersteigen, auch ganz direct nachweisen, ohne auf die Theorie der Functionen complexer Variablen zu recurriren. Setzt man etwa $\lambda = -\lambda'$ und $\lambda' \leqq 1$, so folgt aus Gl. (1), dass für jedes x:

$$f(x) > \frac{1}{1+x^2} - \frac{\lambda'}{1+a^2x^2} > \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+a^2x^2}$$

und aus (4), dass zum mindesten für $|\, x \,| \leqq 1$

$$\phi(x) < e^{-1}.$$

Giebt man jetzt speciell x den Werth $a^{-\frac{1}{2}}$, so wird:

$$f(a^{-\frac{1}{2}}) > \frac{1}{1+\frac{1}{a}} - \frac{1}{1+a} \quad \text{d. h.} > \frac{a-1}{a+1}$$

und daher sicher: $\quad f(a^{-\frac{1}{2}}) > \frac{1}{e}$ also $> \phi(a^{-\frac{1}{2}})$

sobald: $\quad \frac{a-1}{a+1} \geqq e^{-1} \quad$ d. h. $a \geqq \frac{e+1}{e-1}$.

Aus der Nicht-Übereinstimmung von $f(x)$ und $\phi(x)$ für irgend eine einzige Stelle x lässt sich dann auch, wie ich in der oben citirten Abhandlung auseinandergesetzt habe †, lediglich mit Hülfe elementarer Sätze aus der *reellen* Functionen-Theorie erschliessen, dass die Beziehung $f(x) = \phi(x)$ für kein noch so kleines Intervall in der Nähe der Nullstelle stattfinden kann.

Da die hier betrachtete Function $f(x)$, wie ich glaube, das *erste* bekannte Beispiel eines mit allen Ableitungen wohl definirten

---

* Vgl. hierüber meine oben citirte Abhandlung, *Math. Ann.* Bd. XLII. p. 166 ff.

† a. a. O. p. 162.

arithmetischen Ausdruckes darstellt, der *trotz der Convergenz* der MacLaurin'schen Entwickelung dennoch nicht mit deren Summe $\phi(x)$ übereinstimmt, so schien es mir nicht uninteressant, über den Verlauf von $f(x)$ und $\phi(x)$, namentlich über den Grad der Abweichung zwischen diesen beiden Grössen, mit Hülfe einer graphischen Darstellung eine deutliche Anschauung zu gewinnen.

In der beigegebenen, auf meine Veranlassung von Herrn Diem hergestellten Zeichnung findet man die Curven mit den Ordinaten: $y = 2f(x) \quad \eta = 2\phi(x)$
für das Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ und die Parameter-Werthe $a = 1, \sqrt{2}$, $2, 2\sqrt{2}, 10, \sqrt{1000}, \infty$ dargestellt. Für den anderen Parameter λ wurde, als für die Rechnung besonders bequem, der Werth $lg\frac{1}{2}$ gewählt, sodass also:

$$f(x) = \sum_0^\infty{}^\nu \frac{(-lg 2)^\nu}{\nu!} \cdot \frac{1}{1 + a^{2\nu} x^2} \qquad \phi(x) = \sum_0^\infty{}^\nu (-1)^\nu \cdot (\tfrac{1}{2})^{a^{2\nu}} x^{2\nu}.$$

Die schwarzen Linien stellen den Verlauf von $2f(x)$, die punctirten den von $2\phi(x)$ dar.

Für $a = 1$ fallen $f(x)$ und $\phi(x)$ noch zusammen: man erhält

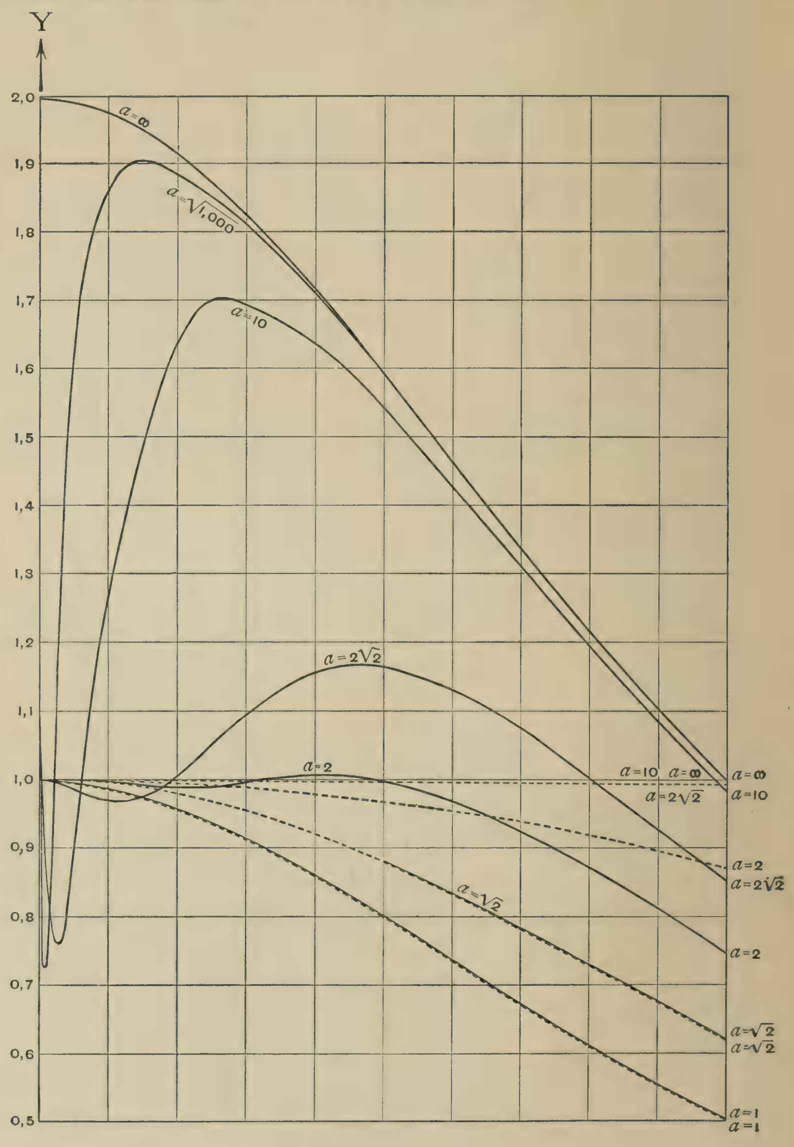
$$\left.\begin{array}{l} \text{nämlich für } a = 1: \quad f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \\ \text{und (wenigstens für } x^2 < 1) \text{ auch:} \\ \qquad \phi(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \end{array}\right\},$$

also $y = \eta = \dfrac{1}{1+x^2}$ durch eine Curve 3ter Ordnung dargestellt.

Für das andere Extrem $a = \infty$ wird $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, also $y = 2f(x)$ diejenige Curve 3ter Ordnung, die aus der oben erwähnten durch Verdoppelung der Ordinaten hervorgeht; dagegen $\eta = 2\phi(x) = 1$, als eine Parallele zur X-Axe im Abstande 1.

Zwischen diesen beiden Extremen verlaufen nun die Curven bei wachsenden Parameter-Werthen von a und es ist klar (wie auch ein Blick auf die definirenden Reihen lehrt), dass die Divergenz zwischen den f- und ϕ-Curven mit a beständig zunimmt. Für $a = \sqrt{2}$ ist sie bei $x = 0{,}5$ so gering, dass sie bei dem gewählten Maassstabe überhaupt nicht merklich ist, und auch weiterhin bei $x = 1$ sehr unerheblich. Dagegen zieht sich für den doppelten Werth $a = 2\sqrt{2}$ die ϕ-Curve schon sehr nahe an die

für $a = \infty$ resultirende Gerade und ist für Werthe wie $a = 10$ überhaupt nicht mehr davon zu unterschieden, sodass (wie die Figur zeigt) die Divergenz mit der f-Curve schon in grosser Nähe der Nullstelle ausserordentlich auffallend wird.



MÜNCHEN, 1 *August* 1893.

Sonderabdruck. Überreicht vom Verfasser.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA.

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN.

HERAUSGEGEBEN VON GUSTAF ENESTRÖM.

DRITTE FOLGE.

I. BAND. 3./4. HEFT.

ZUR GESCHICHTE DES TAYLORSCHEN LEHRSATZES.

Von

ALFRED PRINGSHEIM

IN MÜNCHEN.

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

IN LEIPZIG.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA.

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN.

DRITTE FOLGE.

Herausgegeben von **G. Eneström** in Stockholm, Brahegatan 43.

Druck und Verlag von **B. G. Teubner** in Leipzig, Poststrafse 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Recensionsexemplare u. s. w.) wolle man richten an den Herausgeber der Bibliotheca Mathematica:

Herrn G. Eneström, Stockholm (Schweden), Brahegatan 43

oder an die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig, Poststrafse 3, die um schnellste Weiterbeförderung an die Redaktion besorgt ist.

☞ Die Herren Verfasser erhalten — aufser einem Honorar von 20 Mark für den Druckbogen von 16 Seiten — von gröfseren Aufsätzen 20 mit Umschlag versehene, von kleineren Aufsätzen u. s. w. 10 Sonderabdrücke unentgeltlich, eine gröfsere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band der Bibliotheca Mathematica umfafst gegen 30 Druckbogen in 3 bis 4 Heften und kostet 20 Mk; jährlich soll zunächst etwa ein Band ausgegeben werden. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES ERSTEN BANDES.

Allgemeines über Geschichte der Mathematik.

Seite

Geschichte des Altertums.

Geschichte des Mittelalters.

[Fortsetzung auf der 3. Seite des Umschlags.]

Zur Geschichte des Taylorschen Lehrsatzes.

Von

Alfred Pringsheim in München.

Gelegentlich eines Vortrages, den ich vor kurzem im Münchener Mathematischen Verein hielt, nahm ich Veranlassung, einen grofsen Teil der auf den TAYLORschen Lehrsatz bezüglichen Litteratur einer genaueren Prüfung zu unterziehen[1]), und bin dabei zu einigen Ergebnissen gelangt, die vielleicht geeignet sind, gewisse wohl ziemlich allgemein verbreitete Ansichten in mehrfacher Beziehung zu berichtigen oder zu ergänzen. Da überdies eine einigermafsen eingehende und bis auf die neueste Zeit fortgeführte historische Darstellung des fraglichen Gegenstandes meines Wissens bisher nicht existiert, so dürfte, bei der fundamentalen Bedeutung jenes Theorems, die folgende Analyse der wichtigsten hierher gehörigen Arbeiten und eine daran anknüpfende Würdigung der im einzelnen durch sie erzielten Fortschritte, vielleicht nicht ganz überflüssig erscheinen.

I. *Die formale Ableitung der TAYLORschen Reihe.*

In BROOK TAYLORS *Methodus incrementorum directa et inversa* (Londini 1715) findet sich p. 21 ff. die erste Formulierung und Herleitung des fraglichen Lehrsatzes. Der Inhalt der hierauf sich beziehenden Betrachtung läfst sich, mit Benützung der heutzutage üblichen Bezeichnungen[2]), etwa folgendermafsen zusammenfassen:

---

1) Hierbei haben mir die zahlreichen und sorgfältigen litterarischen Notizen in dem betreffenden Artikel der *Encyklop. der math. Wissensch.* (Bd. II, p. 54 ff.: *Diff.- u. Integr.-Rechnung* von A. Voss) wesentliche Dienste geleistet.

2) Ich werde mich im Texte durchweg moderner und für die verschiedenen Arbeiten möglichst einheitlich gewählter Bezeichnungen bedienen, dagegen die Original-Bezeichnungen der betreffenden Verfasser, soweit es zum Zwecke leichterer Vergleichung dienlich erscheint, in den Anmerkungen hinzufügen.

TAYLOR bezeichnet a. a. O. die *unabhängige* Variable mit z, die *abhängige* mit x und schreibt:

Ist $f(x)$ eine Funktion der unabhängigen Veränderlichen x, so hat man:

$$f(x + \varDelta x) = f(x) + \varDelta f(x),$$
$$f(x + 2\varDelta x) = f(x) + 2\varDelta f(x) + \varDelta^2 f(x),$$
$$f(x + 3\varDelta x) = f(x) + 3\varDelta f(x) + 3\varDelta^2 f(x) + \varDelta^3 f(x)$$

und allgemein[1]):

$$(1) \qquad f(x + n \cdot \varDelta x) = f(x) + \frac{n}{1} \cdot \varDelta f(x) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \varDelta^2 f(x) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \varDelta^3 f(x) + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 1}{1 \cdot 2 \cdots n} \cdot \varDelta^n f(x).$$

Setzt man jetzt:

$n \cdot \varDelta x = h$, $(n-1) \cdot \varDelta x = h - \varDelta x = h_1$, $(n-2) \cdot \varDelta x = h - 2\varDelta x = h_2$, u. s. f.,

so ergiebt sich zunächst TAYLORS *Theorema III* (l. c. p. 21)

$$(2) \quad f(x+h) = f(x) + \frac{\varDelta f(x)}{\varDelta x} \cdot \frac{h}{1} + \frac{\varDelta^2 f(x)}{\varDelta x} \cdot \frac{h h_1}{1 \cdot 2} + \frac{\varDelta^3 f(x)}{\varDelta x^3} \cdot \frac{h h_1 h_2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{\varDelta^n f(x)}{\varDelta x^n} \cdot \frac{h h_1 \cdots h_{n-1}}{1 \cdot 2 \cdots n},$$

und hieraus für $\lim \varDelta x = 0$, $\lim n = \infty$, das *Corollarium II* (a. a. O. p. 23)[2]):

$$\underset{.}{z};\ x,\ \underset{..}{x},\ \underset{\vdots}{x},\ \ldots\ \underset{n}{x}$$

statt:

$$\varDelta z;\ \varDelta x,\ \varDelta^2 x,\ \varDelta^3 x,\ \ldots\ \varDelta^n x,$$

und:

$$\dot{z};\ \dot{x},\ \ddot{x},\ \dddot{x},\ \ldots\ \overset{n}{x}$$

statt:

$$dz;\ dx,\ d^2 x,\ d^3 x,\ \ldots\ d^n x.$$

Ferner:

$$v,\ \grave{v},\ \grave{\grave{v}}\ \ldots$$

für:

$$h,\ h_1,\ h_2,\ \ldots$$

1) Die Formel (1) bezw. (2) wird gewöhnlich schlechthin als NEWTONsche Interpolationsformel bezeichnet: wie mir scheint, nicht ganz mit Recht. Allerdings findet sich ihr *wesentlicher Inhalt* schon bei NEWTON: Brief an OLDENBURG (zur Mitteilung an LEIBNIZ) vom 24. Oktober 1676 (*Opusc. math.* Ed. CASTILLIONEUS, T. I, p. 328); *Principia philos. nat.*, Lib. III, Prop. XL, Lemma V (Ed. LE SEUR et JACQUIER, T. III, p. 583); *Methodus differentialis*, 1711 (*Opusc. math.* T. I, p. 271 ff.). Allein Herleitung und Endresultat erscheint bei NEWTON äufserst schwerfällig und unübersichtlich (man vgl. selbst die schon erheblich modernisierte Darstellung bei CANTOR, *Gesch. der Math.* III, p. 358—361). Die Möglichkeit einer durchsichtigen Herleitung und prägnanten Schreibweise der Formel beruht wesentlich auf der zuerst von TAYLOR vorgenommenen Einführung besonderer *Zeichen* (s. oben) für die *Differenzen verschiedener Ordnung.*

2) Die Ausführung des Grenzüberganges ist natürlich unzulänglich. Denn die Beziehung $\lim\limits_{\varDelta x = 0} h_\nu = h$ besteht nur für jedes endliche ν bezw. für solche unendlich werdende ν, die der Bedingung $\nu < n$ genügen. Infolge dessen steht also nicht nur die *Konvergenz*, sondern selbst im *Falle der Konvergenz* noch die *Gültigkeit* der Gl. (3) in Frage.

$$(3)\ f(x+h) = f(x) + \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{h}{1} + \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots \textit{ in inf.}$$

In analoger Weise, wie T. gleichfalls ausdrücklich angiebt:

$$(3^a)\ f(x-h) = f(x) - \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{h}{1} + \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} - \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

Obschon die Beziehung (3) mit Recht als TAYLORsche Reihenentwickelung bezeichnet zu werden pflegt, so ist doch neuerdings TAYLORS Priorität zu Gunsten von JOHANN BERNOULLI bestritten worden — zuerst wohl von G. PEANO[1]), welcher im Zusatze zu Nr. 67 von GENOCCHIS *Calcolo differenziale* (1884), p. XVII die folgende Bemerkung macht[2]):

Es ist jedoch zu bemerken, dafs JOH. BERNOULLI 1694 eine Formel angab, die seinen Namen führt und auch der TAYLORschen etwa gleichkommt, da man mittelst Vertauschung von Buchstaben von der einen zur anderen übergehen kann. Vgl. JOH. BERNOULLI, *Opera omnia*, T. I, p. 125. *Wir halten daher seinen Anspruch auf die Priorität nicht für unberechtigt:* „Quam eandem seriem postea TAYLORUS, interjecto plus quam viginti annorum intervallo, in librum quem edidit a. 1715 *De Methodo incrementorum*, transferre dignatus est, sub alio characterum abitu“. *Opera*, T. II, p. 584.

Hiergegen ist vor allem einzuwenden, dafs die citierte Reklamation BERNOULLIS sich überhaupt *ganz und garnicht* auf die TAYLORsche Reihe (3) bezieht, sondern, wie der von BERNOULLI ausdrücklich hinzugefügte, von PEANO weggelassene Zusatz: „*Vid. ejus* (sc. TAYLORI) *lib. p. 39*“ — unzweideutig beweist, einzig und allein die sog. BERNOULLIsche Reihe betrifft[3]), d. h. die von B. zuerst in den Acta Erud. von 1694, p. 438 (= *Opera*, T. I, p. 126) publizierte Entwickelung:

$$(4)\qquad \int_0^x \varphi(x)\,dx = \varphi(x) \cdot x - \varphi'(x) \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \varphi''(x) \cdot \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \cdots.$$ [4])

TAYLOR giebt nämlich an der von B. citierten Stelle eine Herleitung *dieser* Reihe (4) und zwar ohne irgendwelchen Zusammenhang mit der Reihe (3)[5]) — natürlich „*sub alio characterum abitu*“, d. h. mit Verwendung der durchgehends von TAYLOR benützten, von der BERNOULLI-LEIBNIZschen

1) Sonst z. B.: M. SIMON, *Zur Geschichte und Philosophie der Diff.-Rechnung;* Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. 8, 1898, p. 130. — *Encykl. der math. Wissensch.*, Bd. II, p. 74, Fufsn. 78.

2) Ich citiere nach der deutschen Ausgabe (Leipzig 1899), p. 319.

3) Vgl. auch: Acta Erud. 1721, p. 201 = BERNOULLI *Opera,* T. II, p. 488.

4) BERNOULLI schreibt:

$$\text{Integr. } n\,dz = nz - \frac{z^2}{2} \cdot \frac{dn}{dz} + \frac{z^3}{2 \cdot 3} \cdot \frac{d^2 n}{dz^2} - \cdots.$$

5) Einen solchen Zusammenhang hat wohl TAYLOR gerade so wenig geahnt, wie BERNOULLI.

völlig abweichendeu *Bezeichnungsweise.*[1]) Der fragliche Zusatz hat also bei BERNOULLI ganz und garnicht die ihm von PEANO untergelegte Bedeutung, dafs man „*mittelst Vertauschung von Buchstaben*" von der BERNOULLIschen Reihe (4) zur TAYLORschen (3) übergehen könne. Für BERNOULLI, der auf die Entwickelung (4) sehr grofsen Wert legt und in seinem Briefwechsel mit LEIBNIZ mehrfach auf dieselbe zurückkommt, ist dieselbe immer nur ein (von ihm sehr überschätztes) *Hülfsmittel zur Auswertung von Integralen:* „Series universalissima, quae omnes quadraturas et rectificationes generaliter exprimit".[2]) An die Möglichkeit, von der Reihe (4) zur TAYLORschen Entwickelung (3) zu gelangen, *hat er niemals gedacht:* bei seiner nahezu pathologischen Eitelkeit und dem leidenschaftlichen Streben, gerade dem TAYLORschen Buche jegliches Verdienst zu nehmen[3]), hätte er mit einer derartigen Entdeckung keinen Augenblick zurückgehalten.

Im übrigen ist die schliefsliche Äquivalenz der Reihen (3) und (4) keineswegs so unmittelbar einleuchtend, wie man auf Grund der PEANOschen Bemerkung annehmen müfste. Allerdings hat es nicht die geringste Schwierigkeit, aus der TAYLORschen Reihe (3) die BERNOULLIsche (4), bezw. die folgende, durch die Substitution $\varphi(x) = f'(x)$ daraus hervorgehende[4]):

$$(4^{a}) \qquad f(x) - f(0) = f'(x) \cdot x - f''(x) \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} + f'''(x) \cdot \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \cdots$$

abzuleiten: man hat dazu in (3) nur $h = -x$ zu setzen.[5]) Die Reihe (4^{a}) erscheint somit zunächst als ein *spezieller Fall* von (3). Dafs es aber auch *umgekehrt* möglich sei, von der *speziellen* Reihe (4^{a}) zu der *allgemeinen* (3) zu gelangen, liegt keineswegs auf der Hand: die blofse Er-

---

1) TAYLOR schreibt:

$$\boxed{\dot{r}s} = rs - \acute{r}\dot{s} + \acute{\acute{r}}\ddot{s} - \acute{\acute{\acute{r}}}\dddot{s} + \cdots,$$

d. h.

$$\int dr \cdot s = rs - \int r\,dr \cdot \frac{ds}{dr} + \int dr \int r\,dr \cdot \frac{d^2 s}{dr^2} - \int dr \int dr \int r\,dr \cdot \frac{d^3 s}{dr^3} + \cdots.$$

2) *Commerc. epist.* T. 1, p. 15. Vgl. auch ebendas. p. 28 und p. 75 (an letzterer Stelle ein neuer Beweis der Formel (4)).

3) Man beachte z. B. nur die folgende Stelle aus dem Briefe an LEIBNIZ, vom August 1716 (*Comm. epist.* T. II, p. 309): „Accepi tandem TAYLORI libellum. Quid, bone Deus, sibi vult scriptor, sua affectata caligine, qua involvit res quoque sua natura clarissimas? Haud dubie, ut tegat sui furandi studium: quantum enim capio, quantum sapio, nihil nisi res nostras nobis surreptas ibi observo, per densissimam obscuritatis nebulam".

4) In dieser Form (bei $f(0) = 0$) erscheint die BERNOULLIsche Reihe bei LEIBNIZ: Brief an BERNOULLI vom Dezember 1694 (*Comm. epist.* T. I, p. 22).

5) So schon bei EULER: *Inst. calc. diff.* (Petropoli 1755), Cap. III, § 67 (p. 353).

kenntnis dieser Möglichkeit erfordert schon ein nicht unerhebliches Maſs analytischen Scharfblickes und die wirkliche Auffindung der erforderlichen Transformation[1]) dürfte selbst manchem modernen Mathematiker immerhin einige Mühe verursachen.[2]) Im übrigen hätte man wohl schwerlich jemals ohne weiteres aus der BERNOULLIschen *Integralformel* die TAYLORsche *Reihenentwickelung* hergeleitet, wenn diese nicht schon unabhängig davon auf viel naturgemäſserem Wege aufgefunden worden wäre. Das fundamentale Problem:

> Eine Formel zu finden, welche gestattet $f(x+h)$ für jedes h (innerhalb geeigneter Grenzen) zu *berechnen*, wenn $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ... für irgend ein bestimmtes x als bekannt angesehen werden —

wurde thatsächlich *zuerst* von TAYLOR gestellt und im wesentlichen (d. h. ohne Angabe der Gültigkeitsgrenzen[3]) auch gelöst; während die angebliche Priorität BERNOULLIS sich in Wahrheit auf die durchaus *moderne* Erkenntnis reduziert, daſs man den bereits vorhandenen TAYLORschen Satz *a posteriori* auch mit Hülfe der BERNOULLIschen *Integrationsformel*[4]) beweisen kann.

In wieweit TAYLOR die Tragweite seines Satzes erkannt haben mag, ist nicht genügend ersichtlich. Zunächst hat er jedenfalls nur dessen Anwendung zur Integration von Differentialgleichungen im Auge.[5]) Bei dieser

---

1) Man schreibe in Gl. (4^a) $\varphi(h)$ statt $f(x)$, also:

$$\varphi(h)-\varphi(0)=\varphi'(h)\cdot h-\varphi''(h)\cdot\frac{h^2}{1\cdot 2}+\varphi'''(h)\cdot\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}-\cdots$$

und substituiere sodann:

$$\varphi(h)=f(t-h),\quad \text{also:}\ \varphi^{(\nu)}(h)=(-1)^\nu\cdot f^{(\nu)}(t-h).$$

Alsdann wird:

$$f(t-h)-f(t)=-\left\{f'(t-h)\cdot h+f''(t-h)\cdot\frac{h^2}{1\cdot 2}+f'''(t-h)\cdot\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}-\cdots\right\}$$

und man gelangt schlieſslich zu der Beziehung (3), wenn man noch $t-h=x$, also: $t=x+h$ setzt.

2) Als Beleg hierfür möchte ich anführen, daſs in BERTRANDS groſsem *Traité du calc. diff.* p. 310 zwar der Übergang von (3) zu (4^a) gezeigt, die umgekehrte Möglichkeit dagegen mit keinem Worte angedeutet wird. Vielmehr heiſst es in Bezug auf den Charakter der Reihe (4^a) nur ganz ausdrücklich: „Cette série est d'une forme très-différente et en général beaucoup moins utile que la série de TAYLOR“.

3) TAYLORS Beweis ist im übrigen kaum unzulänglicher, als fast alle auf Grenzübergängen beruhende Beweise aus jener Zeit, insbesondere z. B. BERNOULLIS und LEIBNIZ' Beweise für die B.'sche Reihe. Der Beweis, den TAYLOR für die *letztere* giebt, ist sogar einfacher und dabei relativ strenger als die genannten (vgl. die Darst. bei CANTOR, Bd. III, p. 368).

4) D. h. schlieſslich mit Hülfe *partieller Integration* (vgl. unten Gl. (50)).

5) A. a. O. p. 24 ff. — Eine andere Anwendung zur Auflösung numerischer Gleichungen: Phil. Transact. T. **30** (1717), p. 610 ff. (vgl. CANTOR, III, p. 393).

Gelegenheit hebt er auch ausdrücklich diejenige Spezialform seiner Reihe hervor[1]), welche heute allgemein als MAC LAURINsche Reihe bezeichnet wird, nämlich die im Falle $x = 0$ resultierende Entwickelung von $f(h)$ nach Potenzen von h; und er fügt noch hinzu, dafs man in diesem Falle auch die Methode der unbestimmten Koeffizienten zur Koeffizientenbestimmung benützen könne.

Mit Recht bezeichnet daher MAC LAURIN in seinem *Treatise of fluxions* (Edinburgh 1742), p. 611 die Entwickelung[2]):

$$(5) \qquad f(x) = f(0) + f'(0) \cdot \frac{x}{1} + f''(0) \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \cdots$$

geradezu als eine schon von TAYLOR angegebene.[3]) Er leitet dieselbe nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten durch wiederholte Differentiation ab, d. h. er beweist die Gültigkeit der (fälschlich nach ihm benannten) Formel (5) unter der Voraussetzung, dafs die Entwickelbarkeit von $f(x)$ in eine konvergierende Potenzreihe von vornherein feststeht, und giebt sodann einige einfache Beispiele für deren Anwendung (Entwickelung[4]) von a^x, $\cos\frac{x}{a}$, $\sin\frac{x}{a}$).[5])

Reichlichere Anwendungen dieser Art findet man erst bei EULER (*Instit. calc. diff.* Cap. III, IV), dessen *Beweis* des TAYLORschen Satzes übrigens noch genau mit dem ursprünglich von T. selbst gegebenen übereinstimmt.[6])

Eine kurz vor dem Erscheinen der EULERschen Differentialrechnung

---

1) A. a. O. p. 27: „Quoties fieri potest ipsius z valor datus aequalis nihilo etc.".

2) MAC LAURIN schreibt:

$$E, \frac{\dot{E}}{\dot{z}}, \frac{\ddot{E}}{\ddot{z}}, \ldots$$

für:

$$f(0), \left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=0}, \left(\frac{d^2f(z)}{dz^2}\right)_{z=0}, \ldots$$

3) Warum CANTOR (Bd. III, p. 660) dies nicht gelten lassen will, scheint mir nicht recht verständlich.

4) Die betreffenden Reihen selbst finden sich schon in NEWTONS um 1666 vollendeter (s. CANTOR, Bd. III, p. 64) *Analysis per aequationes numero terminorum infinitas* (*Opusc. math.* p. 21, 22; vgl. auch p. 300, 302).

5) Weit wichtiger ist seine Anwendung der TAYLORschen Reihe zur Ableitung der freilich vorher auch schon von EULER angegebenen *Summenformel*, die er übrigens durchaus unabhängig von E. gefunden zu haben scheint: vgl. REIFF, *Gesch. der unendl. Reihen*, p. 87; CANTOR, Bd. III, p. 663.

6) A. a. O. Cap. III, § 45 (p. 333). — Von EULER rührt die Einführung der *Differenzenzeichen* Δ, Δ^2, ... Δ^n her: a. a. O. Cap. I, § 4—7 (p. 5 ff.).

von D'ALEMBERT[1]) gelegentlich gegebene Herleitung der TAYLORschen Reihe beruht auf der (offenbar inkorrekten[2])) Beziehung:

$$(6) \qquad f(x+h) = f(x) + \int f'(x+h) \cdot dh$$

und deren wiederholter Anwendung auf $f'(x+h)$, $f''(x+h)$, etc. Bei n-maliger Wiederholung des betreffenden Umformungsprozesses würde man zu einem Ausdrucke für das *Restglied* der TAYLOR'schen Entwickelung durch ein n-fach iteriertes Integral gelangen: von einer derartigen Möglichkeit ist aber bei D'ALEMBERT (dem schon seine äufserst unvollkommenen Bezeichnungen — s. Fufsn. 1) — eine solche Verallgemeinerung garnicht gestatten) *auch nicht einmal andeutungsweise* die Rede: das beschriebene Verfahren dient ihm ausschliefslich dazu, um das Bildungsgesetz der einzelnen *Reihen*glieder zu bestimmen. Und wenn LACROIX in seinem *Traité du calc. diff. et intégr.*, T. III (2de éd. 1819), p. 397 den Restausdruck:

$$(7) \qquad R_n = \int^{(n)} f^{(n)}(x+h) \cdot dh^n \qquad \left(\text{d. h.} \int_0^h dh_1 \int_0^{h_1} dh_2 \cdots \int_0^{h_{n-1}} f^{(n)}(x+h_n) \cdot dh_n\right)$$

ohne weiteres auf D'ALEMBERTS Rechnung setzt, so legt er eben in jene ziemlich oberflächlich abgefafste Gelegenheitsnote mehr hinein, als wirklich darin steht. Ob übrigens D'ALEMBERT das TAYLORsche Resultat gekannt hat oder nicht, mufs dahingestellt bleiben: jedenfalls teilt er die betreffende Reihenentwickelung a. a. O. wie eine *völlig neue* mit. Immerhin erscheint es unerfindlich, warum nun auch CONDORCET in der *Encyclopédie méthodique, Mathématiques*, T. III (1789), p. 34, 35 (Art. „Série") den TAYLORschen Satz immer nur als „le théorème D'ALEMBERT" anführt, nachdem er denselben *früher*, nämlich im 1. Bande (1784), p. 104 (Art. „Approximation") ganz richtig als „théorème de TAYLOR"[3]) bezeichnet hat

1) *Recherches sur différents points importants du système du monde*, T. I (Paris, 1754), p. 50. — D'ALEMBERT schreibt:

$$\varphi(z+\zeta), \quad \Delta(z), \quad \Gamma(z), \quad \Psi(z)$$

für:

$$f(x+h), \quad f'(x), \quad f''(x), \quad f'''(x).$$

2) Es müfste zum mindestens heifsen:

$$f(x+h) = f(x) + \int f'(x+h) \cdot dh + C$$

oder noch präziser:

$$f(x+h) = f(x) + \int_0^h f'(x+h) \cdot dh.$$

3) Es ist dies wohl eine der *ersten* Stellen, an welcher die fragliche Entwickelung als „TAYLORscher Satz" bezeichnet wird. Bekanntlich führt KLÜGEL (Bd. V, p. 6,

und die Mitteilung des Beweises ausdrücklich auf den Artikel „Série“ verschiebt.

II. *Das Restglied der Taylorschen Formel.*[1])

Nach dem oben Gesagten wird man die in Rede stehende Leistung d'Alemberts etwa folgendermaſsen charakterisieren können: er hat zur Herleitung der Taylorschen Reihe eine *Methode* angegeben, welche bei korrekter Anwendung zugleich auch zu einer formalen Darstellung des *Restgliedes* führt; dieses *letztere Ziel* selbst aber hat ihm durchaus fern gelegen.[2])

Die *zielbewuſste* Aufstellung und Diskussion des *Restgliedes* beginnt erst[3]) mit Lagranges *Théorie des fonctions analytiques* (*erste* Auflage: *an* V = 1797)[4]) und wird alsbald weitergeführt in dessen *Leçons sur le calcul des fonctions* (an der *École polytechnique* vorgetragen *an* VII = 1799, zuerst publiziert 1801 in dem *Recueil des leçons de l'école normale*, wieder abgedruckt im Journal de l'école polyt. Cah. **12**, 1804).[5]) Da mir bezüglich der von Lagrange gefundenen Resultate nur unzulängliche Angaben begegnet sind, so glaube ich, trotz der allgemeinen Verbreitung

Art. Taylorscher Satz) und, wohl nach dessen Vorgange, auch Cantor (Bd. III, p. 368) jene Benennung auf Simon l'Huiliers *Exposition élément. des calc. sup.* (1786) zurück (sie findet sich übrigens daselbst ein einziges Mal und zwar nur in einem *Anhange* [p. 207]): doch muſs sie wohl um jene Zeit schon ziemlich allgemein üblich gewesen sein, wie auſser der citierten Stelle bei Condorcet u. a. auch die folgenden von Klügel (a. a. O. p. 11) angeführten Schriften beweisen: Pfleiderer, *Demonstratio theorematis Tayloriani*, Tubingae 1789. — Beck, *De theoremate Tayloriano*, Halae 1791.

1) Mit der *„Geschichte des Restes der Taylorschen Reihe“* beschäftigt sich eine mir erst während des Druckes dieses Aufsatzes durch Herrn Eneström mitgeteilte Dissertation von E. Marloh (Göttingen 1881), welche neben manchem brauchbaren auch vielerlei unzulängliches und sogar unrichtiges enthält.

2) Im übrigen ist ja auch mit jenem n-fachen Integrale zunächst nicht viel anzufangen. Zu einer wirklichen *Abschätzung* des Restes wird es erst brauchbar durch Anwendung des (zu d'Alemberts Zeit noch nicht in Übung gekommenen, wenn auch dem Inhalte nach teilweise bekannten) *Mittelwertsatzes* der Integralrechnung: man gelangt sogar auf diese Weise zur allereinfachsten Herleitung der sog. Lagrangeschen Restform (vgl. Lacroix, a. a. O. p. 399). — Bez. der Reduktion auf ein *einfaches* Integral vgl. p. 451, Fuſsn. 2).

3) In der Abhandlung: *Sur une nouvelle espèce de calcul etc.* (Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin a. 1772 = *Oeuvres* T. III, p. 445), in welcher Lagrange eine formale Herleitung der Taylorschen Reihe nebst Übertragung auf Funktionen von n Variablen giebt, steht er noch ganz auf dem inexakten Standpunkte Taylors.

4) Die *zweite* verbesserte Auflage erschien 1813 (auch Journ. de l'école polyt. Cah. 9) und ist als T. IX in den *„Oeuvres“* wieder abgedruckt.

5) *Zweite* verbesserte Aufl. 1806 = *Oeuvres*, T. X.

Deutsche Mathematiker-Vereinigung.

Separat-Abdruck aus dem Nachtrags-Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente.

48a. Graphische Darstellung einerFunction die nicht nach der Mac Laurin'schen Reihe entwickelt werden kann, obschon die letztere convergirt, nach Angabe von Professor **Alfred Pringsheim** in München.

Setzt man

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} \frac{\lambda^{\nu}}{\nu!} \cdot \frac{1}{1 + a^{2\nu} x^{2}}$$

wo λ eine beliebige reelle Grösse, a^2 positiv und > 1, so erkennt man ohne weiteres, dass $f(x)$ nicht nach positiven Potenzen von x entwickelt werden kann, da in jeder noch so kleinen complexen Umgebung der Nullstelle unendlich viele singuläre Stellen $x = i a^{-\nu}$ liegen.

Nichts desto weniger besitzt $f(x)$ für $x = o$, sofern man unter x jetzt durchweg eine reelle Veränderliche versteht, bestimmte endliche Differential-Quotienten jeder endlichen Ordnung.

Setzt man nämlich $f(x)$ in die Form:

$$f(c) = \frac{1}{2i} \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} \frac{\lambda^{\nu}}{\nu!} \left\{ \frac{1}{a^{\nu}x - i} - \frac{1}{a^{\nu}x + i} \right\}$$

so folgt durch gliedweise Differentiation (welche wirklich die Differential-Quotienten von $f(x)$ liefert, da die ursprüngliche und jede durch Differentiation daraus abgeleitete Reihe für alle reellen x gleichmässig convergent dass:

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2i} \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} \frac{\lambda^{\nu} . a^{n\nu}}{\nu!} \cdot \frac{(a^{\nu}x + i)^{n+1} - (a^{\nu}x - i)^{n+1}}{(a^{2\nu}x^{2} + 1)^{n+1}}$$

Mithin ergibt sich:

$$(2) \qquad f^{(2m-1)}(o) = o \qquad f^{2m}(0) = (-1)^{m} . (2m)!\, e^{\lambda a^{2m}}$$

Setzt man jetzt:

$$3) \qquad \varphi(x) = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} \frac{f^{(\nu)}(o)}{\nu!} x^{\nu} = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} (-1)^{\nu} e^{\lambda . a^{2\nu}} x^{2\nu}$$

so erkennt man aus der Beziehung:

$$\mathrm{bm}_{n=8} \sqrt[n]{e^{\lambda . a^{2n}}} = \mathrm{bm}_{n=8} \left(e^{\lambda}\right)^{\frac{a^{2n}}{n}} \begin{cases} = \infty & \text{falls } \lambda > 0 \\ = 0 & \text{— } \lambda < 0 \end{cases}$$

---

*) Herr *Diem* hatte die Freundlichkeit, diese Construction nach meinen Angaben auszuführen.

dass die mit $\varphi(x)$ bezeichnete Reihe d. h. die mit den Erzeugenden $f(x)$ gebildete *Mac Laurin'sche Entwickelung* für jedes noch so kleine x divergirt, falls λ positiv, dagegen für jedes noch so grosse x convergirt, falls λ negativ. Im ersteren Falle wird also $f(x)$ ein Beispiel einer Function darstellen, welcher trotz der Endlichkeit aller Differential-Quotienten jeder endlichen Ordnung, eine für jedes x divergente *Mac-Laurin'sche Entwickelung* zukommt; im zweiten Falle erzeugt dagegen $f(x)$ eine convergente *Mac-Laurin'sche Reihe*, deren Summe $\varphi(x)$ jedoch nicht mit $f(x)$ übereinstimmen kann, da, nach dem zu Anfang gesagten, für $f(x)$ die Entwickelbarkeit nach Potenzen von x von vornherein ausgeschlossen erscheint.

Um über die Grösse der Abweichnung zwischen $f(x)$ und $\varphi(x)$ einen deutlichen Ueberblick zu gewinnen, habe ich die Curven mit den Gleichungen:

$$y = 2f(x) \qquad\qquad \eta = 2\varphi(x)$$

für das Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ und für verschiedene Werte des Parameters a construiren lassen. Für den anderen verfügbaren Parameter λ wurde als besonders bequem für die Rechnung ein für allemal der Wert

$$\lambda = \lg \tfrac{1}{2} = -\lg 2$$

gewählt, so dass also

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} \frac{(-\lg 2)^{\nu}}{\nu!} \cdot \frac{1}{1 + a^{2\nu} x^{2}}$$

$$\varphi(x) = \sum_{0}^{\infty}{}^{\nu} (-1)^{\nu} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{a^{2\nu}} \cdot x^{2\nu}$$

In der beigegebenen Figuren-Tafel sind die f-Curven durch schwarze, die φ-Curven durch rote Linien dargestellt.

Es liegt auf der Hand, dass die Abweichung zwischen einer f-Curve und der entsprechenden d. h. zu dem nämlichen Werte von a gehörigen φ-Curve um so stärker hervortreten wird, je grösser a ist. Legt man a die beiden extremen Werte $a = 1$ und $a = \infty$ bei, so ergibt sich für $a = 1$:

$$2f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad 2\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

(letztere Gleichung unter der Voraussetzung $x^2 < 1$)

d. h. für $a = 1$ fallen in dem betrachteten Intervalle die f- und die φ-Curve in eine gewisse Curve 3. Ordnung zusammen.

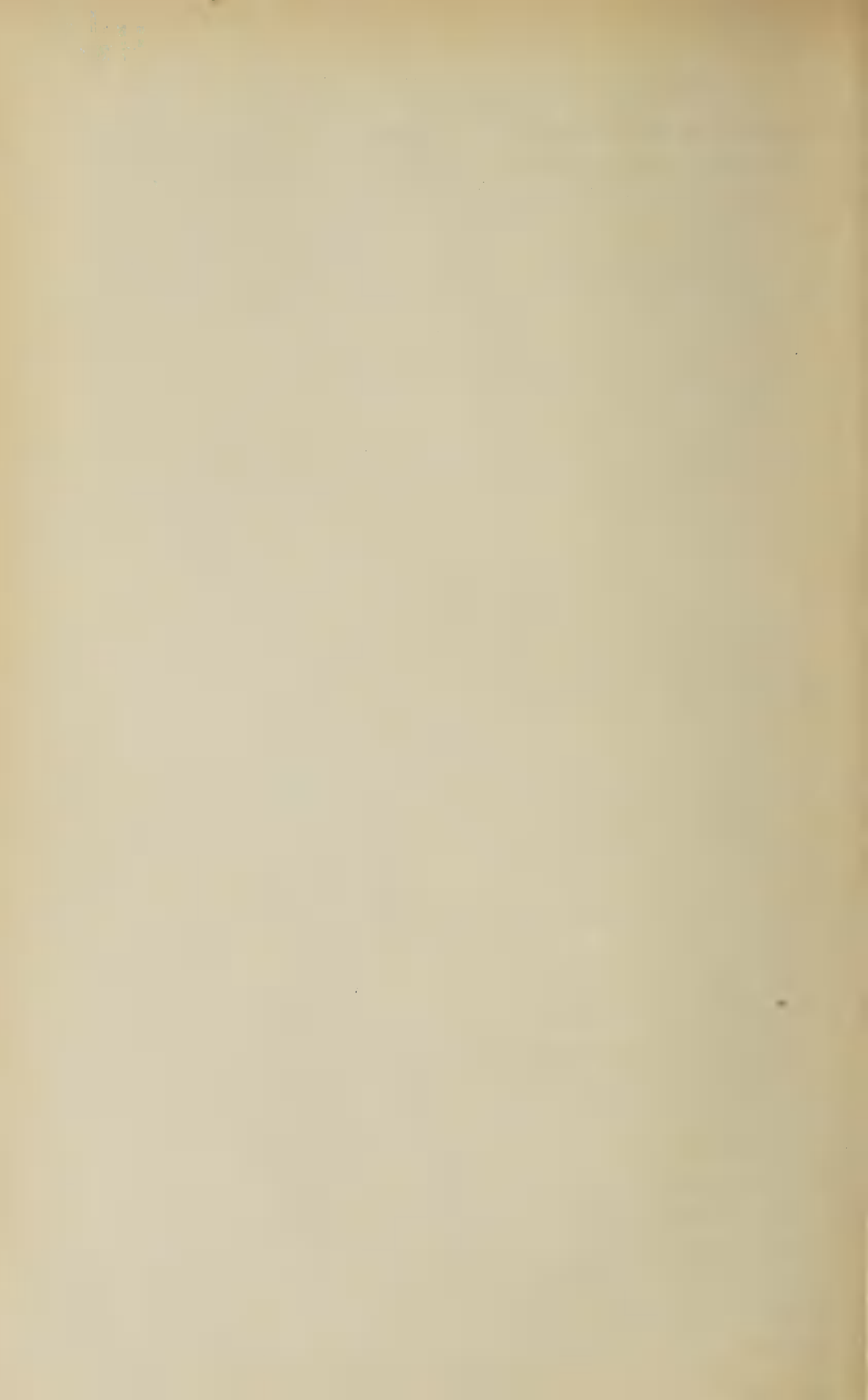
Dagegen wird für $a = \infty$

$$2f(x) = \frac{2}{1+x^2} \qquad\qquad 2\varphi(x) = 1$$

d. h. die f-Curve ist in diesem Falle diejenige Curve 3. Ordnung, deren Ordinate durch Verdoppelung der zu $a = 1$ gehörigen entstehen; während die φ-Curve in eine Parallele zur x-Axe im Abstande 1 übergeht.

Zwischen diesen Extremen verlaufen nun die f- und die φ-Curven für $1 < a < \infty$, wie dies in der Figur für $a = \sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$, $a = \sqrt{1000}$ dargestellt ist. Für $a = \sqrt{2}$ ist die Abweichung zwischen der f- und der φ-Curve für $0 \leqq x \leqq 0{,}5$ bei dem gewählten Masstabe noch gar nicht, für $0{,}5 < x \leqq 1$ immerhin sehr schwach merklich. Sie wird dagegen schon sehr deutlich für $a = 2$ und noch mehr für $a = 2\sqrt{2}$; im letzteren Falle verläuft die φ-Curve schon sehr nahe an der für $a = \infty$ resultirenden Ge-

raden, von der sie für noch einigermassen grössere Werte von a — z. B. a = 10 — überhaupt nicht mehr unterschieden werden kann (NB. immer unter der Voraussetzung $x \leqq 1$). Für $x = o$ und jedes noch so grosse endliche a haben sämmtliche f- und φ-Curven die Ordinate $y = \eta = 1$, und zwar findet dort zwischen je einer f-Curve und der zugehörigen φ-Curve eine Berührung von unendlich hoher Ordnung statt [da ja für jedes noch so grosse n: $f^{(n)}(o) = \varphi^{(n)}(o)$]. Nur für $a = \infty$ nimmt die Ordinate y der f-Curve plötzlich den Wert 2 an (während auch hier $\eta = 1$ bleibt): die f-Curven besitzen nämlich rechts von der Nullstelle ein Maximum, welches mit wachsendem a der Nullstelle immer näher rückt und für $a = \infty$ mit $x = o$ zusammenfällt. (Pringsheim.)



von LAGRANGES Schriften, eine etwas umständlichere Analyse der betreffenden Untersuchungen an dieser Stelle nicht umgehen zu können.

Der wesentliche Inhalt der zunächst in Betracht kommenden Paragraphen 35—40 der *Théorie des fonctions*[1]) läſst sich etwa folgendermaſsen formulieren.[2])

Definiert man $r_n(x, h)$ durch die Gleichung:

$$(8)\quad f(x+h) = f(x) + f'(x)\cdot\frac{h}{1!} + \cdots + f^{(n-1)}(x)\cdot\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + r_n(x, h)\cdot h^n,$$

substituiert sodann $(x-h)$ für x und setzt: $r_n(x-h, h) = q_n(x, h)$, so wird:

$$(9)\quad f(x) = f(x-h) + f'(x-h)\cdot\frac{h}{1!} + \cdots + f^{(n-1)}(x-h)\cdot\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + q_n(x, h)\cdot h^n.$$

Setzt man jetzt noch:

$$(10)\quad h = xz, \quad q_n(x, xz)\cdot z^n = p_n(x, z),$$

so folgt:

$$(11)\quad f(x) = f(x-xz) + f'(x-xz)\cdot\frac{xz}{1} + \cdots + f^{(n-1)}(x-xz)\cdot\frac{x^{n-1}z^{n-1}}{(n-1)!} + p_n(x, z)\cdot x^n$$

und hieraus durch partielle Differentiation nach z:

$$0 = -f^{(n)}(x-xz)\cdot\frac{x^n\cdot z^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\partial p_n}{\partial z}\cdot x^n,$$

d. h.

$$(12)\quad \frac{\partial p_n}{\partial z} = f^{(n)}(x-xz)\cdot\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$$

und somit, wegen: $p_n(x, 0) = 0$ (nach Gl. (11)), schlieſslich[3]):

---

1) Ich citiere nach der zumeist verbreiteten *zweiten* Auflage. Den im Texte citierten Nummern dieser letzteren entsprechen in der *ersten* Aufl. die Nummern 47—53: dieselben enthalten fast wörtlich dasjenige, was in Nr. 35, 38—40 der 2. Aufl. steht; dagegen *fehlt* in der 1. Aufl. der Inhalt von Nr. 36, 37, welcher zum Teil auf eine 1806 erschienene, von LAGRANGE auch ausdrücklich citierte Abhandlung AMPÈRES zurückzuführen ist.

2) Im Interesse der historischen Genauigkeit möchte ich ausdrücklich bemerken, daſs LAGRANGE die folgenden Untersuchungen in der *Théorie des fonctions* nicht für einen allgemeinen Index n, sondern nur für $n = 1, 2, 3$ durchführt und sich im übrigen mit dem Zusatze „*et ainsi de suite*" begnügt. Da er aber die Derivierten beliebiger Ordnung durch *Indices* charakterisiert, so ist damit sofort auch die Möglichkeit gegeben, die betreffenden Formeln *allgemein* anzuschreiben (wie dies in den *Leçons sur le calcul des fonctions* auch wirklich geschieht).

3) LAGRANGE, der ja bekanntlich a. a. O. Differential- nnd Integralzeichen prinzipiell vermeidet, sagt natürlich nur: $p_n(x, z)$ ist die für $z = 0$ *verschwindende*, zur *Derivierten* (12) gehörige *primitive* Funktion, was ja lediglich die wörtliche Umschreibung der Formel (13) ist.

$$(13) \qquad p_n(x, z) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^z y^{n-1} \cdot f^{(n)}(x - xy) \cdot dy.$$

Hiermit ist also zunächst die *exakte* Darstellung des Restgliedes der Entwickelung (11) (also mit Hülfe der erforderlichen Rück-Substitutionen auch desjenigen von (8)) durch ein *bestimmtes Integral*[1]) geleistet.

LAGRANGE fügt nun weiter hinzu (Nr. 36), es erscheine wünschenswert, das Restglied auch *ohne* das Hülfsmittel der *Integration* berechnen zu können, und giebt dafür zunächst den folgenden Weg an. Schreibt man in (11) statt n der Reihe nach ν und $\nu + 1$, so folgt durch Vergleichung der beiden resultierenden Entwickelungen:

$$p_\nu(x, z) \cdot x^\nu = f^{(\nu)}(x - xz) \cdot \frac{x^\nu z^\nu}{\nu!} + p_{\nu+1}(x, z) \cdot x^{\nu+1}$$

und daher, durch Division mit $x^{\nu+1}$ und unter Berücksichtigung von Gl. (12) für $(n = \nu)$:

$$(14) \qquad p_{\nu+1}(x, z) = \frac{1}{x}\left(p_\nu(x, z) - \frac{z}{\nu} \cdot \frac{\partial p_\nu}{\partial z}\right) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

eine Rekursionsformel, welche gestattet, jedes p_ν durch successive *Differentiation* aus p_1 zu berechnen, und die überdies durch Einführung von q_ν für p_ν (s. Gl. (10)) sich noch wesentlich vereinfachen läfst. Man hat nämlich:

---

1) Es ist dies, wenn man in (11) und (13) $\frac{z}{x}$ statt z schreibt, diejenige Restform, welche LAPLACE (s. p. 452) durch partielle Integration abgeleitet hat, nämlich:

$$p_n\left(x, \frac{z}{x}\right) \cdot x^n = \frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^x y^{n-1} \cdot f^{(n)}(x - xy) \cdot dy$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^z t^{n-1} \cdot f^{(n)}(x - t) \cdot dt.$$

Für $z = 1$ resultiert aus (11) (wie LAGRANGE ausdrücklich hervorhebt) die MAC LAURINsche Entwickelung mit dem Restgliede:

$$p_n(x, 1) \cdot x^n = \frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^1 y^{n-1} \cdot f^{(n)}(x - xy) \cdot dy$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x t^{n-1} \cdot f^{(n)}(x - t) \cdot dt,$$

welches genau mit dem von CAUCHY abgeleiteten (s. Gl. (48)) übereinstimmt.

$$p_\nu(x, z) = q_\nu(x, xz) \cdot z^\nu, \quad \text{also:} \quad \frac{\partial p_\nu}{\partial z} = \nu \cdot q_\nu z^{\nu-1} + \frac{\partial q_\nu}{\partial z} \cdot z^\nu,$$

und daher nach Gl. (14):

$$(15) \qquad q_{\nu+1}(x, xz) = -\frac{1}{\nu x} \cdot \frac{\partial q_\nu}{\partial z},$$

oder, wenn wiederum noch $xz = h$ (s. Gl. (10)), also: $\frac{\partial q_\nu(x, xz)}{\partial z} = \frac{\partial q_\nu(x, h)}{\partial h} \cdot x$ gesetzt wird:

$$(16)\ q_{\nu+1}(x, h) = -\frac{1}{\nu} \cdot \frac{\partial q_\nu}{\partial h} = +\frac{1}{(\nu-1)\cdot\nu} \cdot \frac{\partial^2 q_{\nu-1}}{\partial h^2} = \cdots = (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu!} \frac{\partial^\nu q_1}{\partial h^\nu}.$$

Man findet also insbesondere:

$$(17) \qquad q_n(x, h) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{\partial^{n-1} q_1}{\partial x^{n-1}} \quad ^{1)}$$

als Ausdruck für das Restglied der Entwickelung (9) und daraus durch Rücksubstitution von $x + h$ für x dasjenige der gewöhnlichen Taylorschen Entwickelungsform (8).

Einen *zweiten*, ebenfalls auf wiederholter *Differentiation* beruhenden Restausdruck dieser letzteren leitet L. in folgender Weise ab (Nr. 37). Aus (8) ergiebt sich, wenn man ν statt n schreibt, durch partielle Differentiation nach x und h:

$$\frac{\partial f(x+h)}{\partial x} = f'(x) + f''(x) \cdot \frac{h}{1} + \cdots + f^{(\nu-1)}(x) \cdot \frac{h^{\nu-2}}{(\nu-2)!} + f^{(\nu)}(x) \cdot \frac{h^{\nu-1}}{(\nu-1)!} + \frac{\partial r_\nu}{\partial x} \cdot h^\nu$$

$$\frac{\partial f(x+h)}{\partial h} = f'(x) + f''(x) \cdot \frac{h}{1} + \cdots + f^{(\nu-1)}(x) \cdot \frac{h^{\nu-2}}{(\nu-2)!} + r_\nu \cdot \nu h^{\nu-1} + \frac{\partial r_\nu}{\partial h} \cdot h^\nu$$

---

1) Dabei ist nach Gl. (9):

$$f(x) = f(x-h) + h \cdot q_1,$$

also:

$$q_1 = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$

Die litterale Ausführung der in Formel (17) angezeigten Differentiation würde natürlich für q_n lediglich denjenigen Ausdruck liefern, welcher die Beziehung (9) zu einer *vollkommenen Identität* macht. Ist jedoch $f(x)$ als *bestimmter analytischer Ausdruck* vorgelegt, so gelangt man *bei geeigneter Umformung* von q_1 zu einem wirklich *brauchbaren* (d. h. nicht *unmittelbar* als *identisch* mit

$$\frac{f(x) - f(x-h) - \cdots - \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x-h) \cdot h^{n-1}}{h^n}$$

erscheinenden) Ausdrucke für q_n. (Beispiele s. bei Lagrange, a. a. O.)

und hieraus $\left(\text{wegen: } \frac{\partial f(x+h)}{\partial x} = \frac{d f(x+h)}{\partial h}\right)$:

$$(18) \qquad r_\nu h^\nu = f^{(\nu)}(x) \cdot \frac{h^\nu}{\nu!} + \frac{h^{\nu+1}}{\nu} \left(\frac{\partial r_\nu}{\partial x} - \frac{\partial r_\nu}{\partial h}\right).$$ [1]

Andererseits folgt wiederum, wenn man in (8) $n = \nu - 1$ setzt und die betreffende Entwickelung mit der für $n = \nu$ geltenden vergleicht:

$$(19) \qquad r_\nu h^\nu = f^{(\nu)}(x) \cdot \frac{h^\nu}{\nu!} + r_{\nu+1} h^{\nu+1},$$

sodaſs man die Rekursionsformel gewinnt:

$$(20) \qquad r_{\nu+1} = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial r_\nu}{\partial x} - \frac{\partial r_\nu}{\partial h}\right),$$

mit Hülfe deren sich also wiederum r_n durch successive Differentiation aus $r_1 = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ berechnen läſst.

Um ferner auch noch neben den vorstehenden *exakten* Restdarstellungen eine zweckmäſsige *Abschätzungsformel* zu erhalten, beweist L. (Nr. 38) das Lemma:

(21) Es ist: $f(b) - f(a) > 0$, wenn $f'(z) \geqq 0$ [2] für $a \leqq z \leqq b$ —

und benützt dasselbe in folgender Weise (Nr. 39) zur Herleitung zweier Ungleichungen, welche den sog. *Mittelwertsatz* der Differentialrechnung als speziellen Fall enthalten. Man setze:

$$(22) \qquad f_1(z) = \frac{M \cdot z^{\nu+1}}{\nu+1} - F(z), \qquad f_2(z) = F(z) - \frac{m \cdot z^{\nu+1}}{\nu+1},$$

---

1) Es ist dies, abgesehen von den Bezeichnungen, genau diejenige Gleichung, welche A. WINCKLER im 2. Bande der Annali di matem. (1859) p. 186 als Grundlage eines angeblich neuen und alle bisherigen an Einfachheit und Natürlichkeit übertreffenden Beweises der TAYLORschen Formel ableitet. Die unmittelbar daran anknüpfende Herleitung des LAGRANGEschen Restgliedes: $R_n = \frac{1}{n!} h^n \cdot f^{(n)}(x + \vartheta h)$ ist aber (ganz abgesehen von einem groben, für den Beweis selbst schlieſslich nicht in Betracht kommenden Fehler, s. § 2 am Ende) *schlechter* als jede andere, weil dabei noch die *Existenz* und, in der von W. gewählten Fassung, sogar die *Stetigkeit* von $f^{(n+1)}(x)$ für das Intervall $(x, x+h)$ vorausgesetzt werden muſs. Eine zweite Arbeit desselben Verfassers, in welcher der Versuch gemacht wird, den Rest der TAYLORschen Reihe in *engere* Grenzen als die bisherigen einzuschlieſsen, (Wien. Denkschr. Math. Cl. 28 [1868], p. 243) beruht zum Teil auf unzulässigen, zum Teil auf immerhin so engen Voraussetzungen, daſs derselben keine irgendwie nennenswerte Bedeutung zugesprochen werden kann.

2) D. h. es soll nicht etwa beständig $f'(z) = 0$ sein.

wo M, m das *Maximum* und *Minimum*[1]) von $\frac{F'(z)}{z^\nu}$ für $a \leqq z \leqq b$ bedeuten. Alsdann hat man:

$$(23)\quad \begin{cases} f_1'(z) = z^\nu\left(M - \frac{F'(z)}{z^\nu}\right), & f_2'(z) = z^\nu\left(\frac{F'(z)}{z^\nu} - m\right) \\ \quad > 0 & \quad > 0 \qquad \text{für } a \leqq z \leqq b, \end{cases}$$

und daher nach dem obigen Lemma:

$$(24)\qquad f_1(b) - f_1(a) > 0, \qquad f_2(b) - f_2(a) > 0,$$

d. h. mit Berücksichtigung von (22):

$$(25)\qquad F(b) - F(a) \begin{cases} < M \cdot \frac{b^{\nu+1} - a^{\nu+1}}{\nu+1} \\ > m \cdot \frac{b^{\nu+1} - a^{\nu+1}}{\nu+1}. \end{cases}$$

Diese beiden Ungleichungen, welche für $\nu = 0$ den wesentlichen Inhalt des gewöhnlichen *Mittelwertsatzes* darstellen, erweisen sich vermöge der Willkürlichkeit von ν als geeignet, aus der oben für $\frac{\partial p_n}{\partial z}$ gefundenen Formel (12) ganz unmittelbar die speziell als „LAGRANGEsches *Restglied*" bekannte Abschätzungsformel zu gewinnen. Aus (11) folgt nämlich zunächst für $z = 1$ die MAC LAURINsche Entwickelung:

$$(26)\quad f(x) = f(0) + f'(0) \cdot \frac{x}{1!} + \cdots + f^{(n-1)}(0) \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + p_n(x, 1) \cdot x^n.$$

Andererseits hat man nach (12):

$$(27)\qquad \frac{1}{z^{n-1}} \cdot \frac{\partial p_n(x, z)}{\partial z} = \frac{1}{(n-1)!} \cdot f^{(n)}(x - xz).$$

Setzt man also, behufs Anwendung der Ungleichungen (25):

$$F(z) = p_n(x, z), \quad \nu = n - 1, \quad a = 0, \quad b = 1,$$

und bezeichnet mit M, m das *Maximum* bezw. *Minimum* von $f^{(n)}(x - xz)$ für $0 \leqq z \leqq 1$, d. h. schliefslich dasjenige von $f^{(n)}(y)$ für $0 \leqq y \leqq x$, so

---

1) Da die *Stetigkeit* einer Funktion im heutigen *arithmetischen* (d. h. CAUCHYschen) Sinne von LAGRANGE zwar niemals definiert, aber doch wohl als aus der *Geometrie abstrahierte*, im allgemeinen *selbstverständliche* Eigenschaft angesehen wird (solange nicht das Gegenteil ausdrücklich feststeht), so kann man auch ohne weiteres von einem *Maximum* und *Minimum* reden. Indessen erleidet diese Betrachtung keinerlei Änderung, wenn man, *ohne* die *Stetigkeit* vorauszusetzen, M und m als *obere* bezw. *untere* Grenze der (immerhin als *endlich* anzunehmenden) Funktion einführt.

resultieren aus (24), mit Berücksichtigung von $p_n(x, 0) = 0$ (s. Gl. (11)), die Beziehungen:

$$(28) \qquad p_n(x, 1) \begin{cases} < \frac{M}{n!}, \\ > \frac{m}{n!}, \end{cases}$$

und, wenn man noch die Bedingung der *Stetigkeit* von $f^{(n)}(x)$ hinzunimmt:

$$(29) \qquad p_n(x, 1) = \frac{f^{(n)}(u)}{n!} \quad \left(\text{in CAUCHYS Schreibweise: } = \frac{f^{(n)}(\vartheta x)}{n!}\right),$$

wo u einen passenden Mittelwert des Intervalles $(0, x)$ (bezw. ϑ einen solchen von $(0, 1)$) bezeichnet. Die Substitution:

$$f(x) = \varphi(z + x), \text{ also: } f(0) = \varphi(z),\ f^{(\nu)}(0) = \varphi^{(\nu)}(z),\ f^{(n)}(u) = \varphi^{(n)}(z + u),$$

liefert sodann die TAYLORsche Entwickelung von $\varphi(z + x)$ nach Potenzen von x, und, wenn man schliefslich noch die Buchstaben φ, z, x durch f, x, h ersetzt:

$$(30) \quad f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot \frac{h}{1} + \cdots + f^{(n-1)}(x) \cdot \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n)}(x+u) \cdot \frac{h^n}{n!}.$$

Den Hauptinhalt dieser Untersuchungen kann man also folgendermafsen zusammenfassen:

> LAGRANGE bestimmt in der *Théorie des fonct. anal.*, und zwar schon in der *ersten* Auflage von 1797 — den nach einer Hülfsvariabeln genommenen *Differentialquotienten des Restgliedes* und stellt dieses selbst *durch ein bestimmtes Integral* dar. Der sodann von ihm in *verallgemeinerter* Form bewiesene *Mittelwertsatz* der Differentialrechnung dient ihm lediglich dazu, um aus dem bereits gefundenen *exakten* Ausdrucke jenes *Differentialquotienten* [1]) die als LAGRANGEsches *Restglied* bekannte Abschätzungsformel herzuleiten.

Wesentlich anders verfährt nun LAGRANGE in den *Leçons sur le calcul des fonctions.* In Leçon IX (*Oeuvres*, T. X, p. 86) beweist er an Stelle des Lemmas (21) zunächst das folgende, in der Hauptsache mit jenem gleichwertige:

(31) Ist $F'(0) = 0$ und erleidet $F'(z)$ für $0 < z \leq h$ keinen Zeichenwechsel, so hat $F(z)$ beständig das Vorzeichen von $F'(z)$ (bezw. das entgegengesetzte, wenn $0 \geq z > -h$).

Bedeutet sodann $\varphi'(x + p)$, $\varphi'(x + q)$ das *Minimum* bezw. *Maximum* von

1) Diese Methode fällt offenbar dem Wesen nach mit derjenigen zusammen, welche auf der Reduktion des *Rest-Integrals* mit Hülfe des *Integral-Mittelwertsatzes* beruht.

$\varphi'(x+z)$ für $0 \leqq z \leqq h$ und setzt man:

$$(32) \qquad \begin{cases} F_1(z) = \varphi(x+z) - \varphi(x) - z \cdot \varphi'(x+p), \\ F_2(z) = \varphi(x+z) - \varphi(x) - z \cdot \varphi'(x+q), \end{cases}$$

so hat man:

$$(33) \qquad F_1(0) = F_2(0) = 0$$

und aufserdem:

$$(34) \quad \begin{cases} F_1'(z) = \varphi'(x+z) - \varphi'(x+p), & F_2'(z) = \varphi'(x+z) - \varphi'(x+q) \\ \geqq 0 & \leqq 0 \qquad (\text{für: } 0 \leqq z \leqq h). \end{cases}$$

Somit folgt aus dem obigen Lemma:

$$F_1(z) > 0, \qquad F_2(z) < 0 \qquad \text{für: } 0 < z \leqq h,$$

d. h. (*Oeuvres*, T. X, p. 91):

$$(35) \qquad \begin{cases} \varphi(x+z) - \varphi(x) - z \cdot \varphi'(x+p) > 0, \\ \varphi(x+z) - \varphi(x) - z \cdot \varphi'(x+q) < 0 \end{cases} \quad (0 < z \leqq h).$$

Diese beiden Ungleichungen, welche offenbar wiederum den wesentlichen Inhalt des gewöhnlichen *Mittelwertsatzes* darstellen und die ich daher im folgenden der Kürze halber schlechthin als *„den Mittelwertsatz“* bezeichnen will, benützt nun LAGRANGE hier *ganz direkt* zur Herleitung der TAYLORschen Entwickelung mit dem „LAGRANGEschen“ Restgliede (Gl. (30)). Setzt man nämlich in (35): $\varphi(x) = f^{(n-1)}(x)$, so folgt zunächst:

$$(36) \quad f^{(n-1)}(x+z) - f^{(n-1)}(x) \begin{cases} - f^{(n)}(x+p) \cdot z > 0 \\ - f^{(n)}(x+q) \cdot z < 0 \end{cases} \quad (0 < z \leqq h).$$

Auf Grund dieser Beziehungen ergiebt sich aber aus dem Lemma (31), dafs auch:

$$(37)\ f^{(n-2)}(x+z) - f^{(n-2)}(x) - f^{(n-1)}(x) \cdot z \begin{cases} -f^{(n)}(x+p) \cdot \frac{z^2}{2} > 0 \\ -f^{(n)}(x+q) \cdot \frac{z^2}{2} < 0 \end{cases} \quad (0 < z \leqq h),$$

da diese Ausdrücke für $z = 0$ verschwinden und nach z differenziert die linken Seiten von (36) liefern. So weiter fortschliefsend gelangt man (a. a. O. p. 93) zu den Ungleichungen:

$$(38)\ f(x+z) - f(x) - f'(x) \cdot \frac{z}{1!} - \cdots - f^{(n-1)}(x) \cdot \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \begin{cases} -f^{(n)}(x+p) \cdot \frac{z^n}{n!} > 0 \\ -f^{(n)}(x+q) \cdot \frac{z^n}{n!} < 0 \end{cases}$$

$(0 < z \leqq h)$, welche für $z = h$ unmittelbar die Entwickelung (30) liefern, wenn man die beiden *Ungleichungen* durch Einführung eines passenden Mittelwertes $f^{(n)}(x+u)$ in eine *Gleichung* zusammenzieht.

In den *Leçons sur le calcul des fonctions* bildet also der *Mittelwertsatz*[1]) die eigentliche *Grundlage* der TAYLORschen Entwickelung.

Man kann hiernach sagen, daſs LAGRANGE in Bezug auf die strenge Begründung der sog. TAYLORschen *Formel*[2]) bereits *alles Wesentliche* geleistet hat: die *exakte Darstellung* des Restes durch ein bestimmtes Integral, zugleich aber auch die vollkommene *Ausnützung des Mittelwertsatzes* zur *Herleitung* jener Formel mit *angenähertem* Restausdrucke. Dabei muſs noch bemerkt werden, das LAGRANGE die Entwickelbarkeit *jeder* Funktion $f(x+h)$ nach Potenzen von h, abgesehen von einzelnen Ausnahmepunkten, zwar als etwas *a priori* Feststehendes ansieht, daſs aber diese Ansicht in dem vorliegenden Zusammenhange *keineswegs* als *Voraussetzung* fungiert (in welchem Falle dann der Mittelwertsatz bezw. die TAYLORsche *Formel* als eine *Folge* der TAYLORschen *Reihe* erscheinen würde). Die zur Ableitung des fundamentalen Lemmas (31) dienliche Voraussetzung besteht vielmehr lediglich in der Annahme einer Beziehung von der Form:

$$(39) \qquad f(x+h) = f(x) + (f'(x) + \varepsilon) \cdot h \qquad (h \gtrless 0),$$ [3])

wo $|\varepsilon|$ mit $|h|$ *beliebig klein* wird: eine Forderung, die im Grunde genommen nicht mehr und nicht weniger besagt, als diejenige eines eindeutig bestimmten („vollständigen") *Differentialquotienten* $\lim\limits_{h=\pm 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$; sie enthält lediglich die von LAGRANGE behufs vollständiger Vermeidung des Grenzbegriffes gewählte rein arithmetische Formulierung dieser letzteren Forderung.[4])

---

1) Daſs LAGRANGE statt mit dem eigentlichen Mittelwertsatze mit den aus Lemma (31) herrührenden Ungleichungen operiert, ist hierbei unwesentlich.

2) D. h. eigentlich der *Nicht-TAYLORschen* Darstellungsweise von $f(x+h)$ durch eine *ganze Funktion* und ein *Restglied*.

3) *Oeuvres*, T. X, p. 86:

$$f(x+i) = f(x) + i\,(f'(x) + V).$$

4) Überhaupt bin ich der Ansicht, daſs die *Existenz* von $f'(x)$ für irgend einen bestimmten Wert x_0 auch nach LAGRANGES Darstellung keineswegs an diejenige der *unendlichen* Reihe für $f(x+h)$ gebunden erscheint, vielmehr immer nur daran, daſs für $x = x_0$ eine Beziehung von der Form (39) besteht. Das entsprechende gilt für jede folgende Derivierte. Vgl. *Théorie des fonctions* Nr. 3, 4, und besonders auch die folgende Stelle am Schlusse von Leçon II der *Leçons sur le calcul* (*Oeuvres*, T. X, p. 19): „Dès qu'on aura trouvé par la considération *du premier terme* du développement des règles générales pour passer d'une fonction primitive à la fonction dérivée, *on pourra faire abstraction de tout développement*". So ist z. B.

$$f(x) = a + bx + cx^2 \cdot \lg x$$

nicht nach Potenzen von x entwickelbar, indessen hat man nach Analogie von Gl. (31):

$$f(x) = a + (b + \varepsilon) \cdot x,$$

Ampère[1]), der die Beziehung (39) gleichfalls als grundlegend ansieht[2]), unterscheidet sich darin von Lagrange, daſs er ihre Existenz, bezw. die damit gleichwertige von $\lim\limits_{h=\pm 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ *nicht postuliert*, sondern lediglich unter Voraussetzung der *Stetigkeit* von $f(x)$ zu *beweisen* sucht (natürlich vergeblich[3])) und bei dieser Gelegenheit auch die beiden „Mittelwertsatz-Ungleichungen“ (35) ableitet, *ohne* den Weg über das Lemma (31)[4]) zu nehmen. Im übrigen geht er darauf aus, zur Ergänzung der Lagrangeschen *Integral*-Darstellung des Restgliedes eine ebenfalls *exakte* Darstellung *ohne* Integration zu geben. Sein Verfahren ist im wesentlichen folgendes (a. a. O. p. 163). Setzt man:

$$(40) \qquad Q(x,a) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

so besteht die Identät:

$$(41) \qquad f(x) = f(a) + (x-a)\cdot Q(x,a).$$

Daraus folgt durch partielle Differentiation nach a:

$$(42) \qquad 0 = f'(a) + (x-a)\cdot\frac{\partial Q}{d a} - Q$$

und durch weitere $(\nu-1)$ malige Differentiation:

$$(43) \qquad 0 = f^{(\nu)}(a) + (x-a)\cdot\frac{\partial^\nu Q}{\partial a^\nu} - \nu\cdot\frac{\partial^{\nu-1} Q}{\partial a^{\nu-1}} \quad (\nu = 2, 3, 4, \cdots),$$

d. h.

$$(44) \qquad Q = f'(a) + (x-a)\cdot\frac{\partial Q}{\partial a}, \quad \frac{\partial^{\nu-1} Q}{\partial a^{\nu-1}} = \frac{1}{\nu}\cdot f^{(\nu)}(a) + \frac{x-a}{\nu}\cdot\frac{\partial^\nu Q}{\partial a^\nu}.$$

Bei successiver Einführung dieser Beziehungen (für $\nu = 2, 3, \cdots (n-1)$) in Gl. (41) ergiebt sich:

$$(45) \qquad f(x) = f(a) + f'(a)\cdot\frac{x-a}{1!} + \cdots + f^{(n-1)}(a)\cdot\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\partial^{n-1} Q}{\partial a^{n-1}}\cdot\frac{(x-a)^n}{(n-1)!},$$

wo $\varepsilon = cx\cdot\lg x$ mit x beliebig klein wird und daher (auch nach Lagranges Auffassung): $f'(0) = b$ (vgl. Leçon VIII = *Oeuvres*, T. X, p. 73).

1) *Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées etc.*; Journ. de l'école polyt. Cah. **14** (1806), p. 148 ff.

2) a. a. O. p. 162:

$$f(x+i) = f(x) + i\cdot f'(x) + i\cdot J.$$

3) Über die Hinfälligkeit jenes Beweises s. z. B. Dini, *Fondamenti* §§ 69, 169 (= Dini-Lüroth, *Grundlagen* p. 88, 298).

4) Das letztere wird in der That zweckmäſsiger als eine *Folge* des Mittelwertsatzes abgeleitet (s. z. B. Stolz, *Grundl. der Diff.- und Integr.-R.*, Bd. I, p. 54, Nr. 4).

wobei also das Restglied im wesentlichen in derjenigen Form erscheint, die sich auch in der *zweiten* Auflage der *Théorie des fonct. anal.* findet (s. Gl. (17) und Fuſsn. 1), p. 441). AMPÈRE leitet dann schlieſslich daraus auch noch die LAGRANGEsche Abschätzungsformel ab, indem er die Identität (43) für $v = n$ durch Multiplikation mit $(x - a)^{n-1}$ auf die Form bringt:

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial^{n-1} Q}{\partial a^{n-1}} \cdot (x-a)^n\right) + f^{(n)}(x) \cdot (x-a)^{n-1} = 0 \tag{46}$$

und sodann die grundlegenden Ungleichungen des Mittelwertsatzes (oder eigentlich das LAGRANGEsche Lemma (21)) anwendet.

CAUCHY giebt in seiner *ersten* Infinitesimal-Rechnung[1]) von 1823, p. 26 ff. (= *Oeuvres,* a. a. O. p. 44) den *Mittelwertsatz* im wesentlichen nach AMPÈRE (auf den er auch ausdrücklich hinweist)[2]), *ohne* jedoch davon für die Herleitung der TAYLORschen Formel irgend welchen Gebrauch zu machen. Die letztere beweist er vielmehr erst in der Integralrechnung[3]) durch eine Art *Umkehrung* der von D'ALEMBERT angedeuteten Methode, indem er nämlich für ein n-mal iteriertes Integral (mit Hilfe eines im Grunde genommen auf partieller Integration beruhenden Verfahrens) die folgende Formel ableitet (a. a. O. p. 136, Gl. (12) = *Oeuvres,* a. a. O. p. 210):

---

1) *Résumé des leçons données à l'école polytechnique sur le calcul infinitésimal.* Paris 1823 (= *Oeuvres,* (2) T. IV, p. 1—261).

2) Dabei erscheint aber p. 28 neben den von AMPÈRE ausschlieſslich benützten *Ungleichungen* die *Gleichung:*

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x + \vartheta h)$$

mit dem, wohl von CAUCHY eingeführten spezifischen ϑ zur Bezeichnung einer unbekannten Zahl des Intervalles (0,1).

3) In der Vorrede sagt er hierüber: „. . . et je me suis vu forcé de renvoyer au calcul intégral la formule de TAYLOR, cette formule ne pouvant plus être admise comme générale qu'autant que la série qu'elle renferme se trouve réduite à un nombre fini de termes et complétée par une intégrale définie. Je n'ignore pas que l'illustre auteur de la *Mécanique analytique* a pris la formule dont il s'agit pour base de sa théorie des fonctions dérivées. Mais malgré tout le respect que commande une si grande autorité, la plupart des géomètres s'accordent maintenant à reconnaître l'incertitude des résultats auxquels on peut être conduit par l'emploi de séries divergentes . . . .“ Das letztere ist zweifellos richtig, trifft aber in keiner Weise LAGRANGES Ableitung der TAYLORschen *Formel.* Denn selbst wenn man die von mir in Fuſsn. 4), p. 448 vertretene Auffassung des LAGRANGEschen Derivierten-Begriffes *nicht* teilt, so wird man doch zugeben müssen, daſs die fraglichen Deduktionen LAGRANGES dasselbe Maſs von Strenge besitzen, wie die entsprechenden CAUCHYS, zum mindesten dann, wenn man die betreffenden $f^{(\nu)}(x)$ eben nicht als LAGRANGEsche *Derivierte,* sondern als CAUCHYsche *Differential-Quotienten* auffaſst: CAUCHY hätte dieselben also mit dieser einfachen Modifikation ohne weiteres übernehmen können.

$$(47)\quad \int^{(n)} \varphi(x)\cdot dx^n = c_n + c_{n-1}\cdot\frac{x-x_0}{1!}+\cdots$$
$$+ c_1\cdot\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}\cdot\varphi(t)\cdot dt,$$

welche für $\varphi(x) = F^{(n)}(x)$, $x_0 = 0$ unmittelbar die Mac Laurinsche Formel für $F(x)$, sodann vermöge der Substitution $F(x) = f(x+h)$ und bei Vertauschung von x und h die Taylorsche Formel für $f(x+h)$ mit den resp. Restgliedern[1]):

$$(48)\qquad R_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}\cdot F^{(n)}(t)\cdot dt$$
$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x t^{n-1}\cdot F^{(n)}(x-t)\cdot dt$$

$$(49)\qquad R_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^h (h-t)^{n-1}\cdot f^{(n)}(x+t)\cdot dt$$
$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^h t^{n-1}\cdot f^{(n)}(x+h-t)\cdot dt$$

liefert (a. a. O. p. 141, Gl. (2), (3)). Cauchy zeigt dann noch, wie man das letztere Resultat auch unmittelbar durch successive *partielle Integration* aus der Identität:

$$(50)\quad f(x+h) = f(x) + \int_0^h f'(x+z)\cdot dz = f(x) + \int_0^h f'(x+h-t)\cdot dt$$

finden kann[2]) und führt dieses in fast alle modernen Lehrbücher über-

---

1) Die betreffenden zwei Integrale werden späterhin von C. mit Hülfe des Mittelwertsatzes auf die Lagrangesche (a. a. O. p. 143), das erste auch (p. 147) auf die nach Cauchy benannte (s. weiter unten, Gl. (55)) Näherungsform gebracht. Ebendas. (p. 143) auch die Übertragung der Taylorschen Formel auf den Fall *mehrerer* Variablen mit Hülfe einer schon von Lacroix (*Traité du calc. diff. et int.* 2de éd. T. I [1810], p. 387) angewendeten Methode.

2) Man kann übrigens auch das von Lacroix nach d'Alemberts Methode abgeleitete Restglied (7) mit Hülfe der aus Gl. (47) durch Einführung von Grenzen hervorgehenden Formel (vgl. Cauchy, a. a. O., p. 140 = *Oeuvres*, a. a. O., p. 212, Gl. (19)):

$$\int_{x_0}^{x}{}^{(n)} \varphi(x)\cdot dx^n = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}\cdot\varphi(t)\cdot dt$$

ohne weiteres auf die Form (49) bringen: ähnlich übrigens schon bei Lacroix, a. a. O. p. 387. Auf diesem Ergebnisse beruht schliefslich auch der folgende (etwas künst-

gegangene, gewöhnlich LAPLACE (*Théorie anal. des probabilités* I, Nr. 44 = *Oeuvres*, VII, p. 179) zugeschriebene Verfahren[1]) auf eine 1805 (wo?) publizierte Abhandlung von PRONY zurück: da die *erste* Auflage von LAPLACES *Probabilités* erst 1812 erschien, so würde also dem eben genannten die Priorität zukommen.

Im *Anhange* des *Calc. inf.* (p. 161 ff. = *Oeuvres*, a. a. O. p. 243 ff.) kommt CAUCHY nochmals auf den *Mittelwertsatz* zurück[2]), beweist sodann den *erweiterten* Mittelwertsatz:

$$\frac{\varphi(X)-\varphi(x_0)}{\Phi(X)-\Phi(x_0)}=\frac{\varphi'(x_0+\vartheta\cdot(X-x_0))}{\Phi'(x_0+\vartheta\cdot(X-x_0))}, \tag{51}$$

welcher für $\Phi(x)=x^n$, $X=h$, $x_0=0$ und unter der Voraussetzung:

$$\varphi(0)=\varphi'(0)=\cdots=\varphi^{(n-1)}(0)=0,\ \varphi^{(n)}(0)\lesseqgtr 0 \tag{52}$$

bei n-maliger Anwendung die Beziehung liefert:

$$\frac{\varphi(h)}{h^n}=\frac{\varphi^{(n)}(\vartheta h)}{n!}. \tag{53}$$

Mit Hülfe dieser letzteren leitet dann CAUCHY zunächst die TAYLORsche

---

liche) Beweis in C. JORDANS *Cours d'analyse* T. I (2de éd. 1893), p. 245. Aus dem Ansatze:

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\cdot\frac{h}{1}+\cdots+f^{(n-1)}(x)\cdot\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}+R$$

folgt:

$$\frac{\partial^n R}{\partial h^n}=f^{(n)}(x+h),\quad (R)_{h=0}=0,\quad \left(\frac{\partial^\nu R}{\partial h^\nu}\right)_{h=0}=0\quad (\nu=1,2,\cdots(n-1)), \tag{a}$$

was in Wahrheit gleichbedeutend mit der Restdarstellung (7) ist, nämlich:

$$R=\int_0^{h}{}^{(n)} f^{(n)}(x+h)\cdot dh^n.$$

Andererseits genügt aber das Integral:

$$J=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^h (h-t)^{n-1}\cdot f^{(n)}(x+t)\cdot dt$$

genau den Beziehungen (a), woraus dann $R=J$ resultiert. Der Beweis ist im Grunde genommen nur eine *Verifikation* der Gleichung $R=J$, während die zuvor angedeutete *Transformation* wirklich auch zur *Auffindung* von J führt.

1) Eine Verallgemeinerung dieser Methode giebt KRONECKER: *Über eine bei der partiellen Integration nützliche Formel* (Berl. Ber. 1885, p. 841 ff.).

2) CAUCHY hat inzwischen die in der Vorrede ausgesprochene Ansicht von der Unzulänglichkeit der Diff.-Rechnung zur Begründung der TAYLORschen Formel geändert: „Depuis l'impression de cet ouvrage j'ai reconnu qu'à l'aide d'une formule très-simple (sc. (51)) on pouvait ramener au calcul différentiel la solution de plusieurs problèmes que j'avais renvoyés au calcul intégral."

Formel für $f(x+h)$ mit dem LAGRANGEschen Restgliede ab:

$$R_n = \frac{h^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x + \vartheta h), \tag{54}$$

weiterhin[1]) aber, die Bedingungen (52) in die einzige: $\lim\limits_{h=0} \frac{\varphi(h)}{h^{n-1}} = 0$ zusammenziehend[2]), beweist er dasselbe Resultat noch auf etwas andere Art und giebt aufserdem auch diejenige Form des Restgliedes an, welche gewöhnlich schlechthin als die CAUCHYsche bezeichnet wird, nämlich:

$$R_n = \frac{(1-\vartheta)^{n-1} \cdot h^n}{(n-1)!} \cdot f^{(n)}(x+\vartheta h). \tag{55}$$

Die Restform:

$$R_n = \frac{(1-\vartheta)^{n-p} \cdot h^n}{(n-1)!\, p} \cdot f^{(n)}(x+\vartheta h), \quad (p \text{ eine bel. nat. Zahl}), \tag{56}$$

welche für $p = n$ und $p = 1$ die LAGRANGEsche und CAUCHYsche als spezielle Fälle liefert, hat É. ROCHE aus dem Rest-Integrale (49) durch Faktorenzerlegung des Integranden und partielle Integration abgeleitet.[3]) Dieselbe erweist sich jedoch, wie SCHLÖMILCH mit Recht geltend gemacht hat[4]), lediglich als ein spezieller Fall der schon früher[5]) von ihm mit Hülfe des *erweiterten Mittelwertsatzes* (51) hergeleiteten Formel:

$$R_n = \frac{\psi(h)-\psi(0)}{\psi'((1-\vartheta)h)} \cdot \frac{(1-\vartheta)^{n-1} \cdot h^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{(n)}(x+\vartheta h) \tag{57}$$

($\psi(x)$ eine für $0 \leqq x \leqq h$ stetige Function mit endlichem, für $0 < x < h$ nicht verschwindendem $\psi'(x)$, im übrigen willkürlich), aus welcher sie für $\psi(h) = h^p$ unmittelbar hervorgeht. ROCHE hat dann wiederum mit demselben Hülfsmittel den noch allgemeiner gestalteten Ausdruck aufgestellt[6]):

$$R_n = \left\{\varphi(x+h) - \varphi(x) - \cdots - \varphi^{(q)}(x) \cdot \frac{h^q}{q!}\right\} \cdot \frac{q!\,(h-\vartheta h)^{n-q-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{f^{(n)}(x+\vartheta h)}{\varphi^{(q+1)}(x+\vartheta h)}, \tag{58}$$

---

1) A. a. O. p. 173—176 (*Oeuvres*, a. a. O. p. 257—261): dieser ganze Teil des Anhanges ist auch wörtlich abgedruckt in den *Anc. exercises*, T. I (1826) p. 25—28 (= *Oeuvres* (2) T. VI, p. 38—42).

2) Die nähere Begründung dieses Schrittes giebt C. in den *Leçons sur le calcul différentiel* von 1829, p. 51 (= *Oeuvres*, (2) T. IV, p. 329).

3) Journ. de mathém. (2) T. III (1858), p. 271.

4) Ebendas. p. 384.

5) *Handb. der Diff.- u. Integr.-R.*, Greifswald 1847—48, § 35 (s. z. B. auch: STOLZ, *Grundlagen*, Bd. I, p. 95).

6) Mémoires de l'Académie de Montpellier **5**, 1863. Auch: Comptes rendus, T. **58** (1864, I) p. 380. Die Wahl $\varphi(z) = f^{(n-1)}(z)$, $q = 0$ (welche also gestattet ist, wenn $\varphi'(z)$ d. h. $f^{(n)}(z)$ für $x \leqq z \leqq x+h$ stetig und von Null verschieden) liefert die Restformel:

$$R_n = \frac{h^{n-1} \cdot (1-\vartheta)^{n-1}}{(n-1)!} \left\{ f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x) \right\}.$$

$(\varphi(z), \varphi'(z), \cdots \varphi^{(q+1)}(z)$ stetig für $x \leqq z \leqq x+h$, und $\varphi^{(q+1)}(z)$ daselbst von Null verschieden), welcher u. a. für $q=0$ (d. h. $q!=1$, $\varphi^{(q)}(x)=\varphi(x))$ und $\varphi(z)=\psi(z-x)$ den SCHLÖMILCHschen Rest (57) liefert, überdies (für $q=n-1$) neuerdings von STOLZ[1]) benützt wurde, um nachzuweisen, dafs die früher stets für $x \leqq z \leqq x+h$ geforderte Existenz eindeutiger und endlicher $f'(z), \cdots f^{(n-1)}(z)$ an der *Grenze* $z=x+h$ für die Gültigkeit der TAYLORschen Formel keineswegs *notwendig* erscheint.[2])

Im übrigen verdient ausdrücklich bemerkt zu werden, dafs zur Ableitung der TAYLORschen Formel mit dem für die meisten Zwecke hinlänglich allgemeinen SCHLÖMILCH-ROCHEschen Restgliede schon der *gewöhnliche Mittelwertsatz* und zwar in seiner einfachsten Form (als sog. ROLLEscher Satz) vollkommen ausreicht. Darnach hat man[3]):

$$F'(\xi)=0 \tag{59}$$

für irgend ein bestimmtes ξ des Intervalles $x_0<\xi<X$, wenn $F(x_0)=F(X)=0$, $F(x)$ *eindeutig* und *stetig* für $x_0 \leqq x \leqq X$, aufserdem $F'(x)$ d. h. $\lim\limits_{h=0} \dfrac{F(x \pm h)-F(x)}{\pm h}$ *eindeutig* (endlich oder unendlich) für $x_0<x<X$. Setzt man nämlich:

$$F(x)=f(X)-f(x)-f'(x) \cdot \frac{X-x}{1!}-\cdots \\ -f^{(n-1)}(x) \cdot \frac{(X-x)^{n-1}}{(n-1)!}-Q \cdot (X-x)^p \tag{60}$$

und definiert Q durch die Gleichung:

$$0=f(X)-f(x_0)-f'(x_0) \cdot \frac{X-x_0}{1!}-\cdots \\ -f^{(n-1)}(x_0) \cdot \frac{(X-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}-Q \cdot (X-x_0)^p, \tag{61}$$

wo x_0 irgend eine bestimmte Zahl $<X$ bedeutet, so folgt:

$$F(x_0)=F(X)=0, \quad F'(x)=f^{(n)}(x) \cdot \frac{(X-x)^{n-1}}{(n-1)!}-Q \cdot p \cdot (X-x)^{p-1}, \tag{62}$$

---

1) A. a. O. p. 98.

2) Hieraus erklärt sich die bekannte Thatsache, dafs die TAYLORsche bezw. MAC LAURINsche *Reihe* an der *Konvergenz-Grenze* noch *absolut* konvergieren und die betreffende Funktion darstellen kann, auch wenn die sämtlichen Differential-Quotienten dort unendlich werden. *Beispiel:*

$$(1-x) \cdot \lg \frac{1}{1-x}=x-\sum_1^{\infty} \frac{x^{\nu+1}}{\nu(\nu+1)} \text{ für } x=1.$$

3) S. z. B. STOLZ, a. a. O. p. 51.

nd somit, wenn man die *Stetigkeit* und *Eindeutigkeit* von $F(x)$ d. h. von $(x), f'(x), \cdots f^{(n-1)}(x)$ für $x_0 \leqq x \leqq X$, außerdem die *Eindeutigkeit* von $F'(x)$ d. h. von $f^{(n)}(x)$ für $x_0 < x < X$ voraussetzt, nach Gl. (59):

$$(63)\qquad F'(\xi) = 0 \quad \text{d. h.} \quad Q = \frac{(X-\xi)^{n-p}}{(n-1)!\,p} \cdot f^{(n)}(\xi) \quad (0 < \xi < X).$$

Vird dann schließlich noch gesetzt: $X = x_0 + h$, $\xi = x_0 + \vartheta h$ (wo $0 < \vartheta < 1$), so liefert Gl. (61) ohne weiteres die gesuchte Entwickelung:

$$(64)\qquad f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot\frac{h}{1!} + \cdots + f^{(n-1)}(x_0)\cdot\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n)}(x_0+\vartheta h)\cdot\frac{(1-\vartheta)^{n-p}\cdot h^n}{(n-1)!\,p}.$$

)ieser an Einfachheit und Strenge wohl kaum etwas zu wünschen lassende 3eweis, welcher übrigens auf einer direkten Verallgemeinerung des (nach ERRET, *Calcul différentiel*, Nr. 14) von OSSIAN BONNET herrührenden für en gewöhnlichen *Mittelwertsatz* (d. h. den Fall $n = 1$, $p = 1$) beruht, ührt nach HERMITES Angabe[1]) im wesentlichen von HOMERSHAM-COX nd ROUCHÉ her.

Während die bisher betrachteten mit LAGRANGES *Théorie des fonct. nal.* beginnenden Herleitungen der TAYLORschen *Formel* den ursprüngch von TAYLOR zur Auffindung der nach ihm benannten *Reihe* eingechlagenen Weg vollständig verließen, so hat man, nachdem die verschiedenen *Rest-Darstellungen* einmal vorlagen, naturgemäß auch den Versuch geacht, durch passende Vervollkommnung der TAYLORschen *Methode* daselbe Ziel zu erreichen, d. h. die Interpolations-Formel (1) so umzugestalten, aß der schließlich erforderliche Grenzübergang sich mit der wünschensverten Strenge ausführen läßt und an Stelle der von TAYLOR fälschlich ernachlässigten Glieder ein entsprechendes *Restglied* zum Vorschein kommt. n einer aus Notizen AMPÈRES von GERGONNE[2]) zusammengestellten Abandlung über Interpolation und deren Anwendung auf gewisse Prinzipien er Differential-Rechnung erscheint das Restglied der Entwickelung von $(x+h)$ in der wenig durchsichtigen und zu unmittelbarer Abschätzung ngeeigneten Form[3]):

$$(65)\qquad R_n = f_n(x, x, \cdots x, x+h)\,.\,h^n,$$

ro (die „AMPÈREsche *Interpolations-Funktion*") f_n definiert ist durch die Rekursions-Formel:

---

1) Cours d' analyse T. I (1873), p. 49, 50.

2) Annales de mathém. T. XVI (1825—26), p. 329—349.

3) A. a. O. p. 348.

$$(x_{n+1} - x_n) f_n(x_1, x_2, \cdots x_{n+1}) = f_{n-1}(x_1, x_2, \cdots x_n) - f_{n-2}(x_1, x_2, \cdots x_{n-1})$$

$$(x_2 - x_1) \cdot f_1(x_1, x_2) = f(x_2) - f(x_1).$$

CRELLE[1]) bringt, gelegentlich der Ableitung einer von ihm schiefer Weise als *„allgemeine* TAYLOR*sche Reihe"* bezeichneten Entwickelung[2]), von der Interpolations-Formel (1) ausgehend, das Restglied der (gewöhnlichen) TAYLORschen Formel für $f(x+h)$ auf eine Form, welche bei korrekter Schreibweise folgendermaſsen lauten würde[3]):

$$(66) \qquad R_n = \left\{ \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left(\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \right) \right\}_{a=x+h} \cdot \frac{h^n}{(n-1!}$$

und somit im wesentlichen mit einer früher erwähnten AMPÈREschen Restdarstellung (s. Gl. (45)) übereinstimmt.

Eine merkliche Vereinfachung und zugleich Weiterführung eines Teils der sehr umständlichen und wenig anmutenden CRELLEschen Untersuchung giebt SCHLÖMILCH im 2. Jahrgang seiner Zeitschrift (1857) und gelangt dabei zur Darstellung von R_n sowohl durch das bestimmte Integral (welches er fälschlich als AMPÈREsche Restform bezeichnet), als auch in der CAUCHYschen Form (55).

Weitaus am einfachsten ist aber eine hierher gehörige und, wie mir scheint, zu wenig bekannte Herleitung der TAYLORschen Formel von J. CAQUÉ.[4]) Hier wird zunächst mit Hülfe einfacher Differenzen-Beziehungen die Interpolations-Formel (1) auf die Form gebracht:

$$(67) \quad f(x + m \cdot \Delta x) = f(x) + (m)_1 \cdot \Delta f(x) + \cdots + (m)_n \cdot \Delta^n f(x) + R_{n+1}$$
$$(m > n)$$

wo:

$$(68) \quad R_{n+1} = (m-1)_n \cdot \Delta^{n+1} f(x) + (m-2)_n \cdot \Delta^{n+1} f(x + \Delta x) + \cdots + (n)_n \cdot \Delta^{n+1} f(x + \overline{m - n - 1} \cdot \Delta x)$$

Mit Benutzung der bekannten, übrigens durch vollständige Induktion leicht zu verifizierenden Beziehung:

$$(m-1)_n + (m-2)_n + \cdots + (n)_n = (m)_{n+1}$$

wird sodann:

$$R_{n+1} = \Delta x^{n+1} \cdot (m)_{n+1} \cdot P_{n+1}$$

oder, wenn man $m \cdot \Delta x = h$ setzt:

---

1) Journ. f. Mathem. Bd. XXII (1839), p. 249 ff.

2) Es handelt sich dabei in Wahrheit um die Herstellung einer *Interpolationsformel* (also für *endliche* Differenzen) mit *Restglied* (vgl. Fuſsn. 2, p. 457).

3) A. a. O. p. 254, Gl. (21). Die betreffende Formel, welche nach der im Texte benützten Bezeichnung R_{n+1} entsprechen würde, enthält übrigens einen Druckfehler: im Nenner steht $(n+1)!$ statt $n!$.

4) Journ. de mathém. T. X (1875), p. 379.

$$R_{n+1} = \frac{h \cdot (h - \varDelta x) \cdots (h - n \cdot \varDelta x)}{1 \cdot 2 \cdots (n+1)} \cdot P_{n+1} \tag{69}$$

wo:

$$P_{n+1} = \frac{(m-1)_n \cdot \frac{\varDelta^{n+1} f(x)}{\varDelta x^{n+1}} + (m-2)_n \cdot \frac{\varDelta^{n+1} f(x+\varDelta x)}{\varDelta x^{n+1}} + \cdots + (n)_n \frac{\varDelta^{n+1} f(x + \overline{m-n-1} \cdot \varDelta x)}{\varDelta x^{n+1}}}{(m-1)_n + (m-2)_n + \cdots + (n)_n} \tag{70}$$

Nach einem elementaren Mittelwertsatze[1]) besitzt daher P_{n+1} einen gewissen mittleren Wert aus:

$$\frac{\varDelta^{n+1} f(x)}{\varDelta x^{n+1}}, \quad \frac{\varDelta^{n+1} f(x+\varDelta x)}{\varDelta x^{n+1}}, \quad \cdots \quad \frac{\varDelta^{n+1} f(x + \overline{m-n-1} \cdot \varDelta x)}{\varDelta x^{n+1}}.$$

Der Grenzübergang $\lim \varDelta x = 0$ (der durch vorausgehende Anwendung des Mittelwertsatzes der Diff.-R.[2]) noch an Strenge gewinnen würde) liefert dann unmittelbar die TAYLORsche Formel mit dem LAGRANGEschen Restgliede.

Die vorstehende Ableitung des fraglichen Resultates ist zwar nicht die kürzeste, sie erscheint mir aber aus *dem* Grunde beachtenswert, weil sie dessen wahre *arithmetische* Grundlage mit vollkommener Deutlichkeit hervortreten läſst.

III. *Die Konvergenz und Gültigkeit der TAYLORschen Reihenentwickelung.*

Hatte auch LAGRANGE an die Stelle der TAYLORschen *Reihe*, deren ursprüngliche Herleitung keinerlei Bürgschaft für ihre *Konvergenz* und *Gültigkeit* bot, die (unter geeigneten Voraussetzungen) allemal exakte, durch ein *Restglied* vervollständigte *Darstellungsformel* gesetzt, so war andererseits die Frage nach der *Konvergenz* und *Gültigkeit* der *ersteren* von seiner Seite nicht untersucht oder vielmehr ohne jede ausreichende Begründung in *bejahendem* Sinne entschieden worden. Für LAGRANGE steht die *Konvergenz* der TAYLORschen *Reihe* und zugleich auch die Gültigkeit der Beziehung: $f(x_0 + h) = \sum_0^\infty {}_\nu f^{(\nu)}(x_0) \cdot \frac{h^\nu}{\nu!}$ *a priori* fest, sofern nur $f(x)$ für $x = x_0$ endliche Derivierte jeder endlichen Ordnung besitzt.[3]) Das *Restglied* R_n dient ihm lediglich zur Abschätzung des *Fehlers*, den man beim *Abbrechen* der Reihe bei irgend einem bestimmten n^{ten} Gliede

---

1) CAUCHY, *Analyse algébrique*, Note II, Théorème 12, p. 447 (= *Oeuvres*, (2) T. III, p. 368).

2) Dabei wird (bei endlich bleibendem $\varDelta x$)

$$P_{n+1} = f^{(n+1)}(x + \vartheta h)$$

d. h. man erhält die sogenannte NEWTONsche *Interpolations-Formel mit Restglied* (vgl. MARKOFF, *Differenzen-Rechnung* (Leipzig 1896), p. 15, Gl. (20)).

3) *Théorie des fonct. anal.*, Chap. V, No. 30 (*Oeuvres*, T. IX, p. 65): „On conclura que le développement ne peut devenir fautif pour une valeur donnée de x, qu'au-

begehen würde, aber in *keiner* Weise *dazu*, um aus der Beschaffenheit von $\lim_{n=\infty} R_n$ Schlüsse auf die *Konvergenz* und *Gültigkeit* der *unendlichen Reihenentwickelung* zu ziehen. Auch AMPÈRE steht noch durchaus auf diesem Standpunkte, während man bei LAPLACE die Bemerkung findet[1]), dafs man aus dem *Restgliede* aufser dem *Grade der Annährung*, welche durch Summation einer *endlichen* Gliederzahl erzielt wird, auch die etwaige *Konvergenz* der Reihe beurteilen könne. Die präzise Formulierung der Konvergenz- und Gültigkeits-Bedingungen giebt dann CAUCHY im *Calc. infin.* von 1823, p. 145 (= *Oeuvres*, (2) T. IV, p. 224), nämlich:

> Die Reihe $f(x_0) + \sum_1^\infty f^{(\nu)}(x_0) \cdot \frac{h^\nu}{\nu!}$ ist *konvergent* und besitzt zugleich die Summe $f(x_0 + h)$, wenn das *Restintegral* (49) für unendlich wachsendes n gegen Null konvergiert.[2])

Zugleich aber (p. 152 bezw. p. 299) hebt er hervor[3]), dafs *selbst dann*, wenn die Reihe *konvergiert*, ihre *Summe* von $f(x_0 + h)$ *verschieden* ausfallen kann, und belegt diese Behauptung durch die MAC LAURINsche Entwickelung von $f(x) = e^{-x^2} + e^{-\frac{1}{x^2}}$. In dem *Calc. diff.* von 1829 unterscheidet er daher ganz ausdrücklich zwischen der *Konvergenz-* und der *Gültigkeits-Bedingung* und formuliert in dieser Hinsicht die folgenden Kriterien[4]):

Ist:

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \right|^{\frac{1}{n}} = \varphi \quad ^{5}), \tag{71}$$

$$f(x) + i \cdot f'(x) + \frac{i^2}{2} \cdot f''(x) + \cdots$$

tant qu'une des fonctions $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, etc. deviendra infinie, ainsi que toutes les suivantes, pour cette valeur de x." — Ebenso: *Leçons sur le calc. des fonct.*, L. VIII (*Oeuvres*, T. X, p. 72).

1) *Théorie des prob.*, Livre I, Schlufssatz (*Oeuvres*, T. VII, p. 180).

2) Weniger korrekt ist die entsprechende Formulierung im *Calc. diff.* von 1829, p. 88, wo an die Stelle des Restintegrals das LAGRANGEsche oder CAUCHYsche $R_n(x, \vartheta)$ tritt: hier genügt es in Wahrheit *nicht*, dafs $\lim_{n=\infty} R_n(x, \vartheta) = 0$ für *jeden einzelnen* Wert ϑ des Intervalls $0 \leqq \vartheta \leqq 1$, vielmehr mufs die Konvergenz gegen Null für $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ eine *gleichmäfsige* sein: vgl. Mathem. Ann. Bd. **44** (1894), p. 59.

3) Er legt auf diese Bemerkung mit Recht grofsen Wert und erwähnt sie schon im Vorwort, anschliefsend an die in Fufsn. 3), p 450) citierte, gegen LAGRANGE gerichtete Stelle: „. . . et nous ajouterons que, dans plusieurs cas, le Théorème de TAYLOR semble fournir le développement d' une fonction en série convergente, quoique la somme de la série diffère essentiellement de la fonction proposée."

4) A. a. O. p. 103, 104 (= *Oeuvres*, (2) T. IV, p. 391—393).

5) Ich benütze das Zeichen $\overline{\lim}$ (= *oberer Limes*) für CAUCHYS: *„la plus grande des limites."*

so *konvergiert* die Reihe $f(x_0) + \sum_1^\infty {}^{\nu} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(x_0) \cdot h^\nu$ für $h < \varphi^{-1}$.

Ist für irgend ein bestimmtes h_0 und $0 < \vartheta < 1$:

$$72)\quad \overline{\lim_{n=\infty}} \left| \frac{f^{(n)}(x_0 + \vartheta h_0)}{n!} \right|^{\frac{1}{n}} = \psi \quad \left(\text{oder auch: } \overline{\lim_{n=\infty}} \left| \frac{(1-\vartheta)^{n-1} \cdot f^{(n)}(x_0 + \vartheta h_0)}{(n-1)!} \right|^{\frac{1}{n}} = \psi\right),$$

so besitzt sie zugleich die Summe $f(x_0 + h)$ für $h < \psi^{-1}$.

Dabei ist $\psi = \varphi$, wenn:

$$73)\quad \left| \frac{f^{(n)}(x_0 + \vartheta h_0)}{f^{(n)}(x_0)} \right| \qquad \left(\text{bezw. } \left| \frac{(1-\vartheta)^{n-1} \cdot f^{(n)}(x_0 + \vartheta h_0)}{f^{(n)}(x_0)} \right|\right)$$

für unendlich wachsende n *endlich* bleibt.[1])

Als *Beispiel* für die *Nicht*übereinstimmung von *Reihensumme* und darzustellender *Funktion* citiert er dann wieder lediglich das bereits oben erwähnte. Wenn nun auch in der That *a priori* die *Möglichkeit* einleuchtet, dafs $\lim_{n=\infty} R_n(x_0, h)$ einen *von Null verschiedenen* (im allgemeinen dann offenbar von x_0 und h abhängigen) *endlichen Grenzwert* $R(x_0, h)$ besitzen kann, in welchem Falle dann die zu $f(x_0 + h)$ gehörige Taylorsche *Reihe* $S(x_0, h) = f(x_0) + \sum_1^\infty {}^{\nu} f^{(\nu)}(x_0) \cdot \frac{h^\nu}{\nu!}$ zwar *konvergieren,* aber *nicht* die *Summe* $f(x_0 + h)$, sondern $f(x_0 + h) + R(x_0, h)$ besitzen würde, so wird doch durch das obige Beispiel das *thatsächliche Vorkommen* dieses Falles *nicht vollkommen überzeugend* oder zum mindesten *nicht erschöpfend* erwiesen. Denn die in Frage kommende Funktion $e^{-\frac{1}{x^2}}$ ist an der kritischen Stelle $x = 0$ *überhaupt nicht „eigentlich definiert“*, d. h. sie kann aus dem sonst zu ihrer *Definition* dienenden *arithmetischen Ausdrucke*:

$$e^{-\frac{1}{x^2}} = \sum_0^\infty {}^{\nu} (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu!} \cdot \frac{1}{x^{2\nu}}$$

(oder einem ähnlichen, durch *„analytische Fortsetzung“* daraus ableitbaren[2]) durch direktes Einsetzen von $x = 0$ *nicht berechnet* werden. Der ihr für $x = 0$ zuerteilte Wert beruht vielmehr auf einer *speziellen,* bis zu einem gewissen Grade *willkürlichen* Fortsetzung. In der Umgebung einer *solchen* Stelle, für welche $f(x)$ — auch im Sinne von Lagrange — garnicht mehr den Charakter einer *„analytischen“* Funktion besitzt, kann aber die Gültigkeit der Taylorschen Reihenentwickelung von vornherein gar nicht er-

---

1) *Genauer:* Es müssen die betreffenden Ausdrücke für $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ und $n > N$ unter einer bestimmten Grenze bleiben.

2) Vgl. meine Bemerkungen: Mathem. Ann. Bd. **44** (1894), p. 51.

wartet werden. Und der *wesentlichere* Teil der hier in Betracht kommenden Frage, nämlich ob die Werte $f(x_0 + h)$ eines für $x = x_0$ mit sämtlichen Derivierten *eigentlich definierten* arithmetischen Ausdrucks $f(x)$ bei *Konvergenz* der zugehörigen TAYLORschen Reihe von deren *Summe* $S(x_0, h)$ *verschieden* ausfallen können, wird durch CAUCHYS Beispiel nicht entschieden, der *wahre Kern* der betreffenden LAGRANGEschen Hypothese bleibt also eigentlich *unberührt.*

Die *andere* Hypothese LAGRANGES, daſs nämlich die *Endlichkeit* von $f(x_0), f^{(\nu)}(x_0)$ $(\nu = 1, 2, 3\ldots)$ allemal *eo ipso* die *Konvergenz* von $S(x_0, h)$ nach sich ziehe, ist merkwürdiger Weise von CAUCHY überhaupt nicht angefochten worden, obschon gerade *sie* auf den ersten Blick den Widerspruch weit mehr herausfordert. Denn da die Werte der Derivierten $f^{(\nu)}(x_0)$, auch wenn sie für *jedes einzelne* ν *endlich* ausfallen, *im allgemeinen mit* ν *ins Unendliche* wachsen (wie schon ein Blick auf jede beliebige gebrochen-rationale, für x_0 endliche Funktion lehrt), so liegt gar kein annehmbarer Grund vor, an der Existenz von Funktionen zu zweifeln, bei welchen $|f^{(\nu)}(x)|$ für irgend ein $x = x_0$ mit ν *so stark* (z. B. so, wie $(\nu!)^2$) *zunimmt,* daſs $\Sigma \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(x_0) \cdot h^\nu$ für *kein* $h > 0$ *konvergiert.*

Im übrigen scheinen CAUCHYS immerhin zu einer schärferen Prüfung der LAGRANGEschen Hypothesen herausfordernden Bemerkungen längere Zeit kaum beachtet worden zu sein. Wohl erst nach der Mitte des Jahrhunderts fängt das oben erwähnte Beispiel an, „klassisch“ zu werden d. h. in die meisten gröſseren Lehrbücher der Differentialrechnung überzugehen, ohne freilich irgend welche Weiterbildung zu erfahren oder zu neuen, nicht schon von CAUCHY gemachten Bemerkungen Anlaſs zu geben.[1]) Einzig und allein in COURNOTS *Traité élém. de la théorie des fonctions* T. I (2. éd. 1857), p. 174 fand ich ein *Raisonnement,* welches im Anschluſs an jenes Beispiel wenigstens versucht, die Unhaltbarkeit der LAGRANGEschen *Gültigkeits*-Hypothese schärfer zu formulieren. COURNOT hebt zunächst noch prägnanter als CAUCHY den eigentlichen Grund hervor, warum aus der *Konvergenz* der Reihe noch keineswegs die *Gültigkeit* der Beziehung $S(x_0, h) = f(x_0 + h)$ folge: die Bedingung $\lim_{n=\infty} R_n = 0$ zieht zwar die *Konvergenz* der Reihe nach sich, aber *nicht umgekehrt.* Sodann erklärt er es schlechthin für *absurd,* anzunehmen, daſs die Werte von $f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), \ldots$ den Verlauf der Kurve $y = f(x)$ für irgend ein Intervall $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ *in jedem Falle* vollständig bestimmen sollen: das

---

1) HANKEL in seiner bekannten Abhandlung über die unendlich oft unstetigen Funktionen (1870) vertritt noch vollkommen den LAGRANGEschen Standpunkt: s. Mathem. Ann. Bd. **20** (1882), p. 102.

ei allerdings *beweisbar* für jedes *algebraische* $f(x)$; dieses Resultat aber uf beliebige *transcendente* oder gar „*empirische*“ Funktionen zu übertragen, lazu fehle jede Berechtigung.

Einen merklichen Fortschritt in der angedeuteten Richtung enthält rst ein 1876 in den Münchener Sitzungs-Berichten publizierter Aufatz von P. DUBOIS-REYMOND: *Über den Gültigkeitsbereich der TAYLORchen Reihenentwickelung.*[1]) Hier wird zum ersten Male ein unbeschränkt lifferenzierbarer *arithmetischer Ausdruck* $f(x)$ angegeben, dessen MAC AURINsche Reihenentwickelung *trotz* der *Endlichkeit* von $f(0)$ und $f^{(\nu)}(0)$ für jedes einzelne $\nu = 1, 2, 3, \ldots$) *beständig*, d. h. für jedes von Null erschiedene x, *divergiert*, sodaſs also hiermit wenigstens die LAGRANGEsche *Konvergenz*-Hypothese widerlegt erscheint.

Ein genaueres Eingehen auf die eigentliche, im heutigen Sinne funktionentheoretische“ Grundlage[2]) der bei dem eben genannten Beipiele auftretenden Erscheinung führte mich späterhin auf die Konstruktion hnlich gearteter Ausdrücke, welche nicht nur eine merkliche Vereinachung und Vervollkommnung des DUBOIS-REYMONDschen Beispiels liefern, ondern auch zur definitiven Beseitigung der LAGRANGEschen *Gültigkeits-Hypothese* dienlich erscheinen. Setzt man nämlich[3]):

$$(74)\qquad f(x) = \sum_0^\infty {}^{\nu}\, \frac{\lambda^\nu}{\nu!} \cdot \frac{1}{1 + a^{2\nu} x^2} \qquad (a \text{ reell und } |a| > 1),$$

o *konvergiert* diese Reihe, nebst allen durch gliedweise Differentiation araus hervorgehenden, für jeden reellen x-Bereich *absolut* und *gleichmäſsig* nd stellt also eine für alle reellen x *unbeschränkt differenzierbare*[4]) unktion vor. Da nun insbesondere:

$$(75)\quad f(0) = e^\lambda, \qquad f^{(2\mu)}(0) = 0, \qquad f^{(2\mu-1)}(0) = (-1)^\mu \cdot (2\mu)!\, e^{\lambda \cdot a^{2\mu}},$$

o erkennt man ohne weiteres mit Hülfe des CAUCHYschen Fundamentalriteriums (71), daſs die zugehörige MAC LAURINsche Reihe:

$$(76)\qquad S(0, x) = \sum_0^\infty {}^{\nu}\, (-1)^\nu \cdot e^{\lambda \cdot a^{2\nu}} \cdot x^{2\nu}$$

---

1) Wieder abgedruckt: Mathem. Ann. Bd. **21** (1883), p. 109—117.

2) Vgl. Münch. Ber. 1892, p. 216 ff.; auch: Mathem. Ann. Bd. **42** (1893), p. 156 ff.

3) Vgl. *Chicago Congr. Papers* 1893 (publ. 1896), p. 300 ff. Daselbst auch eine raphische Darstellung einer nicht-entwickelbaren Funktion und der zugehörigen, avon verschiedenen MAC LAURINschen Reihensumme.

4) Wenn von einer Funktion $f(x)$ gesagt wird, sie sei für $x_0 \leq x < X$ *unbeschränkt ifferenzierbar*, so sollen hiermit immer die folgenden Eigenschaften zusammengefaſst erden: $f(x)$ ist für $x_0 \leq x \leq X$ *eindeutig*, *endlich* und *stetig* und besitzt für $x_0 < x < X$ *vollständige*, für $x = x_0$ bezw. X zum mindesten *rechte* bezw. *linke* endche Differential-Quotienten jeder endlichen Ordnung.

im Falle $\lambda > 0$ für *jedes* $|x| > 0$ *divergiert*, dagegen im Falle $\lambda < 0$ *beständig konvergiert.* Dafs aber im letzterem Falle — mit etwaiger Ausnahme einer in jedem *endlichen* Bereiche *endlichen* Anzahl von Stellen — die Beziehung $f(x) = S(0, x)$ *unmöglich* ist, erkennt man *allgemein*, wenn man beachtet, dafs für $f(x)$ als Funktion der *komplexen* Veränderlichen x der Wert $x = 0$ als *Häufungsstelle* der unendlich vielen *aufserwesentlich singulären Stellen* $x = \pm\, i a^{-\nu}$ erscheint. Unterwirft man im übrigen a noch der Bedingung, $\geq \frac{e+1}{e-1}$ zu sein, so kann die *Nicht*-Existenz der Beziehung $f(x) = S(0, x)$ auch ganz direkt, lediglich mit den einfachsten, der Theorie der *reellen* Funktionen angehörigen Hilfsmitteln bewiesen werden.[1])

Beruhte die hier in Betracht kommende Eigenschaft des Ausdrucks (74), welcher sich auch leicht zu einem *Typus* verallgemeinern läfst[2]), im Grunde genommen auf der *Kondensation aufserwesentlicher Singularitäten*, so führt ein anderes, ebenfalls sehr einfaches funktionentheoretisches Prinzip zu einer weiteren Gruppe unbeschränkt differenzierbarer, aber nicht nach Potenzen von x entwickelbarer Ausdrücke: nämlich der Satz, dafs jede Potenzreihe $\Sigma a_\nu z^\nu$ mit dem Konvergenzradius $|z| = 1$ auf dem Konvergenzkreise *mindestens eine* singuläre Stelle besitzen mufs und dafs, im Falle *reeller* $a_\nu \geq 0$ stets $z = 1$ eine solche Stelle sein mufs. Da man andererseits die a_ν leicht so wählen kann, dafs aufser der Reihe selbst auch alle durch Differentiation daraus hervorgehenden für $z = 1$ noch *konvergieren*[3]), so gelangt man mit Hilfe der Substitution $z = e^{xi}$ (wo x *reell*) zu Ausdrücken von der Form[4]):

$$(77) \qquad f_1(x) = \sum_0^\infty {}_\nu\, a_\nu \cos \nu x, \qquad f_2(x) = \sum_0^\infty {}_\nu\, a_\nu \sin \nu x,$$

welche für jedes endliche reelle x und speziell für $x = 0$ endliche Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung besitzen, während die Entwickelbarkeit nach der MAC LAURINschen Reihe (wegen $z = 1$ für $x = 0$) ausgeschlossen erscheint. Übrigens läfst sich auch ganz direkt deren *beständige Divergenz* nachweisen.

Aus den besprochenen Ausdrücken lassen sich andere, in der Form

---

1) Vgl. *Chicago Congr. Papers* p. 302; Mathem. Ann. Bd. **42**, p. 162.

2) Vgl. a. a. O. p. 166.

3) Man hat nur zu setzen: $a_\nu = e^{-\frac{\nu}{m_\nu}}$, wo m_ν schwächer ins Unendliche wächst, als $\frac{\nu}{\lg \nu}$: s. Mathem. Ann. Bd. **44** (1894), p. 43.

4) Vgl. a. a. O. p. 45; aufserdem auch DUBOIS-REYMOND, a. a. O. p. 117; G. VIVANTI, Rivista di matematica **3** (1893), p. 111—114.

absolut konvergenter und *unbeschränkt differenzierbarer* FOURIERscher *Reihen* erscheinende ableiten, bei denen die Entwickelbarkeit nach der TAYLORschen Reihe nur auf *einer* Seite von x_0 stattfindet, während die auf der *andern* Seite selbstverständlich *gleichfalls konvergierende* Reihe die *mit allen Differentialquotienten stetig bleibende* Funktion nicht mehr darstellt.[1]) Sodann ergeben sich mit Hilfe bekannter Kondensationsmethoden auch solche Ausdrücke, welchen *trotz unbeschränkter Differenzierbarkeit* die *Nicht-Entwickelbarkeit* in der Umgebung *jeder* Stelle irgend eines *Intervalls* zukommt[2]), darunter auch die folgenden[3]):

$$(78) \qquad f_1(x) = \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{1}{\nu!} \cos a^\nu x, \qquad f_2(x) = \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{1}{\nu!} \sin a^\nu x$$

(a eine pos. ganze Zahl), welche, bei durchweg unbeschränkter Differenzierbarkeit *in jedem kleinsten Intervalle* Stellen mit beständig *divergenter*, zugleich aber auch, wenn a von der Form $4k+3$, solche mit beständig *konvergenter* TAYLORscher *Reihe* besitzen. Ich mufs indessen bemerken, dafs CH. CELLÉRIER in einer sehr merkwürdigen Abhandlung, die erst nach seinem Tode im Jahre 1890 publiziert wurde[4]), deren nicht genauer festzustellende Abfassungszeit aber erheblich zurück zu liegen scheint, die fraglichen Eigenschaften der Reihe $f_2(x)$ (mit der unnötigen Einschränkung, dafs a eine *„sehr grofse“* natürliche Zahl bedeuten solle) bereits abgeleitet hat.

Auf Grund der vorstehend mitgeteilten Resultate ist also vollkommen festgestellt, dafs die *unbeschränkte Differenzierbarkeit* von $f(x)$ für $x_0 < x < x_0 + h_0$ noch nicht die *Konvergenz* der TAYLORschen *Reihe* $S(x_0, h)$ für irgend ein $h > 0$ und diese letztere wiederum noch nicht die *Gültigkeit* der Beziehung $f(x_0 + h) = S(x_0, h)$ nach sich zieht. Und zwar — worauf ich einigen Nachdruck legen möchte — finden sich unter den, nächst den *rationalen* Funktionen, *einfachsten* arithmetischen Ausdrücken, nämlich *absolut* und *gleichmäfsig* konvergenten Reihen *rationaler*

---

1) Mathem. Ann. Bd. **44**, p. 54.

2) Mathem. Ann. Bd. **42**, p. 169—176 und (mit Berichtigung eines dort vorkommenden Fehlschlusses): Mathem. Ann. Bd. **50** (1898), p. 450. — Mathem. Ann. Bd. **44**, p. 51.

3) Vgl. aufser der zuletzt citierten Stelle: Münch. Ber. **22** (1892), p. 244 oder Mathem. Ann. Bd. **42**, p. 182. — Die Reihe $f_1(x)$ mit der Beschränkung auf *ungerade* a schon bei M. LERCH: Journ. f. Mathem. Bd. **103** (1888), p. 182.

4) Bulletin d. sc. mathém. T. XXIV (= (2) T. XIV), p. 158. Die betreffende Abhandlung ist mir leider selbst erst vor verhältnismäfsig kurzer Zeit (bei der Abfassung meines Encyklopädie-Artikels über die Grundlagen der Funktionenlehre) zu Gesicht gekommen.

Funktionen mit *rationalen Zahlenkoefficienten*, solche, bei denen der Fall der totalen *Divergenz* oder der *Nichtübereinstimmung* von $f(x_0 + h)$ und $S(x_0, h)$ wirklich eintritt (s. (74)).

Hierdurch tritt nun aber die Frage in den Vordergrund, *welche Bedingung* zu der *unbeschränkten Differenzierbarkeit* als *notwendig*[1]) und *hinreichend* noch *hinzutreten* mufs, um sowohl die *Konvergenz* von $S(x_0, h)$ als auch die *Existenz der Beziehung* $f(x_0 + h) = S(x_0, h)$ zu sichern.[2]) *Eine* derartige Bedingung besteht nun freilich in dem Verschwinden von $\lim_{n=\infty} R_n$: benützt man aber für R_n eine der erwähnten *Abschätzungsformeln*, etwa die Lagrangesche oder Cauchysche, so mufs man, da dieselben ein *unbekanntes* und überdies *mit n veränderliches* ϑ enthalten, geradezu das *gleichmäfsige Verschwinden*[3]) der betreffenden Grenzwerte für *alle* ϑ des Intervalls $0 \leqq \vartheta < 1$ verlangen, um eine zwar *hinreichende* Bedingung zu erhalten, deren *Notwendigkeit* indessen zum mindesten *fraglich* bleibt. Nimmt man dagegen für R_n die *Integralformel* (47), so gelangt man zwar zu einer *formalen Darstellung* der gesuchten *notwendigen* und *hinreichenden* Bedingung: da uns aber die *notwendigen* und *hinreichenden* Bedingungen, welchen $f(x)$ für $x_0 < x \leqq x_0 + h$ genügen mufs, damit

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{(n-1)!} \int_0^h t^{n-1} \cdot f^{(n)}(x_0 + h - t) \cdot dt$$

verschwinde, *völlig unbekannt* sind, so sagt uns jene Bedingung in Bezug auf die erforderlichen *Eigenschaften der Funktion* $f(x)$ im Grunde genommen *garnichts*. Will man diesen selbst näher kommen, so mufs man das Integral durch Mittelwert-Operationen zu reduzieren suchen und kommt dann wieder nur auf die oben genannten oder ähnliche *Abschätzungsformeln*, also schliefslich auf zwar *hinreichende*, aber zunächst *nicht notwendig* erscheinende Bedingungen.

Um nun vor allem eine *notwendige* Bedingung für die *rechtsseitige* Entwickelbarkeit von $f(x_0 + h)$ (wo also $h > 0$) zu gewinnen, habe ich mit Hilfe sehr einfacher, im wesentlichen auf der *gleichmäfsigen* Kon-

---

1) „Von den *notwendigen* Bedingungen für die Taylorsche Entwickelung, falls dergleichen vorhanden sind, haben wir aber nicht die geringste Vorstellung; ja ich glaube sogar, dafs über den Spielraum, welchen sie gewähren könnten, irrige Ansichten allgemein verbreitet sind“ (duBois-Reymond, a. a. O. p. 108).

2) Über einen von J. König (Mathem. Ann. Bd. **23** [1884] gemachten Versuch, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Taylorsche Reihenentwickelung zu formulieren, vgl. *Chicago Congr. Papers*, p. 295.

3) Vgl. Fufsn. 2) p. 458.

vergenz von Potenzreihen einer und zweier Variablen beruhender Betrachtungen den folgenden Satz bewiesen[1]):

(A) *Definiert* man $f(x)$ für $x_0 < x < x_0 + R$ durch die für $0 \leqq h < R$ als konvergent vorausgesetzte Potenzreihe:

$$(79) \qquad f(x_0 + h) = \sum_0^\infty{}^{\nu} c_\nu \cdot h^\nu,$$

so ist $f(x)$ für $x_0 < x < x_0 + R$ *unbeschränkt differenzierbar*, und man hat für $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$:

$$(80) \qquad \lim_{n=\infty} F_{p,n}(h, k) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{(n+p)!} f^{(n)}(x_0 + h) \cdot k^{n+p} = 0$$

gleichmäfsig für alle h, k des Bereiches:

$$(80^a) \qquad 0 \leqq h \leqq h + k \leqq r, \quad \text{sofern nur: } r < R.$$

Die in der Beziehung (80) enthaltene *Folge* von Bedingungen, welche hiernach für die Darstellbarkeit von $f(x_0 + h)$ durch eine *Potenzreihe* $\Sigma c_\nu h^\nu$ in *dem* Sinne als *notwendig* erscheinen, dafs sie mit Sicherheit *sämtlich* erfüllt sind, wenn jene Darstellbarkeit vorhanden ist, läfst sich aber auf *eine einzige* reduzieren, welche allemal die Existenz aller übrigen *eo ipso* nach sich zieht; d. h. es besteht der folgende Satz:

(B) Ist $f^{(n)}(x)$ eine für jedes positive ganzzahlige n und für $x_0 < x < x_0 + R$ eindeutig definierte Funktion, welche für *irgend ein* $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ der Bedingung (80) (80ª) genügt, so gilt das gleiche für *jedes* solche p.

Mit Benützung dieser beiden Sätze lassen sich nun die Gültigkeits-Bedingungen der Taylorschen Reihenentwickelung zunächst folgendermafsen formulieren:

(I) Damit die für $x_0 \leqq x < x_0 + R$ eindeutig definierte Funktion $f(x)$ darstellbar sei durch die Formel:

$$(81) \qquad f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_1^\infty{}^{\nu} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(x_0) \cdot h^\nu \quad \text{für: } 0 \leqq h < R,$$

ist *notwendig* und *hinreichend*:

1) Die unbeschränkte Differenzierbarkeit von $f(x)$ für $x_0 \leqq x < x_0 + R$.

2) Die Existenz der Beziehung (80) (80ª) für *irgend ein* $p = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

Die *Notwendigkeit* dieser Bedingungen folgt unmittelbar aus dem Satze (A). Um sie als *hinreichend* zu erweisen, steht es in Folge von

1) *Über die notwendigen und hinreichenden Bedingungen des Taylorschen Lehrsatzes* etc. Mathem.. Ann. Bd. **44** (1894), p. 57—82. Vgl. auch die Darstellungen bei Stolz (*Grundlagen* Bd. II, p. 321 — 330) und Pascal (*Esercizî di calcolo inf.* p. 196—207).

Satz (B) frei, p beliebig zu spezialisieren. Bei der Annahme $p = -1$ geht nun aber die Bedingung (80) (80[a]), wenn man ϑh (wo $0 \leqq \vartheta \leqq 1$) statt h schreibt und $k = (1 - \vartheta) \cdot h$ setzt, in die folgende über:

$$(82) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0 + \vartheta h) \cdot (1 - \vartheta)^{n-1} \cdot h^{n-1} = 0$$

(82[a]) *gleichmäfsig* für: $0 \leqq h \leqq r$ (wo: $r < R$).

Da die Bedingung (82) nach Multiplikation mit h das (für jedes einzelne $h < R$ und alle ϑ des Bereiches $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ *gleichmäfsige*) Verschwinden des CAUCHYschen *Restgliedes* aussagt, so folgt daraus auch unmittelbar die Gültigkeit der Entwickelung (81), und es ergiebt sich zugleich die folgende *kürzere* (auf Grund des Satzes (B) jedoch mit (I) völlig *gleichwertige*) Formulierung der Gültigkeitsbedingungen:

(II) Für die Existenz der Formel (81) ist aufser der Bedingung (I), 1) *notwendig* und *hinreichend*, dafs das CAUCHYsche Restglied

$$(83) \qquad R_n(x_0, h) = \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0 + \vartheta h) \cdot (1 - \vartheta)^{n-1} \cdot h^n$$

für jedes einzelne h des Bereiches $0 \leqq h < R$ und alle ϑ des Bereiches $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ bei $\lim n = \infty$ *gleichmäfsig* verschwinde.[1])

Es erwies sich nun aber als lehrreich, den Satz (I) auch noch von der Annahme $p = 0$ ausgehend, also unter der Voraussetzung:

$$(84) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + h) \cdot k^n = 0 \quad \textit{gleichmäfsig} \text{ für: } 0 \leqq h \leqq h + k \leqq r$$

zu beweisen, da sich hierbei noch eine gewisse *Herabminderung* der schliefslich an Stelle von (84) als *notwendig* in die Voraussetzung aufzunehmende Bedingung ergiebt. Bei dem betreffenden Beweise, welcher im Anschlufs an die Bedingung (84) naturgemäfs auf der Benutzung der LAGRANGEschen Restform beruht, wird nämlich jene Bedingung in Wahrheit *garnicht vollständig* in Anspruch genommen, und man gelangt darnach noch zu folgender Fassung des fraglichen Satzes:

(III) Für die Existenz der Formel (81) ist aufser der Bedingung I, 1) *notwendig* und *hinreichend*, dafs die Reihe (81) für $h < R$ *konvergiert*[2]) und dafs, nach Annahme von $r < R$ und $\varrho < R - r$:

---

1) Das CAUCHYsche Restglied, das zunächst gegenüber dem LAGRANGEschen allenfalls für gewisse spezielle Restbestimmungen vorteilhafter, im übrigen aber als von sekundärer Wichtigkeit erscheint, gewinnt hierdurch eine ganz neue *prinzipielle* Bedeutung.

2) Diese *Konvergenz* ist gleichwertig mit der Bedingung:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \cdot k^n = 0 \qquad \text{für: } k < R.$$

$$(85)\quad \lim_{n=\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) \cdot \varrho^n = 0 \quad \textit{gleichmäßig} \text{ für: } x_0 \leqq x \leqq x_0 + r.$$ [1]

Während die Fassung (I) als die *allgemeinste*, (II) als die *kürzeste* erscheint, so bietet (III) folgende Vorteile: *erstens* ist darin prägnant ausgesprochen, welche besondere Bedingung noch zur *Konvergenz* der Reihe hinzutreten muſs, um die *Gültigkeit* der Entwickelung zu sichern; *zweitens* bedarf ja die *Notwendigkeit* der *Konvergenz* überhaupt keines Beweises, während diejenige der Bedingung (85) *erheblich einfacher* bewiesen werden kann [2], als der allgemeinere Satz (A).

Die besondere Stellung, welche die CAUCHYsche Restform hierbei gewonnen hat, legt die Frage nahe, ob das LAGRANGEsche Restglied eine analoge Rolle spielt. Eine einfache funktionentheoretische Betrachtung führt nun in dieser Hinsicht zu dem folgenden Ergebnis:

(IV) Für die Existenz der Formel (81) ist auſser der Bedingung I, 1) *notwendig*, daſs das LAGRANGEsche Restglied:

$$(86)\qquad \overline{R_n(x_0, h)} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0 + \vartheta h) \cdot h^n$$

für jedes einzelne h des Bereiches $0 \leqq h < \frac{R}{2}$ und alle ϑ des Bereiches $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ *gleichmäſsig* verschwinde; *hinreichend*, jedoch *nicht notwendig*, daſs dies auch für $\frac{R}{2} \leqq h < R$ der Fall sei.

Durch die letzten Sätze (die sich unmittelbar auch auf den Fall $h < 0$ und sodann durch Kombination der beiden Fälle $h \gtrless 0$ auch auf die Entwickelbarkeit in dem zumeist üblichen Sinne übertragen lassen) dürfte der TAYLORsche *Satz* für Funktionen einer reellen Veränderlichen einen gewissen Abschluſs erhalten haben. Zugleich gewinnt man dadurch eine präzise Formulierung für das unterscheidende Merkmal, welches die Klasse der *entwickelbaren* Funktionen aus derjenigen der bloſs *unbeschränkt differenzierbaren* heraushebt: dasselbe besteht in gewissen wohldefinierten Beschränkungen (s. Gl. (84) bezw. (85) nebst Fuſsn. 2), p. 466), an welche das Unendlichwerden von $\lim_{n=\infty} f^{(n)}(x)$ geknüpft ist, und die keineswegs als eine bloſse *Folge* der unbeschränkten Differenzierbarkeit erscheinen, sondern zu dieser noch ausdrücklich *hinzutreten* müssen.

IV. *Der TAYLORsche Satz für Funktionen einer komplexen Variablen.*

Der Versuch, den TAYLORschen Satz auf Funktionen einer *komplexen* Veränderlichen zu übertragen, dürfte zuerst von CAUCHY in dem *Calcul*

1) Es wird also hier die Existenz der Beziehung (84) zunächst nur für $h = 0$ verlangt (s. die vorige Fuſsnote); dagegen für alle übrigen h nur bei *konstantem*, im übrigen durch Wahl von r *beliebig klein* zu machendem $k = \varrho$.

2) Vgl. a. a. O. p. 66, Zusatz I.

diff. von 1829 gemacht worden sein. Nachdem er schon früher (in dem *Calcul inf.* von 1823, p. 155 = *Oeuvres* (2) T. IV, p. 234) erkannt hatte, dafs die Anwendung des Grenzprozesses $\lim\limits_{\Delta z=0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ auf die besonderen Fälle $f(z)=e^z$, $f(z)=\lg z$ bei *komplexem* z und Δz genau dasselbe Resultat ergiebt, wie bei *reellem*, *definiert* er in der 12. Lektion des zuerst genannten Werkes (p. 138 = *Oeuvres* (2) T. IV, p. 431) den Differentialquotienten $f'(z)$ für den Fall eines *komplexen* z allgemein durch die Gleichung:

$$f'(z)=\lim_{\Delta z=0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}, \tag{87}$$

wobei dieser Grenzübergang so zu verstehen ist, dafs über die besondere Art, wie das komplexe Inkrement Δz der Null zustrebt, keinerlei Voraussetzung gemacht wird. Die Berechtigung zur Aufstellung dieser Definition erblickt CAUCHY darin, dafs dieselbe thatsächlich ein *eindeutig bestimmtes* $f'(z)$ liefert, sobald man die „*Form*" von $f(z)$ fixiert hat, d. h. genauer gesagt, sobald man jenen Grenzprozefs auf die bekannten Elementarfunktionen und deren rationale Zusammensetzungen anwendet (wie a. a. O. des näheren gezeigt wird). Die entsprechende Definition gilt auch für die höheren Differentialquotienten.

Die Substitution

$$z=r\cdot e^{ti} \ (t \text{ konstant}), \quad f(z)=\varphi(r)+i\cdot\psi(r) \tag{88}$$

führt sodann (a. a. O. p. 147 ff.) auf die Relationen:

$$\begin{cases} f'(z)=\lim\limits_{\Delta r=0} \dfrac{f(re^{ti}+\Delta r\cdot e^{ti})}{\Delta r\cdot e^{ti}}=e^{-ti}\left(\varphi'(r)+i\cdot\psi'(r)\right) \\ f^{(\nu)}(z)=e^{-\nu ti}\left(\varphi^{(\nu)}(r)+i\cdot\psi^{(\nu)}(r)\right), \end{cases} \tag{89}$$

und die Anwendung der MAC LAURINschen Formel auf $\varphi(r)$, $\psi(r)$ liefert, mit Benützung der aus (89) resultierenden Beziehung:

$$\varphi^{(\nu)}(0)+i\cdot\psi^{(\nu)}(0)=f^{(\nu)}(0) \qquad (\nu=1,2,3,\ldots), \tag{90}$$

ohne weiteres die Übertragung jener Formel auf $f(z)$, nämlich:

$$f(z)=f(0)+f'(0)\cdot\frac{z}{1!}+\cdots+f^{(n-1)}(0)\cdot\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}+R_n, \tag{91}$$

wobei freilich das Restglied in der wenig brauchbaren Form erscheint:

$$R_n=\frac{e^{-nti}\cdot z^n}{n!}\cdot\{\varphi(\vartheta r)+i\cdot\psi(\eta r)\} \qquad \left(0<\begin{Bmatrix}\vartheta\\ \eta\end{Bmatrix}<1\right). \tag{92}$$ [1]

---

1) Man kann R_n auf die etwas elegantere Form bringen:

$$R_n=\frac{z^n}{n!}\lambda\cdot\sqrt{2}\cdot F_n,$$

wo $|\lambda|\leqq 1$ und F_n das Maximum von $|f^{(n)}(z')|$ für $|z'|\leqq|z|$ bezeichnet (s. z. B. LAURENT, *Traité d'analyse* T. I [1885], p. 190).

Durch die bekannte lineare Transformation (vgl. p. 446 den Übergang von Gl. (26) zu Gl. (30)) findet CAUCHY auch die entsprechende Darstellung der allgemeinen TAYLORschen Formel für $f(z+h)$.

Auf dem von CAUCHY hier benützten, sehr nahe liegenden Grundgedanken, diese Entwickelungen aus den für *reelle* Veränderliche geltenden dadurch abzuleiten, dafs man die letzteren auf den reellen und von dem Faktor i befreiten imaginären Teil von $f(z)$ anwendet, beruht auch die von FALK[1]) und eine von MANSION[2]) gegebene Herleitung, mit dem einzigen Unterschiede, dafs daselbst von der Zerlegung:

$$f(z) = f(x+yi) = \varphi(x,y) + i \cdot \psi(x,y) \tag{93}$$

ausgegangen wird, sodafs das Restglied in entsprechend modifizierter, übrigens aber ebenso wenig befriedigender Form erscheint.

Zu einer brauchbareren Restformel gelangte DARBOUX[3]) durch direkte Übertragung des *erweiterten (CAUCHYschen) Mittelwertsatzes* (51) auf Funktionen einer *komplexen* Veränderlichen. Darnach hat man:

$$\frac{F(Z)-F(z')}{(Z-z')^p} = \frac{\lambda}{p} \cdot \frac{F'(\zeta)}{(\zeta - z')^{p-1}}, \tag{94}$$

wo λ eine (im allgemeinen komplexe) Zahl mit dem absoluten Betrage $|\lambda| \leq 1$ und ζ eine auf der Verbindungslinie $\overline{z'Z}$ gelegene Stelle bedeutet (also: $\zeta = z' + \vartheta(Z-z')$, wo $0 < \vartheta < 1$). Durch Anwendung dieser Relation (für $z'=0$, $Z=h$) auf die Funktion:

$$F(z) = f(z_0+h) - f(z_0+h-z) - f'(z_0+h-z)\cdot\frac{z}{1!} - \cdots - f^{(n-1)}(z_0+h-z)\cdot\frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \tag{95}$$

ergiebt sich dann unmittelbar die TAYLORsche Formel für $f(z_0+h)$ mit dem Restgliede:

$$R_n = \lambda \cdot \frac{(1-\vartheta)^{n-p}\cdot h^n}{(n-1)!\,p} f^{(n)}(z_0+\vartheta h), \tag{96}$$

welches sich von dem SCHLÖMILCH-ROCHEschen (s. Gl. (56)) nur um den Faktor λ unterscheidet.

Den von DARBOUX lediglich mit Hülfe einer kinematischen Betrachtung bewiesenen Mittelwertsatz (94) hat MANSION späterhin auch rein

---

1) *Sur les fonctions imaginaires à l'égard spécial du calcul des résidus* (Nova acta soc. scient. Upsal., Vol. extra ordinem, Upsala 1877), p. 14.

2) *Principe d'une théorie nouvelle des fonctions élémentaires d'une variable imaginaire*; Annales de la soc. scient. de Bruxelles, 1885—86, p. 11.

3) *Sur les développements en série des fonctions d'une seule variable*; Journ. de mathém. (2) T. II (1876), p. 293.

analytisch begründet.[1]) Zugleich giebt er noch eine andere Herleitung der Taylorschen Formel mit Hülfe einer geradlinigen komplexen Integration. Das Restglied der Entwickelung von $f(z)$ nach Potenzen von $(z - z_0)$ erscheint dabei in der Form[2]):

$$(97) \qquad R_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_{z_0}^{z} (z-t)^{n-1} f^{(n)}(t) \cdot dt,$$

vollkommen übereinstimmend mit der entsprechenden Restdarstellung für *reelle* z.[3])

Im übrigen wird man den vorstehenden Methoden zur Ableitung der Taylorschen Formel für Funktionen einer *komplexen* Veränderlichen lediglich eine *untergeordnete* Bedeutung zuerteilen können. Sie beruhen nämlich auf einer im Grunde genommen allzu einseitigen und dem wahren Wesen der Sache *nicht* entsprechenden Übertragung der für *reelle* Veränderliche angemessenen Voraussetzungen und Schlufsfolgerungen: dabei mufs dann, statt die in Gl. (87) formulierte Fundamentalbedingung der Existenz eines bestimmten $f'(z)$ (im *komplexen* Sinne) wirklich *auszunützen*, eine ganze Folge in Wahrheit *überflüssiger* Bedingungen in die Voraussetzung aufgenommen wurden.

Die Tragweite[4]) jener Fundamentalbedingung (87) vollständig erkannt und für den Existenzbeweis der Taylorschen Entwickelung verwertet zu haben, darf wohl (in Verbindung mit dem zu diesen Untersuchungen in naher Beziehung stehenden „*Cauchyschen Integralsatze*") für die bedeutendste analytische Leistung Cauchys gelten. In zwei 1831, 1832 in *Turin* lithographisch publizierten Abhandlungen[5]) *Sur la mécanique céleste* und *Sur le calcul des résidus et des limites* hat Cauchy den folgenden Satz aufgestellt:

---

1) a. a. O. p. 36. — Ein anderer Beweis, der auf einer Weierstrass zugeschriebenen Übertragung des Mittelwertsatzes auf *komplexe* Funktionen einer *reellen* Veränderlichen beruht, bei Stolz, *Grundlagen*, Bd. II, p. 92 (vgl. auch p. 69).

2) a. a. O. p. 31.

3) S. Gl. (49). Man hat daselbst nur $z = z_0 + h$ zu setzen und sodann $z_0 + t$ als Integrationsvariable statt t einzuführen.

4) Die Thatsache, dafs jene *eine* Bedingung *mehr* leistet, als selbst die *unbeschränkte* Differenzierbarkeit im *reellen* Sinne, findet ihre einfache Erklärung darin, dafs die *letztere* immerhin nur eine *abzählbare* Menge von Bedingungen, dagegen die *einfache* Differenzierbarkeit im *komplexen* Sinne schon allein eine solche *von der Mächtigkeit des Kontinuums* repräsentiert.

5) Die Originale sind mir leider nicht zu Gesicht gekommen. Ich citiere die Titel nach Valson, *Vie et travaux de Cauchy*, den Inhalt auf Grund des teilweisen Wiederabdruckes in späteren Publikationen Cauchys (s. weiter unten).

Die Funktion $f(z)$ (von welcher stillschweigend vorausgesetzt wird, daſs sie für eine gewisse Umgebung von $z = 0$ eindeutig, stetig und mit einem endlichen $f'(z)$ im Sinne der Gl. (87) begabt ist) läſst sich nach positiven ganzen Potenzen von z entwickeln, solange $|z|$ kleiner ist, als der absolut genommen kleinste Wert $|Z| = R$, für welchen $f(z)$ unstetig oder unendlich wird. Der Gang des Beweises ist folgender. Setzt man $z = \varrho \cdot e^{ti}$ (wo $\varrho < R$), so hat man, wenn $F(z)$ eine Funktion vom Charakter $f(z)$ bedeutet:

$$(98) \qquad \frac{\partial F(\varrho e^{ti})}{\partial \varrho} = \frac{1}{\varrho i} \cdot \frac{\partial F(\varrho e^{ti})}{\partial t} \;{}^{1)}$$

und daher:

$$(99) \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} dt \int_0^r \frac{\partial F(\varrho e^{ti})}{\partial \varrho} \cdot d\varrho = \frac{1}{i} \int_{-\pi}^{+\pi} dt \int_0^r \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial F(\varrho e^{ti})}{\partial t} \qquad (r < R).$$

Vertauscht man in dem rechts stehenden Integrale die *Integrationsfolge*, so folgt durch Ausführung der *inneren* Integrale:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \{F(re^{ti}) - F(0)\} dt = \frac{1}{i} \int_0^r \{F(\varrho e^{\pi i}) - F(\varrho e^{-\pi i}\} d\varrho$$
$$= 0 \;{}^{2)}$$

also:

$$(100) \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} F(re^{ti}) \cdot dt = 2\pi \cdot F(0) \qquad (r < R).$$

Wird jetzt mit z ein beliebiger, der Bedingung $|z| < r$ genügender Wert bezeichnet, und setzt man sodann:

---

1) Wegen:

$$\frac{\partial F(z)}{\partial r} = f'(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial r} = e^{ti} \cdot f'(z),$$
$$\frac{\partial F(z)}{\partial t} = f'(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = ir \cdot e^{ti} \cdot f'(z)$$

(s. z. B. Cauchy-Moigno, *Leçons de calc. diff. et int.*, T. II, p. 328).

2) Ich bemerke, daſs Cauchys Definition der *Stetigkeit* von $F(z)$, d. h. einer *einwertigen* bezw. eines *eindeutigen* Zweiges einer *mehrwertigen* Funktion allemal die Existenz der Beziehung:

$$F(re^{ti}) = F(re^{(t \pm 2n\pi)i})$$

umfaſst: vgl. Journ. de mathém. T. XI (1846), p. 316 und weiter unten p. 474, Fuſsn. 2). Ein gewöhnlicher *Verzweigungspunkt* Z hätte daher bei Cauchy zwar noch als *Stetigkeitspunkt*, zugleich aber als *Grenzpunkt* (Häufungsstelle) von *Unstetigkeitspunkten* zu gelten. Infolge dessen müſste in dem obigen Hauptsatze R *nicht* definiert werden als *Minimum* der Absolutwerte von z, für welche $f(z)$ *unstetig* wird, sondern als *untere Grenze* dieser Werte.

$$F(re^{ti}) = \frac{f(re^{ti}) - f(z)}{re^{ti} - z} \cdot re^{ti} \qquad (\text{also: } F(0) = 0),$$

so ergiebt sich aus Gl. (100):

$$(101) \qquad f(z) \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{re^{ti}}{re^{ti} - z} \cdot dt = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{f(re^{ti}) \cdot re^{ti}}{re^{ti} - z} \cdot dt.$$

Mit Benützung der Entwickelung von $\frac{re^{ti}}{re^{ti} - z}$ in eine für $|z| < r$ konvergierende Reihe nach Potenzen von $\frac{z}{r} \cdot e^{-ti}$ liefert das *links* stehende Integral den Wert 2π, und man findet durch Einführung der nämlichen, aber *begrenzten* Entwickelung in das *rechts* stehende Integral:

$$(102) \qquad f(z) = \sum_{0}^{n-1} {}_{\nu}\, c_\nu z^\nu + R_n,$$

wo:

$$(103) \qquad c_\nu = \frac{1}{2\pi r^\nu} \int_{-\pi}^{+\pi} f(re^{ti}) \cdot e^{-\nu ti} \cdot dt \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$(104) \quad R_n = \frac{z^n}{2\pi \cdot r^{n-1}} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{f(re^{ti})}{re^{ti} - z} \cdot e^{-(n-1)ti} \cdot dt, \quad \text{also: } |R_n| < \frac{r \cdot F_r}{r - |z|} \cdot \left|\frac{z}{r}\right|^n,$$

wenn F_r das *Maximum* von $|f(z)|$ für alle möglichen $|z| = r$ bedeutet. Man hat daher:

$$(105) \qquad \lim_{n=\infty} R_n = 0 \quad \text{für } |z| < r, \text{ d. h. schliefslich für } |z| < R,$$

womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Hierzu ist aber folgendes zu bemerken. Da der eigentliche *Kern* des Beweises in einer *Vertauschung der Integrationsfolge* (Gl. (99), (100)) liegt, so müssen $\frac{\partial F}{\partial r}$, $\frac{\partial F}{\partial t}$, d. h. schliefslich $f'(z)$ geeigneten *Stetigkeitsbedingungen*[1]) genügen, von denen aber bei Cauchy a. a. O. mit keinem Worte die Rede ist. Er scheint dort in der That der Ansicht zu sein, dafs $f'(z)$ immer nur *gleichzeitig* mit $f(z)$ *unstetig* werden könne. Bei einem Wiederabdrucke des obigen Satzes in den *Nouv. exercises*, T. I (1840) *fügt er* nämlich die Voraussetzung der *Stetigkeit* von $f'(z)$ *ausdrücklich hinzu* und zwar mit der Motivierung (a. a. O. p. 32): wenn es feststünde, dafs $f'(z)$ nur gleichzeitig mit $f(z)$ die Stetigkeit verlieren könnte (wie es thatsächlich bei den von ihm zu Beispielen herangezogenen Funktionen der Fall

1) Solche sind ja sogar schon erforderlich, damit die betreffenden Integrale überhaupt einen *Sinn* haben.

ist[1]), so dürfte man die fragliche Voraussetzung fortlassen; da aber eine genügende Sicherheit in dieser Beziehung *nicht* bestehe, so müsse man eben die Stetigkeit von $f'(z)$ *noch besonders voraussetzen.* So findet sich denn auch die ausdrückliche Voraussetzung der *Stetigkeit* von $f'(z)$ in dem *Résumé* jener *Turiner* Abhandlungen, welches CAUCHY in den 2. Band der *Nouv. exercises* (1841) aufgenommen hat.[2]) Nichtsdestoweniger hat gerade diese Stetigkeitsbedingung noch mancherlei Schicksale gehabt. Während CAUCHY dieselbe im 19. Bande der Comptes rendus (1844, I) noch beibehält[3]), stellt er schon im folgenden (1844, II) die *Behauptung* auf[4]), aus seinen Untersuchungen über die verschiedenen Werte eines zweifachen Integrales bei Vertauschung der Integrationsfolge gehe mit voller Sicherheit hervor, dafs man, ohne an Strenge einzubüfsen, bei dem Satze über die Potenzreihenentwickelung eine besondere Voraussetzung über die *Stetigkeit* von $f'(z)$ *nicht* einzuführen brauche: dies stimme auch überein mit einer ihm von LIOUVILLE mitgeteilten[5]) Bemerkung, sodafs also die *ursprüngliche* (*Turiner*) Fassung von 1831 der späteren vorzuziehen sei. Auf welche Stelle der angeführten Untersuchungen über zweifache Integrale[6]) sich jene *Behauptung* gründet, ist mir völlig unerfindlich. Nur soviel scheint mir festzustehen, dafs CAUCHY dieselbe von nun ab *aufrecht erhält, ohne* sie freilich jemals wirklich *bewiesen* zu haben.

Nichtsdestoweniger unterliegt es wohl keinem Zweifel, dafs ein so scharfsinniger und strenger Analytiker wie CAUCHY zur Aufstellung der fraglichen Behauptung seine guten Gründe gehabt haben mufs. Ich möchte annehmen, dafs es sich dabei mehr um eine nach unseren *heutigen* Begriffen *inkorrekte Ausdrucksweise*, als um einen wirklichen — wenn auch nur *subjektiven*[7]) — *Irrtum* handelt. Man hat sich nur zu vergegenwärtigen, dafs für CAUCHY Funktionen mit *„unendlich vielen“* Unstetig-

---

1) Dieselben sind durchweg Funktionen mit *Unendlichkeitspunkten.* Soll die fragliche Aussage auch auf *endlich* bleibende *eindeutige* Zweige *mehrwertiger* Funktionen passen, so müfste sie zum mindesten dahin formuliert werden, dafs $f'(z)$ nur in einem Unstetigkeitspunkte von $f(z)$ oder *Grenzpunkte* von Unstetigkeitspunkten (s. p. 471, Fufsn. 1)) die Stetigkeit verlieren könne.

2) a. a. O. p. 50.

3) *Sur les fonctions continues* (a. a. O. p. 120 = *Oeuvres* (1) T. VIII, p. 150).

4) a. a. O. p. 1339 = *Oeuvres* (1) T. VIII, p. 368.

5) Wohl nur mündlich?

6) *Mémoire sur les intégrales définies* (1814, gedruckt 1827 in den Mém. de l'Inst. = *Oeuvres* (1) T. I, p. 319—506). — *De l'influence que peut avoir dans une intégrale double l'ordre etc.* (Bull. de la soc. philomath. 1822; auch *Anc. exerc.* T. I [1826], p. 85).

7) In Wahrheit hat sich die CAUCHYsche Behauptung, freilich erst in allerneuester Zeit, *in ihrem vollen Umfange* als *richtig* erwiesen (s. weiter unten).

keiten (in dem heutigen allgemeinsten Sinne) überhaupt *noch garnicht existieren.* Wenn also CAUCHY sagt, man brauche von irgend einer Funktion *garnichts* vorauszusetzen, so heifst das trotz alledem von vornherein schon immer so viel, als: man hat dieselbe für jeden endlichen Bereich *„im allgemeinen“*, d. h. (da es sich ja hier um Funktionen einer *komplexen*, also *zweier reellen* Variablen handelt) mit eventueller Ausnahme einer *endlichen* Anzahl von *Punkten* oder *Linien* (mit *endlicher* Länge) als *stetig* zu denken. Fafst man aber den Begriff einer *für* CAUCHY *„voraussetzungslosen“* Funktion in *diesem* Sinne auf, so ist in der That die fragliche Behauptung nicht nur *objektiv richtig*, sondern auch vom CAUCHYschen Standpunkte aus *einwandfrei*, d. h. mit ausschliefslicher Benützung der von ihm ersonnenen und gehandhabten Methoden vollkommen *beweisbar.*[1])

Im übrigen erscheint es nicht uninteressant, die weitere historische Entwickelung unseres Theorems gerade mit besonderer Rücksicht auf die für $f'(z)$ erforderlichen Stetigkeitsbedingungen zu verfolgen.

E. LAMARLE, dem die oben citierte Bemerkung CAUCHYS bezw. LIOUVILLES offenbar entgangen war, veröffentlichte im 11. Bande des Journ. de mathém. (1846), p. 13 ff. eine Note *Sur le théorème de M. CAUCHY relatif au développement des fonctions en séries*, in welcher er die von CAUCHY in den *Nouv. exercises* a. a. O. geforderte Stetigkeit von $f'(z)$ für überflüssig erklärt.[2]) Beim Beweise geht er, wie CAUCHY, von der Beziehung aus:

$$\frac{\partial F(re^{ti})}{\partial r} = \frac{1}{ri} \cdot \frac{\partial F(re^{ti})}{\partial t}$$

und schliefst zunächst:

$$\text{(106)} \qquad \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\partial F(re^{ti})}{\partial r} \cdot dt &= \frac{1}{ri} \int_0^{2\pi} \frac{\partial F(re^{ti})}{\partial t} \cdot dt \\ &= \frac{1}{ri} \left\{ F(re^{2\pi i}) - F(0) \right\} = 0. \end{aligned}$$

---

1) Nämlich mit Hülfe der genau entsprechenden Ausdehnung des „*CAUCHYschen Integralsatzes*“, welche sich durch *vorläufige* Ausschliefsung der kritischen Punkte oder Linien leicht bewerkstelligen läfst.

2) Andererseits führt LAMARLE noch ausdrücklich die Bedingung ein, es müfste $F(z)$ für $z = r \cdot e^{ti}$ in Bezug auf t die Periode 2π besitzen: dieselbe ist aber in der That überflüssig, wenn man den Begriff der *Stetigkeit* im CAUCHYschen Sinne auffafst (s. Fufsn. 1) p. 471). Was LAMARLE an späterer Stelle (Journ. de mathém. T. XII [1847], p. 305 ff.) hiergegen noch vorbringt, läuft im wesentlichen auf einen Wortstreit hinaus. Mit Recht wendet er sich dagegen (a. a. O. p. 330 ff.) gegen eine andere Bemerkung CAUCHYS (Comptes rendus, T. **19** [1844, II], p. 141 = *Oeuvres* (1), T. VIII, p. 264), des Inhalts, dafs die MAC LAURINsche Reihe für $f(z)$ bei $|z| > r$ noch *konvergieren* könne, wenn $f(z)$ für irgend ein z mit dem absoluten Betrage r *endlich-*

Andererseits folgt aber durch *Vertauschung der Reihenfolge von Integration und Differentiation*

$$(107) \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\partial F(re^{ti})}{\partial r} \cdot dt = \frac{\partial}{\partial r} \int_0^{2\pi} F(re^{ti}) \cdot dt,$$

sodaſs also nach Gl. (106) $\int_0^{2\pi} F(re^{ti}) \cdot dt$ von r *unabhängig* sein muſs. Man kann also speziell $r = 0$ setzen und findet somit, analog wie bei Cauchy (Gl. (100)):

$$(108) \qquad \int_0^{2\pi} F(re^{ti}) \cdot dt = \int_0^{2\pi} F(0) \cdot dt = 2\pi \cdot F(0),$$

woraus sich dann alles weitere genau wie dort ergiebt.

Der einzige prinzipielle Unterschied des Lamarleschen Beweisverfahrens gegenüber dem Cauchyschen besteht also darin, daſs hier *nicht* die Reihenfolge zweier *Integrationen*, sondern diejenige von *Integration* und *Differentiation* vertauscht wird: dazu ist aber auch wiederum erforderlich, daſs $\frac{\partial F(re^{ti})}{\partial r}$, d. h. $F'(z)$ geeigneten *Stetigkeitsbedingungen* unterworfen wird, sodaſs also die Tragweite von Lamarles Beweis über diejenige des Cauchyschen nicht hinausgeht.

In seiner Replik[1]) auf die vorstehende Note weist Cauchy nur darauf hin, daſs er die Bemerkung von der Überflüssigkeit der auf $f'(z)$ bezüglichen Stetigkeitsbedingung bereits gemacht habe — ohne indessen für die genauere Begründung der betreffenden Behauptung etwas Neues vorzubringen. Dagegen zeigt er[2]), daſs er die von Lamarle angewendete Schluſsweise im wesentlichen bereits an einer früheren Stelle[3]) zur Ableitung der Mac Laurinschen Reihenentwickelung benützt habe, mit dem einzigen Unterschiede, daſs er dort statt der *Integrale* gewisse *Mittelwerte*

---

unstetig wird $\left(\textit{Beispiel: } f(z) = \left(1 - z^2 + iz \cdot \sqrt{2 - z^2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(1 - z^2 - iz \cdot \sqrt{2 - z^2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$. Dieses scheinbare Paradoxon beruht in Wahrheit lediglich auf der unzulänglichen Auffassung der verschiedenen *Zweige* einer *mehrwertigen* Funktion.

1) Journ. de mathém. T. XI, p. 313 ff.

2) A. a. O. p. 328. Anschlieſsend bemerkt Cauchy, daſs man das fragliche Resultat (d. h. eigentlich den erforderlichen besonderen Fall des Cauchyschen Integralsatzes) auch mit Hülfe einer von ihm (*Calcul inf.* p. 131 = *Oeuvres* (2), T. IV, p. 199) angegebenen Formel zur Integration *vollständiger Differentiale* herleiten kann. Im übrigen kommt man hierbei auch nicht aus, ohne $f'(z)$ gewissen Stetigkeitsbedingungen zu unterwerfen: vgl. meinen Beweis des Cauchyschen Integralsatzes, Münch. Ber. Bd. **25** (1895), p. 63 ff.

3) *Nouv. exercises*, T. I (1840), p. 269 ff. (Auch: Comptes rendus, T. **10** [1840, I], p. 640 = *Oeuvres* (1) T. V, p. 180).

(d. h. eigentlich *Spezialdefinitionen* jener Integrale) in Anwendung bringt, nämlich:

$$(109)\qquad \mathcal{M}(F(r)) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1}{}_{\nu} F\left(e^{\frac{2\nu\pi i}{n}} \cdot r\right). \;^{1})$$

Mit Hülfe der Beziehung:

$$(110)\qquad \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = F'(z) + \varphi \qquad (\text{wo: } |\varphi| < \varepsilon \text{ für: } |h| < \delta)$$

beweist a. a. O. CAUCHY, dafs $\mathcal{M}(F(r))$ für $0 \leqq r < R$ von r *unabhängig* ist, falls $F(z)$, $F'(z)$ für $0 \leqq |z| < R$ *stetig* sind: die besondere Wahl $r = 0$ liefert also wiederum die mit der Integralbeziehung (108) bezw. (100) gleichwertige Relation:

$$(111)\qquad \mathcal{M}(F(r)) = F(0).$$

CAUCHYS Beweis ist insofern unvollständig, als derselbe *wesentlich* auf der Voraussetzung der *gleichmäfsigen* Differenzierbarkeit von $F(z)$ beruht, d. h. es wird dabei die Existenz der Bedingung (110) in *dem* Sinne gefordert, dafs für *alle* in Betracht kommenden z durchweg $|\varphi| < \varepsilon$ ausfällt, sofern nur $|h| < \delta$. Auch fehlt der Nachweis für die *Existenz* des Grenzwertes $\mathcal{M}(F(r))$. Beide Lücken lassen sich indessen ausfüllen. Wie ich gezeigt habe, zieht in der That die *Stetigkeit* von $F'(z)$ stets auch die *gleichmäfsige* Differenzierbarkeit von $F(z)$ nach sich[2]), während andererseits die spezielle Annahme $n = 2^m$ gestattet, den fraglichen Existenzbeweis für $\mathcal{M}(F(r))$ in aufserordentlich einfacher Weise zu führen.[3]) Zugleich gewinnt man dabei den Vorteil, die bei *beliebigem* n in der *transcendenten* Form $e^{\frac{2\nu\pi i}{n}}$ erscheinenden Einheitswurzeln durch die ν^{ten} Potenzen einer eindeutig definierten, $(m-2)$ *fach iterierten Quadratwurzel* ersetzen zu können, sodafs man auf diese Weise den TAYLORschen Satz (und sogar dessen LAURENTsche Verallgemeinerung) für ein mit *stetigem* $f'(z)$ begabtes $f(z)$ unter ausschliefslicher Benutzung der denkbar *elementarsten* Hülfsmittel herzuleiten vermag.[4]) Dabei läfst sich die auf $f'(z)$ bezügliche *Stetigkeits*-Voraussetzung zwar analog, wie bei den zuvor betrachteten

---

1) Man hat offenbar:

$$\mathcal{M}(F(r)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r e^{ti}) \cdot dt.$$

2) Münch. Ber. Bd. **25** (1895), p. 297. Anderer Beweis bei STOLZ, *Grundlagen* Bd. II, p. 94.

3) Mathem. Ann. Bd. **47** (1896), p. 132. Der entsprechende Beweis bei *beliebigem* n würde ganz dieselben Umständlichkeiten erfordern, wie der Existenzbeweis für das bestimmte Integral.

4) Münch. Ber. Bd. **26** (1896), p. 172.

Integralbeweisen, noch merklich reduzieren, immerhin verbleibt sie als *„im allgemeinen“* erforderlich.

Auch die bisherigen Beweise des CAUCHYschen *Integralsatzes*, welcher ja die zur Herleitung des TAYLORschen Satzes dienenden Fundamentalgleichungen (100) bezw. (108) oder (111) als Folgerungen enthält, zeigen sich — mit einer sogleich zu besprechenden Ausnahme neuesten Datums — nicht geeignet, ein gewisses Mafs von *Stetigkeits*-Bedingungen für $f'(z)$ entbehrlich zu machen.[1]) Der innere Grund dieser Erscheinung ist wohl darin zu suchen, dafs die Mehrzahl dieser Beweise in letzter Linie garnicht auf der Existenz eines von der Art des Grenzüberganges unabhängigen $f'(z)$, vielmehr nur auf derjenigen der Beziehungen:

$$(112)\qquad \frac{\partial f(z)}{\partial x} = \frac{1}{i}\cdot\frac{\partial f(z)}{\partial y} \quad \text{bezw.} \quad \frac{\partial f(z)}{\partial r} = \frac{1}{ri}\cdot\frac{\partial f(z)}{\partial t}$$

beruht.[2]) Da diese letzteren zwar aus der Existenz von $f'(z)$ *folgen*, dagegen noch nicht ausreichen, um dieselbe auch umgekehrt *nach sich zu ziehen*[3]), so wird also bei diesen Beweisen die *eigentliche* Voraussetzung noch nicht vollständig ausgenützt, und es erscheint *a priori* begreiflich, dafs als Ersatz für das so entstehende Manko noch gewisse *Stetigkeits*-Bedingungen[4]) zu den Beziehungen (112) hinzutreten müssen.

Andererseits hatte es aber bisher den Anschein, dafs auch diejenigen Beweise, welche auf der *direkten* Verwertung der *Differenzierbarkeit* von $f(z)$, d. h. der Existenz der Beziehung beruhen:

$$(113)\qquad \left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - f'(z)\right| < \varepsilon \quad \text{für: } |h| < \delta \quad ^{5}),$$

erst exakt ausfallen, wenn (geradeso wie bei der Herleitung der CAUCHYschen Gleichung (111)) die *gleichmäfsige*[6]) Differenzierbarkeit von $f(z)$ vorausgesetzt wird. Dies galt insbesondere zunächst auch von dem in diese Kategorie gehörigen sehr einfachen Beweise, den GOURSAT im 4. Bande der Acta mathematica (1884), p. 197—200 mitgeteilt hat. Nun hat

---

1) Vgl. meine Bemerkungen in den Münch. Ber. Bd. **25** (1895), p. 41 ff; desgl. p. 304.

2) Das gleiche gilt auch von denjenigen Beweisen des TAYLORschen Satzes, welche die FOURIERsche Reihenentwickelung von $f(z)$ längs einer Kreislinie zum Ausgangspunkte nehmen. Vgl. BONNET, *Mémoire sur la théorie générale des séries* (Mém. Acad. Belg. T. **23** [1850]), p. 94; HARNACK, Mathem. Ann. Bd. **21** (1883), p. 306; PICARD, *Traité d' analyse* T. II (1893), p. 64.

3) Vgl. THOMAE, *Abrifs einer Theorie der kompl. Funktionen* etc. (2. Aufl., Halle 1873) p. 17, 119. — STOLZ, *Grundlagen*, Bd. I, p. 134; Bd. II, p. 82.

4) Über die hierbei äufsersten Falls zu erzielende *Reduktion* dieser Stetigkeitsbedingungen vgl. Münch. Ber. Bd. **29** (1899), p. 61.

5) Dabei könnte zunächst δ mit z veränderlich sein.

6) D. h. die Konstanz von δ bei veränderlichem z.

aber GOURSAT neuerdings gezeigt[1]), daſs man gerade bei diesem Beweise denjenigen Schluſs, welchen er ursprünglich auf die Voraussetzung der *gleichmäſsigen* Differenzierbarkeit gegründet hatte, auch schon mit Hülfe einer weniger eng gefaſsten, *jeder* (im komplexen Sinne) *differenzierbaren* Funktion *eo ipso* zukommenden Eigenschaft herleiten kann. Dieselbe ist in dem folgenden Lemma enthalten:

Es besitze $f(z)$ für jede Stelle im Innern und auf der Begrenzung des endlichen Bereiches A ein endliches $f'(z)$.[2]) Wird dann $\varepsilon > 0$ beliebig vorgeschrieben, so läſst sich A (auf unendlich viele Arten) in eine *endliche* Anzahl von Teilbereichen A_ν zerlegen, derart, daſs:

$$(114) \qquad |f(z_\nu) - f(\zeta_\nu) - (z_\nu - \zeta_\nu) \cdot f'(\zeta_\nu)| \leqq \varepsilon \cdot |z_\nu - \zeta_\nu|.$$

Dabei bedeutet z_ν *jeden beliebigen* Punkt auf der *Begrenzung* von A_ν, ζ_ν einen *bestimmten*, im Innern oder auf der Begrenzung von A_ν allemal *wirklich vorhandenen*[3]) Punkt.

Mit Hülfe dieses Lemmas kann nun der CAUCHYsche *Integralsatz* zunächst für den Fall, daſs als Bereich A ein *Rechteck* mit den zu den Koordinatenaxen parallelen Seiten a und b angenommen wird, im wesentlichen nach GOURSAT auf folgende äuſserst einfache Art bewiesen werden. Man wähle als Teilbereiche A_ν die n^2 kongruenten Rechtecke, welche entstehen, wenn man sowohl a als b in n gleiche Teile zerlegt und durch die Teilpunkte Parallelen zu den Axen zieht. Bezeichnet man dann mit $\int\limits_{(A)}, \int\limits_{(A_\nu)}$ ein über die Begrenzung von A bezw. A_ν in positiver Richtung erstrecktes Integral, so hat man:

$$(115) \qquad \int\limits_{(A)} f(z) \cdot dz = \sum_{1}^{n^2}{}^{\nu} \int\limits_{(A_\nu)} f(z) \cdot dz = \sum_{1}^{n^2}{}^{\nu} \int f(z_\nu) \cdot dz_\nu .$$

Nun ist identisch:

$$(116) \qquad \int f(z_\nu) \cdot dz_\nu = \int \{ f(z_\nu) - f(\zeta_\nu) - (z_\nu - \zeta_\nu) \cdot f'(\zeta_\nu) \} \cdot dz_\nu$$
$$+ \{ f(\zeta_\nu) - \zeta_\nu \cdot f'(\zeta_\nu) \} \cdot \int dz_\nu + f'(\zeta_\nu) \int z_\nu \cdot dz_\nu ,$$

und daher — wegen $\int dz_\nu = 0$, $\int z_\nu \, dz_\nu = 0$ — mit Benutzung von Ungl. (114):

---

1) Transact. of the American mathem. soc. Vol. I (1900), p. 14.

2) Dabei braucht nicht einmal vorausgesetzt zu werden, daſs $|f'(z)|$ unter einer festen Grenze bleibt.

3) Die Existenz dieser Punkte ζ_ν kann durch ein bekanntes Teilungs- und Grenzverfahren leicht bewiesen werden.

$$\left|\int f(z_\nu)\cdot dz_\nu\right| \leqq \varepsilon\cdot\int|z_\nu-\zeta_\nu|\cdot|dz_\nu|$$

$$(117)\qquad <\varepsilon\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{n}\cdot\int|dz_\nu| = \varepsilon\cdot\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{n}\cdot 2\,\frac{a+b}{n},$$

sodaſs sich schlieſslich aus Gl. (115) ergiebt:

$$(118)\qquad \left|\int f(z)\cdot dz\right| < \varepsilon\cdot 2\sqrt{a^2+b^2}\cdot(a+b)\ \text{d. h.} = 0,$$

da ja ε beliebig klein angenommen werden kann. Der hiermit zunächst für den Fall eines *Rechteckes* bewiesene Satz läſst sich aber ohne weiteres auf ein beliebiges, aus solchen Rechtecken zusammengesetztes „*Treppen-Polygon*“ und sodann durch eine einfache Grenzbetrachtung auf einen im wesentlichen *beliebig begrenzten* Bereich (insbesondere einen Kreis oder Kreisring) übertragen.[1]) Daraus folgt dann aber weiter, daſs auch der TAYLORsche Satz unter der bloſsen Voraussetzung eines für jedes einzelne *z endlichen*, aber an keinerlei *Stetigkeits*-Bedingungen gebundenen $f'(z)$ bewiesen werden kann.[2]) Und es ergiebt sich somit die merkwürdige Thatsache, daſs für Funktionen einer *komplexen* Veränderlichen der TAYLORsche Satz in der *vollen Allgemeinheit* gültig ist, wie ihn CAUCHY thatsächlich *ausgesprochen*, aber sicher nicht in diesem Umfange *gemeint* hat, geradeso wie andererseits das CAUCHYsche Restglied bei der Formulierung des nämlichen Satzes für Funktionen einer *reellen* Veränderlichen eine Bedeutung gewonnen hat, welche über die ursprünglich damit beabsichtigten Zwecke merklich hinausgeht.

1) Vgl. Münch. Ber. Bd. 25 (1895), p. 67.

2) Man kann schlieſslich sogar auch noch die Voraussetzung der *Endlichkeit* von $f'(z)$ für eine endliche Anzahl von Punkten und Linien fallen lassen (vgl. Fuſsnote 1), p. 474.



28

Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch und **Dr. M. Cantor.**

B. G. Teubner in Leipzig.

Sonderabdruck aus dem .... Hefte des .... Jahrgangs.

Eine Auswahl neuer Bücher, Fortsetzungen und neuer Auflagen aus dem Verlage von B. G. Teubner in Leipzig.

1891. 1892. 1893.

Bachmann, Paul, Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen. [X u. 151 S.] gr. 8. 1892. geh. n. ℳ 4.—

——— die Elemente der Zahlentheorie. [XII u. 264 S.] gr. 8. 1892. geh. n. ℳ 6.40.

Bardey, Dr. E., algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung. Vierte Auflage. [XIII u. 378 S.] gr. 8. 1893. geh. n. ℳ 6.—

Cantor, Moritz, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Zweiter Band. Von 1200—1668. [X u. 863 S.] gr. 8. 1892. geh. n. ℳ 24.—

Clebsch, Alfred, Vorlesungen über Geometrie. Unter besonderer Benutzung der Vorträge von Alfred Clebsch bearbeitet von Dr. Ferdinand Lindemann, ord. Professor an der Universität zu Königsberg in Pr. II. Band. I. Teil. Die Flächen erster und zweiter Ordnung oder Klasse und der lineare Complex. Mit vielen Figuren im Text. [VIII u. 650 S.] gr. 8. 1891. geh. n. ℳ 12.—

Czuber, Emanuel, Theorie der Beobachtungsfehler. Mit 7 in den Text gedruckten Figuren. [XIV u. 418 S.] gr. 8. 1891. geh. n. ℳ 8.—

Dini, Ulisse, ordentlicher Professor an der Universität zu Pisa, Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von Dr. Jacob Lüroth, Professor zu Freiburg i. Br., und Adolf Schepp, Premier-Lieut. a. D. zu Wiesbaden. [XVIII u. 554 S.] gr. 8. 1892. geh. n. ℳ 12.—

Eberhard, Dr. V., Privatdocent an der Universität zu Königsberg i./Pr., zur Morphologie der Polyeder. Mit vielen Figuren im Text und 2 Tafeln. [IV u. 245 S.] gr. 8. 1891. geh. n. ℳ 8.—

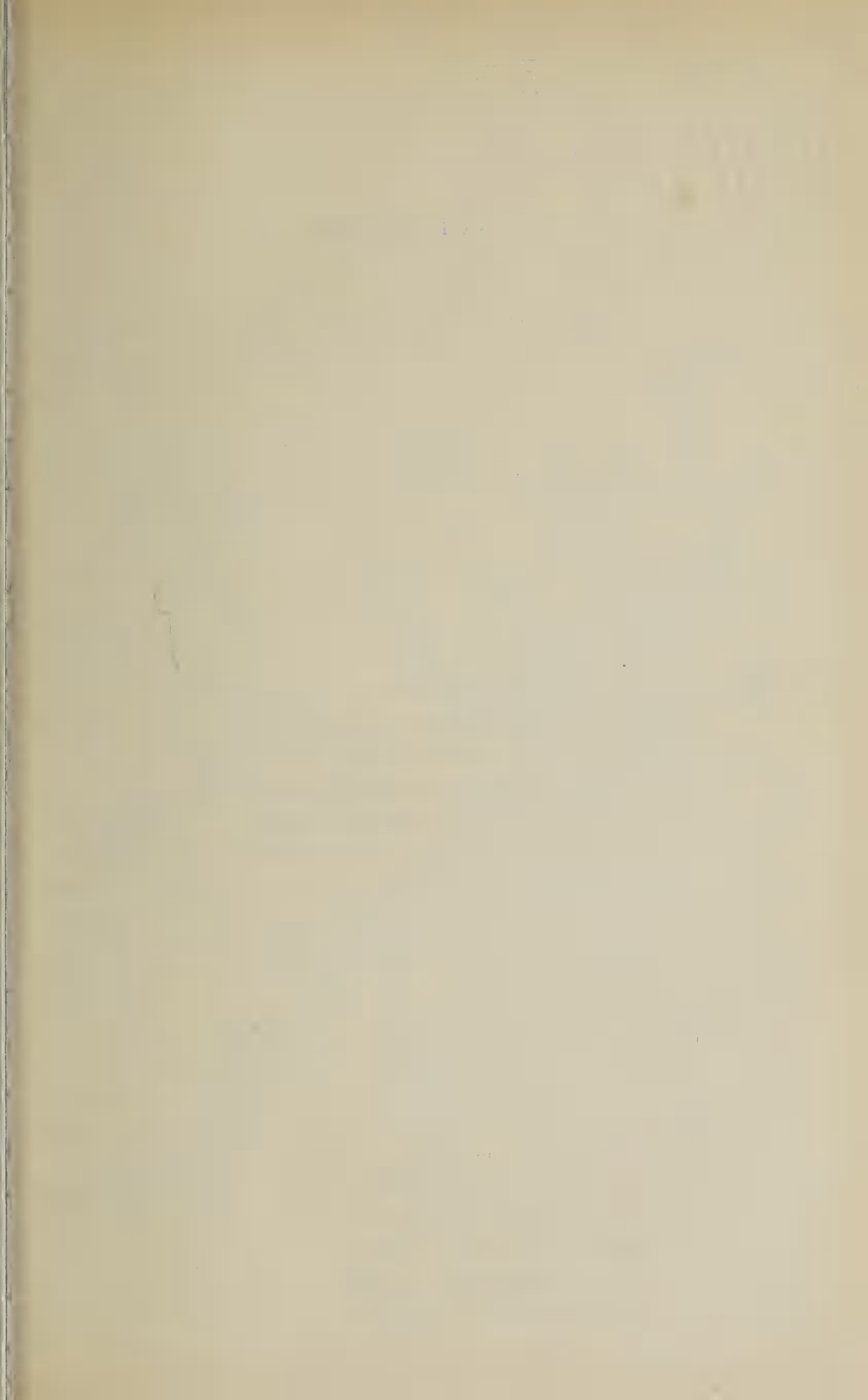
Forsyth, Dr. Andrew Russell, F. R. S., Professor am Trinity College zu Cambridge, Theorie der Differentialgleichungen. Erster Theil: Exakte Gleichungen und das Pfaff'sche Problem. Autorisirte deutsche Ausgabe von H. Maser. [XII u. 378 S.] gr. 8. 1893. geh. n. ℳ 12.—

Galilei, Galileo, Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme, das Ptolemäische und das Kopernikanische. Aus dem Italienischen übersetzt und erläutert von Emil Strauss, ord. Lehrer an der Realschule „Philanthropin" in Frankfurt a. M. [LXXXIV u. 586 S.] gr. 8. 1891. geh. n. ℳ 16.—

Heymann, Woldemar, Studien über die Transformation und Integration der Differential- und Differenzengleichungen, nebst einem Anhang verwandter Aufgaben. gr. 8. 1891. geh. n. ℳ 12.—

Kirchhoff, Gustav, Vorlesungen über mathematische Physik. III. Band. A. u. d. T.: Vorlesungen über Electricität und Magnetismus. Herausgegeben von Dr. Max Planck, Professor der theoretischen Physik an der Universität zu Berlin. Mit viel Figuren im Text. [X u. 228 S.] gr. 8. 1891. geh. n. ℳ 8.—

Klein, Felix, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen. Ausgearbeitet und vervollständigt von Dr. Robert Fricke. Zweiter Band. Fortbildung und Anwendung der Theorie. Mit einigen in den Text gedruckten Figuren. [XV u. 712 S.] gr. 8. 1892. geh. n. ℳ 24.—



Recensionen.

Ulisse Dini, **Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse.** Deutsch bearbeitet von Dr. Jacob Lüroth und Adolf Schepp. Leipzig, B. G. Teubner. 1892. XVIII u. 554 S.

Obschon das vorliegende Werk in seiner Original-Gestalt bereits in den Jahren 1875—78 erschien, so bildet es doch bis zum heutigen Tage das einzige ausführliche Lehr- und Handbuch für die moderne Theorie der Functionen einer reellen Variablen, wie sie sich nach Einführung des allgemeinen Functions-Begriffes durch Dirichlet und seit Riemann's grundlegender Abhandlung über die Fourier'sche Reihe insbesondere durch die Arbeiten von Hankel, Dedekind, Heine, G. Cantor, Du Bois-Reymond, Thomae, Darboux, durch Weierstrass' Vorlesungen und Dini's eigene Untersuchungen herausgebildet hat. Denn auch das im Jahre 1886 publicirte Lehrbuch von J. Tannery: „Introduction à la Théorie des Fonctions d'une Variable" will, wie schon der Titel besagt, nur zur „Einführung" in diesen Zweig der Functionen-Theorie dienen und kann hierfür namentlich dem angehenden Mathematiker in der That vortreffliche Dienste leisten: dasselbe beschränkt sich indessen auf eine präcise und anschauliche Darstellung der zu einer strengen Begründung der Infinitesimal-Analysis dienenden Haupt-Principien, ohne in eine ausführliche Discussion der mannigfachen complicirteren Möglichkeiten einzutreten, zu welchen die Begriffe der Stetigkeit, des Differential-Quotienten und des Integrales einer Function Veranlassung bieten. Wer sich über diese Dinge im Zusammenhange zu orientiren wünschte oder über irgendwelche hierher gehörige Specialfragen Rath suchte, blieb nach wie vor auf das Dini'sche Buch angewiesen.

Nun liegt es aber in der besonderen Natur der vorliegenden Materie, bei deren Behandlung es weit mehr auf Feinheit und Schärfe des Wortausdruckes, als auf complicirte analytische Entwickelungen ankommt, dass hier dem Nicht-Italiener die fremde Sprache ganz besondere Schwierigkeiten bereiten musste. Sodann kam aber, namentlich für die Benützung des Buches zum Nachschlagen, noch ein anderer Umstand als äusserst erschwerend in Betracht: das Fehlen einer ausreichenden, auch typographisch

hinlänglich kenntlich gemachten Gliederung und eines ausführlichen Inhaltsverzeichnisses — Mängel, welche um so schwerer in's Gewicht fallen mussten, als das Buch infolge äusserer Umstände nicht aus einem Gusse entstanden war und infolge dessen in Bezug auf Disposition mancherlei zu wünschen übrig lässt.

Hiernach kann es wohl keinem Zweifel unterliegen, dass die Herren Lüroth und Schepp durch die Herausgabe einer deutschen Uebersetzung, welche zugleich die eben angedeuteten Mängel beseitigt, der mathematischen Welt (und zwar nicht blos der deutschen allein) einen wirklichen Dienst geleistet, zumal sie auch dafür Sorge getragen haben, durch mancherlei anderweitige Verbesserungen und Zuthaten den Werth und die Brauchbarkeit des Buches noch zu erhöhen. Ein überaus sorgfältig gearbeitetes Register, in welchem der Inhalt eines jeden der 294 Paragraphen specificirt erscheint, gestattet eine rasche und bequeme Orientirung über das ganze Buch, welches auch durch passende Gliederung der im Originale unverhältnissmässig lang gerathenen (nämlich nicht weniger als 241 Seiten umfassenden) beiden letzten Kapitel an Uebersichtlichkeit merklich gewonnen hat. In einer Reihe von Zusatz-Paragraphen, welche an entsprechender Stelle eingeschaltet und als solche kenntlich gemacht sind, werden die wichtigsten Ergebnisse neuerer Arbeiten mitgetheilt, während im Uebrigen die neuere Literatur durch zahlreiche Fussnoten und ein am Ende des Buches befindliches ausführliches Literatur-Verzeichniss berücksichtigt wird.

Eine vollständige Umarbeitung hat das erste, von den rationalen und irrationalen Zahlen handelnde Kapitel erlitten. Während nämlich Dini die Dedekind'sche Definition der Irrationalzahlen zum Ausgangspunkte nahm, wird hier, in Uebereinstimmung mit dem jetzt in Deutschland zumeist herrschenden Usus, die Cantor'sche Definition der Irrationalzahlen durch „reguläre Zahlenfolgen“ oder, wie sie hier genannt werden, „convergente Gruppen“ zu Grunde gelegt. Können wir uns hiermit im Principe zwar vollkommen einverstanden erklären, so erscheint es uns doch incorrect, wenn im § 3 gesagt wird: „Eine Gruppe, deren Elemente convergiren, bezeichnen wir als irrationale Zahl“. Denn da eine solche Gruppe doch ebenso gut auch eine rationale Zahl definiren kann, so erschiene hier die rationale Zahl als ein specieller Fall der irrationalen (etwa wie es üblich ist, die reelle Zahl als speciellen Fall der complexen aufzufassen), was doch dem Sprachgebrauch gänzlich zuwiderläuft und thatsächlich auch zu einer völligen Begriffsverwirrung führen würde. Es müsste also etwa heissen: „Eine Gruppe, deren Elemente convergiren, bezeichnen wir als eine allgemeine Zahl“. Sodann wäre zunächst der Begriff der Gleichheit bezw. Ungleichheit solcher „allgemeiner Zahlen“ in der üblichen Weise zu definiren, wobei

also insbesondere die „allgemeine Zahl“ $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ der natürlichen oder rationalen Zahl b gleich genannt wird, wenn die Elemente der Gruppe $(b - a_1, b - a_2, b - a_3, \ldots)$ gegen Null convergiren. Nun erst kann man die irrationale Zahl in folgender Weise definiren: „Jede allgemeine Zahl, welche keiner natürlichen (rationalen) gleich ist, heisst eine **irrationale** Zahl“ — wobei dann freilich noch zur Vervollständigung dieser Definition zu zeigen wäre, dass es thatsächlich „allgemeine Zahlen“ giebt, welche diese Eigenschaft besitzen.

Von den nun folgenden, dem Dini'schen Originale sich genau anschliessenden Capiteln behandelt das zweite die Cantor'sche Theorie der Zahlen- bezw. Punkt-Mengen, das dritte den Begriff des Grenzwerthes, sowie den des Unendlichkleinen und Unendlichgrossen. Nachdem sodann im vierten Capitel der Begriff der Function und daran anknüpfend derjenige der Continuität und die verschiedenen Möglichkeiten von Descontinuität erörtert sind, beschäftigt sich das fünfte Capitel zunächst mit den in irgend einem Intervalle stetigen Functionen. Dabei ergiebt sich im Anschluss an den von Weierstrass herrührenden, für die Charakterisirung der stetigen Functionen fundamentalen Satz, dass jede in einem Intervalle stetige Function daselbst mindestens ein Maximum und Minimum besitzt, eine Eintheilung der stetigen Functionen in zwei wesentlich verschiedene Klassen: solche, die in jedem endlichen Intervalle nur eine endliche Anzahl Schwankungen, d. h. Maxima und Minima besitzen und die nach C. Neumann's Terminologie als abtheilungsweise monoton bezeichnet werden, und solche mit unendlich vielen Schwankungen. An die Erwähnung der abtheilungsweise monotonen Functionen schliesst sich im folgenden Capitel naturgemäss diejenige der abtheilungsweise stetigen, deren Studium sich im Wesentlichen auf das der schlechthin stetigen reduciren lässt, und denen sodann die unendlich oft unstetigen Functionen gegenüber gestellt werden.

Das ziemlich umfangreiche siebente Capitel bringt zunächst den wichtigen Begriff der Derivirten einer Function und — nach einer Kritik der früheren, heutzutage als falsch erkannten Ansichten über die Nothwendigkeit der Existenz einer bestimmten Derivirten als blosse Folge der Stetigkeit — eine Reihe von Sätzen, welche umgekehrt darauf ausgehen, aus der Annahme der Existenz einer bestimmten Derivirten gewisse Eigenschaften der betreffenden Functionen zu erschliessen. Daran knüpfen sich Betrachtungen über die Ordnung des Verschwindens von $f(x+h) - f(x)$ mit verschwindendem h und über die zweite Derivirte.

Um sodann die nöthigen analytischen Hilfsmittel zur Herstellung von Beispielen für die bisher gewonnenen Ergebnisse, wie auch für weitere Untersuchungen zu gewinnen, folgt als achtes Capitel ein Excurs über

unendliche Reihen, insbesondere über deren sogenannte gleichmässige Convergenz und gliedweise Differenzirbarkeit. Was nun den Begriff der gleichmässigen Convergenz betrifft, so verdient hier bemerkt zu werden, dass derselbe nicht von allen mathematischen Autoren in gleicher Weise definirt wird. Während nämlich die Mehrzahl derselben eine Reihe für ein gewisses Intervall der Variablen x nur dann gleichmässig convergent nennt, wenn zu beliebig klein vorgelegtem positiven ε eine Zahl m sich so bestimmen lässt, dass für alle Zahlen $n \geqq m$ der absolute Betrag des Restes $R_n(x)$ unter ε herabsinkt, so verlangen andere (z. B. Darboux in seinem Mémoire sur les fonctions discontinues) von einer als gleichmässig convergent zu bezeichnenden Reihe nur so viel, dass für irgend ein bestimmtes m stets

$$|R_m(x)| < \varepsilon$$

wird. Da diese letztere, offenbar weitere Definition bei allen Betrachtungen, welche sich auf Stetigkeit, Differentiation und Integration unendlicher Reihen beziehen, genau dasselbe leistet, wie die zuerst angeführte, während thatsächlich fast alle bekannten Reihen, die in diesem weiteren Sinne „gleichmässig" convergiren, eo ipso auch jener engeren Definition genügen und somit die charakteristische Eigenschaft besitzen, dass die Annäherung, die durch Summation einer gewissen endlichen Gliederzahl erreicht wird, stets auch erhalten bleibt bei weiterer Hinzufügung beliebig vieler Glieder — so erscheint es zweckmässig, beide Definitionen neben einander einzuführen. Dies geschieht hier in der Weise, dass die Erfüllung jener engeren Bedingung schlechthin als gleichmässige Convergenz, dagegen diejenige der weiteren als einfach gleichmässige Convergenz bezeichnet wird; auch wird an einem Beispiele gezeigt, dass es thatsächlich Reihen giebt, welche in der Umgebung gewisser Stellen nur einfach, nicht aber schlechthin gleichmässig convergiren (S. 138, Fussnote). Hierauf wird im Anschlusse an den Begriff der gleichmässigen Convergenz eine Anzahl von Lehrsätzen über Stetigkeit und Differentiation unendlicher Reihen entwickelt, welche zunächst im neunten Capitel dazu benützt wird, um das sogenannte Princip der Verdichtung der Singularitäten mit aller Strenge zu begründen.

Während aber Dini bei der Abfassung seines Buches lediglich auf die in mehrfacher Beziehung unvollkommene Hankel'sche Methode angewiesen war, wird hier noch in einer Reihe von Zusatz-Paragraphen die inzwischen publicirte, wesentlich vollkommenere Cantor'sche Methode mitgetheilt und, wie jene erstere, zur analytischen Darstellung von Functionen verwendet, welche in jedem endlichen Intervalle eine unendlich grosse Anzahl von Singularitäten in Bezug auf Continuität, Maxima und Minima oder Existenz der Derivirten besitzen. Die hierbei sich ergebende

Möglichkeit, stetige Functionen zu construiren, welche in unendlich vielen Punkten jedes beliebigen Intervalles keine oder eine unendlich grosse Derivirte haben, während in allen übrigen Punkten die Existenz einer bestimmten, endlichen Derivirten festgestellt werden kann oder allenfalls fraglich bleibt, führt dann im folgenden — zehnten — Capitel zur Construction von Functionen, welche, obgleich stets endlich und continuirlich, in keinem Punkte eine bestimmte und endliche Derivirte haben. Es werden zwei Methoden angegeben, um ganz allgemeine Typen solcher Functionen herzustellen, von denen dann das erste bekannte Beispiel dieser Art, die Weierstrass'sche Function $\Sigma a^n \sin b^n x$, als specieller Fall erscheint.

Es folgen nun im elften Capitel weitere allgemeine Untersuchungen über Zuwachsverhältnisse und Derivirte, welche vor allem zu einer zweckmässigen Eintheilung aller stetigen Functionen in zwei scharf getrennte Classen führt. Als stetige Function der ersten Art wird ausser den abtheilungsweise monotonen jede solche bezeichnet, die zwar unendlich viele Maxima und Minima oder „Invariabilitätszüge" (d. h. Strecken, in denen sie constant ist) besitzt, aber durch Addition bezw. Subtraction einer passenden Linear-Function in eine monoton zu- bezw. abnehmende verwandelt werden, oder — was offenbar auf dasselbe hinausläuft — in die Summe einer monoton zu- und einer monoton abnehmenden Function zerlegt werden kann. (Dabei zeigt sich insbesondere, dass nicht einmal die Monotonie in Verbindung mit der Stetigkeit das Fehlen einer bestimmten Derivirten für unendlich viele Punkte jedes endlichen Intervalles ausschliesst.) Als stetige Functionen zweiter Art oder auch als irreducibel oscillirende Functionen werden dagegen diejenigen bezeichnet, welche die genannte Eigenschaft nicht besitzen. Diese Eintheilung erscheint u. A. aus dem Grunde vortheilhaft, weil sich nunmehr gewisse Sätze, die zunächst nur für abtheilungsweise monotone Functionen bewiesen sind, ohne Weiteres auf die stetigen Functionen erster Art („reducibel oscillirende" Functionen*) übertragen lassen, so z. B., wie ich erläuternd bemerken will, die Dirichlet'schen Ergebnisse über die Fourier'sche Reihe.

Beruht schon die eben erwähnte Classification auf einer präcisen Unterscheidung der möglichen Grenzen, innerhalb deren der Differenzenquotent oder, wie er hier genannt wird, das Zuwachsverhältniss $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ für alle Werthe x eines gewissen Intervalles (a, b) sich bewegen kann, während h, nur Werthe eines bestimmten Vorzeichens annehmend, beständig verkleinert wird, so folgt nun eine genauere Unter-

* Camille Jordan bezeichnet sie analog als: Fonctions à variation limitée. Cours d'Analyse. T. II. p. 216.

suchung derjenigen Beziehungen, welche sich aus der Betrachtung der rechts- und linksseitigen d. h für positive und negative h gebildeten Zuwachsverhältnisse ergeben. Bezeichnet man mit l_x die untere, mit L_x die obere Grenze* des rechtsseitigen Zuwachsverhältnisses für irgend einen dem Intervalle (a, b) angehörigen Werth x und für alle möglichen (positiven) Werthe $h < b - x$, mit l die untere Grenze aller l_x, mit L die obere Grenze aller L_x, wenn x successive alle Werthe des Intervalles (a, b) durchläuft; desgleichen mit l'_x, L'_x, L' die analogen Grössen für das linksseitige Zuwachsverhältniss: alsdann lässt sich zunächst zeigen, dass stets $l' = l$, $L' = L$ sein muss. Aus der eventuellen Beschaffenheit dieser zwei für die Function $f(x)$ im Intervalle (a, b) charakteristischen Zahlen erschliesst der Verfasser gewisse Fundamentalsätze über die Existenz einer Derivirten, die zunächst dazu dienen sollen, jenes ältere, als falsch erkannte Postulatum einer wenigstens im Allgemeinen bestimmten Derivirten für jede stetige Function zu ersetzen, sodann aber auch, wie der Verfasser bemerkt, möglicherweise die Grundlagen einer allgemeineren Rechnungsmethode zu bilden, die über die Leistungsfähigkeit der Differentialrechnung hinaus auch die nicht-differenzirbaren Functionen einer analytischen Behandlung zugänglich machen würde.

Um diesem Ziele näher zu kommen, werden nunmehr diejenigen für beliebige stetige Functionen stets existirenden Grössen eingeführt, welche den gewöhnlichen Derivirten (vor- und rückwärts genommenen Differentialquotienten) der differenzirbaren Functionen in der Weise entsprechen, dass sie dieselben als specielle Fälle enthalten. Es sind dies die mit λ_x, Λ_x bezeichnete untere und obere Unbestimmtheitsgrenze des rechtsseitigen Zuwachsverhältnisses für $\lim h = +0$, welche als rechte untere und rechte obere Derivirte definirt werden; und ebenso die mit λ'_x, Λ'_x bezeichneten analogen Grössen für das linksseitige Zuwachsverhältniss als linke untere und linke obere Derivirte: Dieselben können auch aufgefasst werden als die Grenzwerthe der oben mit l_x, L_x bezw. l'_x, L'_x bezeichneten Grössen, für den Fall, dass b bezw. a der Grenze x zustrebt. Diese vier verschiedenen Derivirten

* In der Uebersetzung steht in diesem ganzen Abschnitt statt: „untere (obere) Grenze“ (= Schranke) durchweg: „unterer (oberer) Grenzwerth“, was leicht zu Missverständnissen führen kann, da an anderen Stellen des Buches diese Bezeichnung im Sinne von: „untere (obere) Unbestimmtheits-Grenze“ gebraucht wird. Bekanntlich fällt der letztere Begriff mit demjenigen der unteren (oberen) Grenze einer Zahlenmenge dann und nur dann zusammen, wenn die betreffende untere (obere) Grenze unter der Zahlenmenge selbst nicht vorkommt.

gehen offenbar in die gewöhnlichen rechts- und linksseitigen Derivirten über, welche von nun ab stets als Ableitungen bezeichnet werden, falls $\lambda_x = \Lambda_x$ und $\lambda'_x = \Lambda'_x$; während das Zusammenfallen aller vier Grössen λ_x, Λ_x, λ'_x, Λ'_x mit der Existenz einer einzigen (gleichgiltig ob vorwärts oder rückwärts gebildeten) Ableitung identisch ist. Bezeichnet man sodann mit λ die untere, mit Λ die obere Grenze von λ_x, für den Fall, dass x wiederum irgend ein Intervall (a, b) durchläuft, so lässt sich zeigen, dass diese Grösse λ bezw. Λ auch die untere bezw. obere Grenze für Λ_x, λ'_x, Λ'_x bilden, und dass sie mit den früher l bezw. L genannten Grössen zusammenfallen. (Die zwei früher mit l, L, jetzt mit λ, Λ bezeichneten, für die Function $f(x)$ im Intervalle (a, b) charakteristischen Zahlen fassen somit die Werthe aller diesem Intervalle angehörigen Derivirten und Zuwachsverhältnisse zwischen sich.) Indem man nun das irgend eine Stelle x_0 umgebende Intervall (a, b) hinlänglich verkleinert, lässt sich hieraus der wichtige Schluss ziehen, dass in jeder beliebigen Nähe jener Stelle x_0, wenn auch λ_{x_0} und Λ_{x_0} um eine beliebige endliche Grösse differiren, unendlich viele Stellen x liegen müssen, für welche λ_x und Λ_x einander beliebig nahe kommen; das analoge gilt natürlich für λ'_x, Λ'_x. Daraus folgt dann u. A., dass die Stetigkeit irgend einer der vier Derivirten auch diejenige der drei anderen und die Existenz einer bestimmten Ableitung nach sich zieht, und dass um so mehr aus der Existenz einer rechtsseitigen stetigen Ableitung stets auch diejenige einer mit ihr zusammenfallenden linksseitigen folgt.

Weitere Sätze über die Ableitungen und ihre Existenz bringt sodann das zwölfte Capitel. Nach einer Discussion der möglichen Unstetigkeiten der Derivirten und Ableitungen, sowie der Bedingungen, unter denen aus dem Verschwinden z. B. der rechtsseitigen Ableitung (bezw., wie in einem Zusatz-Paragraphen bemerkt wird, auch einer rechtsseitigen Derivirten) auf die Constanz der Function geschlossen werden kann, wird die Untersuchung über die Existenz der Ableitungen einer Function $f(x)$ zurückgeführt auf die Betrachtung aller Functionen

$$\varphi(x) = f(x) - \mu x - \nu,$$

wo μ und ν veränderliche Parameter bedeuten. Erinnert man sich nämlich der Bemerkung, dass eine stetige Function (erster Art) mit unendlich vielen Maximis und Minimis oder Invariabilitätszügen durch Addition einer passenden Linearfunction $\mu x + \nu$ diese Singularitäten verlieren kann, so folgt umgekehrt, dass eine abtheilungsweise monotone, stetige Function $f(x)$ durch Subtraction von $\mu x + \nu$ in eine Function $\varphi(x)$ mit derartigen Singularitäten übergehen kann; und da sich die Derivirten von $f(x)$ und $\varphi(x)$ nur um die Grösse μ unterscheiden, so wird die Existenz einer

Ableitung für $f(x)$ wesentlich davon abhängen, ob unter allen möglichen durch Variation des Parameters μ entstehenden Functionen $\varphi(x)$ solche sind, die vermöge ihrer Singularitäten die Existenz einer Ableitung ausschliessen oder nicht. Nach verschiedenen, auf Grundlage dieses Principes gewonnenen specielleren Sätzen gelangt der Verfasser schliesslich zu dem folgenden Haupt-Resultat: Wenn unter allen möglichen Functionen $\varphi(x)$ einschliesslich der für $\mu = 0$, $\nu = 0$ resultirenden, als endlich und stetig vorausgesetzten Function $f(x)$ für jeden Punkt x des Intervalles (a, b) höchstens eine einzige existirt, welche in der Umgebung von x unendliche viele Maxima und Minima hat, so besitzt $f(x)$ für jede Stelle x im Innern von (a, b) und auch für $x = a$ eine endliche oder bestimmt unendliche, im Allgemeinen stetige rechtsseitige Ableitung d_x, ebenso für alle x innerhalb (a, b) und für $x = b$ eine linksseitige Ableitung d'_x mit den nämlichen Eigenschaften; und zwar ist stets:

$$d_{x+0} = d'_{x+0} = d_x, \quad d_{x-0} = d'_{x-0} = d'_x.$$

(Die fragliche Bedingung ist u. A. stets erfüllt, wenn unter allen möglichen $\varphi(x)$ nur eine endliche Anzahl von Functionen enthalten ist, welche innerhalb (a, b) unendlich viele Maxima und Minima haben.) Der obige Satz ist auch umkehrbar, sodass also die für die Existenz der Ableitungen in dem näher präcisirten Sinne als hinreichend erkannten Bedingungen sich auch als nothwendige erweisen.

Nach verschiedenen Modificationen des erwähnten Hauptsatzes und einigen weiteren daran sich knüpfenden Folgerungen, insbesondere auch nach einem Vergleiche des gefundenen Resultates mit dem Ampère'schen Versuche, die Existenz der Ableitung zu beweisen, wendet sich der Verfasser zu einer kurzen Betrachtung über die zweite Derivirte, in welcher darauf hingewiesen wird, dass man hier durch Adaptirung der zuvor angewendeten Methode, nämlich durch Einführuug aller Functionen $\psi(x)$, welche sich von der zu untersuchenden $f(x)$ um eine Function zweiten Grades unterscheiden, zu analogen Resultaten gelangen könne. Als erläuterndes Beispiel zu dieser Bemerkung wird der Satz abgeleitet, dass unter geeigneten Voraussetzungen die zweite Derivirte mit dem Grenzwerthe des zweiten mittleren Differenzen-Quotienten übereinstimmt.

Das Capitel schliesst mit einigen Bemerkungen über die Taylor'sche Reihe, wobei insbesondere hervorgehoben wird, dass aus dem Verschwinden von $f(x)$ mit sämmtlichen Ableitungen für irgend eine Stelle x_0 selbst dann noch nicht auf das Verschwinden von $f(x)$ für irgend welche Nachbarschaft von x_0 geschlossen werden dürfe, wenn von vornherein feststeht, dass $f(x)$ daselbst nicht unendlich viele Maxima und Minima besitzt, und dass die Endlichkeit von $f(x)$ und sämmtlichen Ableitungen

für irgend eine Stelle x_0 und deren Umgebung noch keineswegs die Entwickelbarkeit nach Potenzen von $(x - x_0)$ nach sich ziehe.*

Der gesammte übrige Theil des Buches beschäftigt sich mit der Theorie der bestimmten Integrale. Nachdem zunächst im Beginne des dreizehnten Capitels auf das Unzulängliche der älteren Methode hingewiesen, den Integral-Begriff auf die Umkehrung der Differentiation zu basiren, erfolgt sodann die Definition des bestimmten Integrales als Grenzwerth einer Summe, an die sich naturgemäss die Aufsuchung der nothwendigen und hinreichenden Integrabilitäts-Bedingungen knüpft. Es werden verschiedene Formen dieser Bedingungen aufgestellt und mit ihrer Hilfe gewisse Functions-Classen sehr allgemeiner Natur als integrabel erkannt: Neben den schlechthin oder im Allgemeinen stetigen und den schon von Riemann als integrabel erwähnten unstetigen Functionen, welche nur eine endliche Anzahl von Sprüngen $> \sigma$ besitzen, insbesondere auch diejenigen unstetigen Functionen $f(x)$, für welche, mit eventuellem Ausschluss einer Punktmenge erster Gattung, durchweg $f(x + 0)$ [oder auch durchweg $f(x - 0)$] existirt. Die letztere Kategorie wird in einem Zusatz-Paragraphen noch dahin erweitert, dass die zulässigen Ausnahmepunkte auch eine sogenannte nicht ausgedehnte Menge zweiter Gattung bilden dürfen. Schliesslich wird an einigen Beispielen gezeigt, wie die gegebene Definition des bestimmten Integrales in gewissen Fällen geradezu zur Berechnung desselben benützt werden kann.

Das vierzehnte Capitel handelt von den Haupteigenschaften der bestimmten Integrale: der Vertauschung der Grenzen, der Zerlegung in Theil-Integrale, der Integrabilität einer Summe, eines Productes, eines Quotienten und der näherungsweisen Berechnung eines Integrales. Sodann wird gezeigt, dass die Integrale zweier integrabler Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ zwischen irgend welchen Grenzen α, β schon übereinstimmen, wenn die Beziehung $f(x) = \varphi(x)$ nur für eine innerhalb (α, β) überall dichte Menge gilt. Das Capitel schliesst mit Betrachtungen über das Integral eines Productes $f(x) \,.\, \varphi(x)$, welche zum Beweise des sogenannten ersten Mittelwerth-Satzes führen.

Im fünfzehnten Capitel wird das Integral als Function seiner oberen Grenze betrachtet und zunächst deren Stetigkeit und die

* Zur Vervollständigung der fraglichen Bemerkung hätte vielleicht von den Herausgebern auf einen Aufsatz Du Bois Reymond's: „Ueber den Gültigkeitsbereich der Taylor'schen Reihe“ — Math. Ann. Bd. 21. i. 109 — verwiesen werden können. Weitere Ergänzungen findet man in den neuerdings von mir publicirten Aufsätzen: „Zur Theorie der Taylor'schen Reihe etc.“ — Math. Ann. Bd. 42. „Ueber Functionen, welche in gewissen Punkten .... keine Taylor'sche Reihenentwickelung besitzen.“ „Ueber die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen des Taylor'schen Lehrsatzes etc.“ — M. A. Bd. 44.

Existenz der Ableitung in der üblichen Weise erörtert. Die hieran geknüpfte Bemerkung, dass $\int\limits_a^x f(x)\,dx$ stets eine stetige Function erster Art sein muss, lässt sich einfacher beweisen, wenn man bemerkt, dass für $|f(x)| < c$ das Integral der positiven Function $\{f(x) + c\}$ mit x stets monoton zunimmt und $\int\limits_a^x \{f(x) + c\}\,dx = \int\limits_a^x f(x)\,dx + c(x-a)$ ist. — Es folgt nun der sogenannte Fundamentalsatz der Integralrechnung über den Zusammenhang des bestimmten und des unbestimmten Integrals in der Form, dass die Giltigkeit der Beziehung

$$\int\limits_a^b d_x \,.\, dx = F(b) - F(a)$$

für den allgemeinen Fall bewiesen wird, dass die im Intervalle (a, b) durchweg stetige Function $F(x)$ mit eventuellem Ausschluss einer Menge erster Gattung (allgemeiner: einer abzählbaren, nicht ausgedehnten Menge) die integrable rechtsseitige Ableitung d_x besitzt. Dieses Resultat wird sodann noch dahin erweitert, dass die Beziehung

$$\int\limits_a^b \lambda_x \,.\, dx = \int\limits_a^b \Lambda_x \,.\, dx = \int\limits_a^b \lambda'_x \,.\, dx = \int\limits_a^b \Lambda'_x \,.\, dx = F(b) - F(a)$$

als giltig erwiesen wird, falls $F(x)$ im Intervalle (a, b) stetig und irgend eine der vier Derivirten λ_x, Λ_x, λ'_x, Λ'_x integrabel ist; woraus dann wiederum noch in dem zuerst betrachteten Falle die Relation

$$\int\limits_a^b d'_x \,.\, dx = \int\limits_a^b d_x \,.\, dx$$

sich ergiebt, falls $F(x)$ auch eine linksseitige integrable Ableitung d'_x besitzt. Das Haupt-Ergebniss dieser Untersuchung lässt sich dahin zusammenfassen, dass Integration und „Derivation" — beide in dem hier geltenden allgemeinen Sinne genommen — inverse Operationen sind. Schliesslich lässt sich noch an die letzte Gleichung, wenn man sie in die Form setzt $\int\limits_a^b (d_x - d'_x)\,dx = 0$, in Verbindung mit dem Umstande, dass es thatsächlich stetige Functionen giebt, welche integrable d_x, d'_x mit unendlich oft von Null verschiedener Differenz besitzen, die interessante Bemerkung knüpfen, dass man auf diese Weise Functionen bilden kann, welche für unendlich viele Punkte jedes Intervalles von Null verschieden sind, während ihr Integral den Werth Null hat.

Das sechzehnte Capitel behandelt den sogenannten zweiten Mittelwerthsatz der Integralrechnung in seinen verschiedenen Formen. Dabei wäre vielleicht zu erwähnen gewesen, dass der Satz in seiner Fundamentalform:

$$\int_a^b f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx = f(a) \cdot \int_a^\xi \varphi(x)\, dx \quad (a < \xi < b),$$

wo $f(x)$ eine im Intervalle (a, b) niemals zunehmende positive Function bedeutet, von Herrn Bonnet herrührt, der auch die grosse Bedeutung dieser Beziehung für die Theorie der Fourier'schen Reihen und ähnliche Entwickelungen vollkommen erkannt hat. Die sogenannte Du Bois-Reymond'sche Form des zweiten Mittelwerthsatzes, oder, wie sie von Herrn Dini genannt wird, die Weierstrass'sche Formel ist thatsächlich ein blosses Corollar des obigen Hauptsatzes und die heftige Polemik, welche Du Bois-Reymond gegen die letztere Bezeichnung zur Vertheidigung seiner Prioritäts-Ansprüche mehrfach geführt hat, ist in Wahrheit ziemlich gegenstandslos, da das Hauptverdienst an der Entdeckung des zweiten Mittelwerthsatzes zweifellos Herrn Bonnet gebührt. Ich gedenke, auf diesen Punkt bei anderer Gelegenheit noch zurückzukommen.

Im siebzehnten Capitel wird die Definition des bestimmten Integrales auf solche Functionen ausgedehnt, welche im Integrationsgebiet auch unendlich gross werden und zwar für eine Anzahl von Punkten, die entweder endlich ist oder eine Menge erster Gattung bildet. Hieran schliesst sich die Uebertragung der im vierzehnten Capitel bewiesenen Hauptsätze auf Integrale der jetzt betrachteten Art, insbesondere auch eine genaue Untersuchung der Integrabilität von $f(x) \cdot \varphi(x)$ bezw. $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, für den Fall, dass $\varphi(x)$ im Integrationsgebiet Unendlichkeits- bezw. Null-Stellen besitzt. Sodann wird gezeigt, wie sich auch die Ergebnisse des fünfzehnten Capitels, betreffend die Stetigkeit eines Integrales als Function seiner oberen Grenze, sowie den Zusammenhang zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integrale auf den vorliegenden Fall übertragen lassen, und wie man aus der Existenz des unbestimmten Integrals $\int f(x)\, dx$ auf die Integrabilität von $f(x)$ schliessen kann. Es folgen dann noch die bekannten Integrabilitäts-Kriterien, welche sich aus der Vergleichung einer für $x = \beta$ unendlich gross werdenden Function $f(x)$ mit den Ausdrücken

$$\frac{1}{(\beta - x)^{1-\mu}}, \frac{1}{(\beta - x)\{lg(\beta - x)\}^{1+\mu}}, \frac{1}{(\beta - x)\, lg(\beta - x) \cdot \{lg\, lg(\beta - x)\}^{1+\mu}}, \ldots (\mu > 0 \text{ bezw. } \leq 0)$$

ergeben, nebst dem durch Beispiele erläuterten Hinweis, dass für solche $f(x)$, welche in der Umgebung von $x = \beta$ unendlich viele Maxima und Minima besitzen, auch ein Unendlichwerden von höherer Ordnung die Integrabilität nicht ausschliesst.

Das achtzehnte Capitel enthält die analogen Betrachtungen für solche Integrale, die sich über unendlich grosse Intervalle erstrecken. Dabei wird gezeigt, dass ausser der üblichen Definition:

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\beta=\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

die für ein Integral mit endlichem Integrations-Intervall geltende Definition als Grenzwerth einer Summe unter gewissen Voraussetzungen auch auf ein solches mit unendlichem Integrations-Intervall übertragen werden kann, sodass also ganz direct

$$\int_{\alpha}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\delta_s=0} \sum_{1}^{\infty}{}_s f_s \cdot \delta_s$$

wird. Nachdem sodann auch hier der Zusammenhang zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integrale seine Erledigung gefunden, wird noch der zweite Mittelwerthsatz in seinen verschiedenen Formen auf den vorliegenden Fall ausgedehnt. Das Capitel schliesst wiederum mit der Ableitung der Convergenz- bezw. Divergenz-Kriterien für $\int_{\alpha}^{\infty} f(x)\,.\,dx$, welche sich aus der Vergleichung von $f(x)$ mit $x^{-(1+\mu)}$, $x^{-1}.(lg\,x)^{-(1+\mu)}$, $x^{-1}(lg\,x)^{-1}.(lg\,lg\,x)^{-(1+\mu)}\ldots$ ($\mu > 0$ bezw. $\mu \leq 0$) ergeben. Zugleich wird auch wieder an Beispielen gezeigt, dass die betreffenden Divergenz-Kriterien für solche Functionen, welche im Unendlichen unendlich viele Maxima und Minima besitzen, nicht in Frage kommen.

Im neunzehnten Capitel wird zunächst die Methode der partiellen Integration mit möglichster Allgemeinheit behandelt und insbesondere auch auf den Fall ausgedehnt, dass die zu integrirenden Functionen oder das Integrations-Intervall unendlich gross werden. Alsdann folgt eine genaue Untersuchung der Integration durch Substitution, wobei zunächst statt der bekannten Relation

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f[\psi(y)] \cdot \psi'(y)\,dy$$

die folgende allgemeinere entwickelt wird:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f[\psi(y)] \cdot \lambda_{\psi} \cdot dy,$$

in welcher λ_{ψ} irgend eine der vier Derivirten von $\psi(y)$ bedeutet. Auch werden die allgemeinsten Möglichkeiten für die Auswahl der Function $\psi(y)$ festgestellt und die gefundenen Resultate wieder auf den Fall eines unendlich grossen Integrations-Intervalles ausgedehnt. Schliesslich wird noch der Fall erörtert, dass statt der Beziehung $x = \psi(y)$ eine von der Form $y = \varphi(x)$ zur Transformation von $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ vorgelegt ist, und auf gewisse hierbei zu beachtende Vorsichtsmassregeln aufmerksam gemacht.

Das zwanzigste und letzte Capitel handelt zunächst von der gliedweisen Integration unendlicher Reihen. Als hinreichende Bedingung für die Giltigkeit der Beziehung

$$\int_\alpha^\beta \left(\sum_1^\infty u_n\right) dx = \sum_1^\infty \int_\alpha^\beta u_n \,.\, dx$$

wird die gleichmässige und auch schon die einfach gleichmässige Convergenz der Reihe Σu_n für das Intervall (a, b) erkannt. Erleidet die gleichmässige Convergenz von Σu_ν eine Unterbrechung in einer endlichen oder unendlich grossen Punktmenge erster Gattung, so bleibt die obige Beziehung noch bestehen, falls die Reihe der Integrale $\sum_1^\infty \int_\alpha^\beta u_n dx$ für alle x des Intervalles (α, β) gleichmässig convergirt. Diese Sätze gelten auch noch für den Fall $\beta = \infty$, sobald die fraglichen Bedingungen für jedes noch so grosse endliche Intervall (α, β) erfüllt sind. Analoge Sätze werden sodann aufgestellt für die Integration von $\Sigma U \,.\, u_n$, wo U eine gewisse Function von x bezeichnet. Hieran schliessen sich noch Betrachtungen über Integrale von der Form $\int_\alpha^\beta f_\lambda(x) dx$, wobei $f_\lambda(x)$ eine Function bedeutet, die ausser von der Integrations-Variablen x noch von einem Parameter λ abhängen, während die Grenzen α, β entweder als constant oder gleichfalls von λ abhängig angenommen werden können. Bedeutet dann λ_0 irgend einen speciellen Werth von λ, so wird zunächst, falls $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ constant sind, die Giltigkeit der Bezeichnung erwiesen:

$$\lim_{\lambda=\lambda_0} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_\lambda(x) dx = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} \psi(x) dx,$$

sobald $f_\lambda(x)$ für $\lambda = \lambda_0$ gegen die integrirbare Function $\psi(x)$ convergirt und zwar gleichmässig für alle λ zwischen λ_0 und $\lambda_0 + \varepsilon_0$ und alle x des Intervalles (α_0, β_0) mit eventuellem Ausschlusse einer endlichen oder unendlich grossen Punktmenge erster Gattung. Dieses Ergebniss wird dann noch in gewisser Weise modificirt und schliesslich auf den Fall übertragen, dass auch die Grenzen von λ abhängig sind oder eine derselben unendlich gross ist bezw. für $\lambda = \lambda_0$ ins Unendliche wächst.

Die vorstehende Uebersicht, in der natürlich nur das Wesentlichste hervorgehoben werden konnte, wird immerhin genügen, um eine deutliche Vorstellung von dem überaus reichen und interessanten Inhalte des ganzen Buches zu geben. Die Darstellung ist durchweg klar und bei der vielfach nicht unerheblichen Schwierigkeit der behandelten Materiale verhältnissmässig leicht verständlich, mitunter vielleicht ein wenig zu breit. Die Uebersetzung darf geradezu vortrefflich genannt werden.

Alfred Pringsheim.

Sonderabdruck aus:

ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

HERAUSGEGEBEN VON

E. LAMPE IN BERLIN.

W. FRANZ MEYER IN KÖNIGSBERG I. PR.

E. JAHNKE IN BERLIN.

LEIPZIG UND BERLIN,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

☛ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Dr. E. Jahnke, Berlin W 15, Pariser Strafse 55

zu richten. Es nehmen aber auch Geheimer Regierungsrat Prof. Dr. E. Lampe in Berlin W 35, Kurfürstenstrafse 139 und Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51, Sendungen für die Redaktion an.

☛ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von gröfseren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine gröfsere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☛ Jeder Band des Archivs umfafst 24 Druckbogen in 4 Heften und kostet 14 Mark; jährlich sollen zunächst etwa 6 Hefte ausgegeben werden. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an. Probehefte durch jede Buchhandlung.

An die Herren Mitarbeiter und Leser des Archivs der Mathematik und Physik!

Das Archiv der Mathematik und Physik ist 1841 von J. A. Grunert, der vor seiner Berufung auf den Lehrstuhl der Universität zu Greifswald zwölf Jahre lang Gymnasiallehrer gewesen war, mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehrer der höheren Unterrichtsanstalten ins Leben gerufen worden, nachdem in Frankreich die Annales de mathématiques pures et appliquées von Gergonne in ähnlicher vorbildlicher Weise seit 1810 anregend und befruchtend gewirkt hatten. Nach Grunerts Tode (1872) wurde die Leitung des Archivs dem als Mathematiker wie als Philosoph gleich verdienten Professor R. Hoppe zu Berlin anvertraut; derselbe hat sich bis zu seinem im Juni dieses Jahres erfolgten Tode bemüht, im Archiv diejenige Richtung inne zu halten, welche durch die 53 unter Grunert erschienenen Bände gegeben und durch den Titel vorgezeichnet war.

Indem wir drei Unterzeichnete uns zur gemeinsamen Herausgabe des Archivs vereinigt haben, wollen wir seinen historisch entstandenen Charakter nicht ändern, sondern vielmehr versuchen, ihn schärfer auszuprägen.

Nachdem die Zeitschrift für Mathematik und Physik (Schlömilch) den bisherigen Charakter geändert und die Pflege der angewandten Mathematik in den Vordergrund gerückt hat, bleibt das Archiv das einzige Organ in Deutschland, welches sich nicht bloſs die Erweiterung der mathematischen Erkenntnis, sondern auch die Verbreitung der Resultate mathematischer Forschung als Ziel steckt.

Die beiden bis jetzt erschienenen Bände der dritten Reihe des neugestalteten Archivs lassen erkennen, wie weit es gelungen ist, das Programm zu verwirklichen, welches wir im ersten Bande dargelegt hatten.

Hervorragende Mathematiker haben uns die Früchte ihrer Untersuchungen zum Abdruck gesandt. Mit Genugthuung verzeichnen wir die Thatsache, daſs Charles Hermite unserer Zeitschrift ein besonderes Interesse entgegengebracht hat; seine letzte Arbeit ziert den ersten Band.

Zur Fesselung eines gröſseren Leserkreises sind auch solche Aufsätze eingerückt worden, welche die Kenntnisnahme und das Verständnis der neueren mathematischen Anschauungen und Entdeckungen vermitteln.

Da ferner der mathematische Unterricht an den Hochschulen (Universitäten, technischen Hochschulen u. s. w.) sowie an den Mittelschulen (Gymnasien, Realgymnasien, Oberrealschulen u. s. w.) von den Ergebnissen der Forschung beeinfluſst ist, so haben wir auch gern Artikel gebracht, welche bezügliche Fragen in wissenschaftlicher Form behandeln.

[Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.]

Sonderabdruck aus Archiv der Mathematik und Physik. III. Reihe. IV. 1. u. 2. Heft.
Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Über Konvergenz-Kriterien für Reihen mit komplexen Gliedern.

Von Alfred Pringsheim in München.

1. Da die *unbedingte* Konvergenz einer Reihe von der Form $\Sigma a_\nu = \Sigma(\alpha_\nu + \beta_\nu i)$ mit der *absoluten* Konvergenz, d. h. mit der Konvergenz der Reihe $\Sigma | a_\nu |$ zusammenfällt, so hat man zu deren Ermittelung lediglich die für Reihen mit *positiven* Gliedern geltenden Kriterien auf den Term $| a_\nu | = \sqrt{\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2}$ anzuwenden. Bei der Ausführung der erforderlichen Rechnung erweist sich indessen das Auftreten jener Quadratwurzel als ziemlich unbequem, und es mufs daher wünschenswert erscheinen, jene Kriterien so umzugestalten, dafs die zu prüfenden Grenzausdrücke nicht $| a_\nu |$ selbst, sondern lediglich $| a_\nu |^2$ enthalten.

Dies hat bei den sog. Kriterien *erster* Art keine Schwierigkeit. Bezeichnet man nämlich generell mit ΣD_ν^{-1} bezw. ΣC_ν^{-1} eine als *divergent* bezw. *konvergent* erkannte Reihe mit positiven Gliedern und beachtet, dafs die Ungleichungen:

$$| a_\nu | > \frac{g}{D_\nu} \quad \text{bezw.} \quad | a_\nu | < \frac{G}{C_\nu}$$

stets die folgenden nach sich ziehen:

$$| a_\nu |^2 > \frac{g^2}{D_\nu^2} \quad \text{bezw.} \quad | a_\nu |^2 < \frac{G^2}{C_\nu^2}$$

und umgekehrt, so kann man die Kriterien *erster* Art ohne weiteres auch auf die Form bringen:

$$(1) \qquad \begin{cases} \underline{\lim}_{\nu=\infty} D_\nu^2 \cdot | a_\nu |^2 > 0 : \textit{Divergenz}, \\ \overline{\lim}_{\nu=\infty} C_\nu^2 \cdot | a_\nu |^2 < \infty : \textit{Konvergenz}.^{1)} \end{cases}$$

1) Ich bezeichne mit $\underline{\lim}$ den *unteren*, mit $\overline{\lim}$ den *oberen* Limes. Existiert ein *Limes* im gewöhnlichen Sinne, so fallen *unterer* und *oberer* Limes mit diesem zusammen. (Vgl. Encykl. der math. Wiss. I, p. 71.) Die Schreibweise: $< \infty$ bedeutet: *nicht* unendlich, d. h. unter einer endlichen Schranke bleibend.

Da analog aus den Ungleichungen:

$$\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right| < \frac{D_{\nu+1}}{D_\nu} \quad \text{bezw.} \quad \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right| > \frac{C_{\nu+1}}{C_\nu}$$

stets folgt:

$$\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 < \frac{D^2_{\nu+1}}{D^2_\nu} \quad \text{bezw.} \quad \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 > \frac{C^2_{\nu+1}}{C^2_\nu}$$

und umgekehrt, so läfst sich auch die Grundform der Kriterien *zweiter* Art zunächst durch die folgende ersetzen:

$$(2) \qquad \begin{cases} \overline{\lim\limits_{\nu=\infty}} \left(D^2_\nu \cdot \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - D^2_{\nu+1}\right) < 0\text{: } \textit{Divergenz}, \\ \underline{\lim\limits_{\nu=\infty}} \left(C^2_\nu \cdot \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - C^2_{\nu+1}\right) > 0\text{: } \textit{Konvergenz}. \end{cases}$$

Bezüglich des auf diese Weise resultierenden *Konvergenz*-Kriteriums ist aber folgendes zu bemerken. Während man das Konvergenz-Kriterium in seiner *ursprünglichen* Gestalt, nämlich:

$$(3) \qquad \underline{\lim\limits_{\nu=\infty}} \left(C_\nu \cdot \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right| - C_{\nu+1}\right) > 0\text{: } \textit{Konvergenz},$$

mit Hülfe einer einfachen, auf der typischen Darstellung der C_ν und D_ν beruhenden Transformation[1]) in das folgende:

$$(4) \qquad \underline{\lim\limits_{\nu=\infty}} \left(D_\nu \cdot \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right| - D_{\nu+1}\right) > 0\text{: } \textit{Konvergenz},$$

überführen und auf diese Weise mit dem entsprechenden *Divergenz*-Kriterium zweckmäfsig vereinigen kann, so *versagt* diese Transformation in Bezug auf das *Konvergenz*-Kriterium (2), mit anderen Worten, man darf aus der Beziehung:

$$\underline{\lim\limits_{\nu=\infty}} \left(D^2_\nu \cdot \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right| - D^2_{\nu+1}\right) > 0$$

keineswegs allemal auf die *Konvergenz* von $\Sigma \,|\, a_\nu \,|$ schliefsen. Setzt man nämlich:

$$(5) \qquad \begin{cases} l_\nu = D_\nu \cdot \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right| - D_{\nu+1}, \\ l'_\nu = D^2_\nu \cdot \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - D^2_{\nu+1} = l_\nu \left(D_\nu \cdot \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right| + D_{\nu+1}\right), \end{cases}$$

1) Vgl. Math. Ann. **35** (1890), 360; desgl. **39** (1891), 125.

so erkennt man, dafs l'_ν sich von l_ν um einen Faktor unterscheidet, der allemal dann, wenn $\varliminf_{\nu=\infty} D_\nu = \infty$ (was ja geradezu die *Regel* ist[1])), gleichzeitig mit ν positiv unendlich wird. Daraus folgt aber, dafs im Falle $\varliminf_{\nu=\infty} l'_\nu > 0$ immerhin $\varliminf_{\nu=\infty} l_\nu = 0$ werden kann, was die *Divergenz* der Reihe $\Sigma|a_\nu|$ nicht ausschliefsen würde.[2])

2. Um diesem Übelstande abzuhelfen, führen wir statt des Ausdruckes l'_ν den folgenden ein:

$$(6) \qquad \lambda_\nu = D_\nu \cdot \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - \frac{D^2_{\nu+1}}{D_\nu} = l_\nu\left(\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right| + \frac{D_{\nu+1}}{D_\nu}\right),$$

welcher — bei einer sogleich anzugebenden, durchaus unerheblichen Einschränkung in Bezug auf die Wahl der D_ν — für die Beurteilung der *Konvergenz* von $\Sigma|a_\nu|$ genau dasselbe leistet wie l_ν.

Angenommen nämlich, man habe:

$$(7) \qquad \varliminf_{\nu=\infty} \lambda_\nu > 0,$$

so mufs schon von einem bestimmten Index $\nu = n$ ab eine Beziehung von der Form bestehen:

$$\lambda_\nu \geqq \varrho,$$

---

1) Die Annahme eines *endlichen* $\varliminf_{\nu=\infty} D_\nu$ liefert lediglich das Cauchysche Fundamental-Kriterium.

2) *Beispiel.* Man setze: $a_\nu = \frac{1}{\nu \cdot \lg \nu}$, $D_\nu = \nu$, also:

$$l_\nu = (\nu+1)\left(\frac{\lg(\nu+1)}{\lg \nu} - 1\right)$$

$$= \frac{\nu+1}{\lg \nu} \cdot \lg\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) < \frac{\nu+1}{\lg \nu} \cdot \frac{1}{\nu}$$

und daher:

$$\lim_{\nu=\infty} l_\nu = 0.$$

Dagegen:

$$l'_\nu = (\nu+1)^2\left(\left(\frac{\lg(\nu+1)}{\lg \nu}\right)^2 - 1\right)$$

$$= \frac{(\nu+1)^2}{(\lg \nu)^2} \cdot \left(\lg\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\right) \cdot (\lg(\nu+1) + \lg \nu)$$

$$> 2 \cdot \frac{\nu+1}{\lg \nu},$$

also:

$$\lim_{\nu=\infty} l'_\nu = +\infty.$$

Nichts desto weniger ist $\Sigma|a_\nu|$ *divergent*.

wo ϱ *wesentlich positiv.* Man hat somit für $\nu \geqq n$:

$$D_\nu^2 \cdot \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 \geqq D_{\nu+1}^2 + \varrho \cdot D_\nu = D_{\nu+1}^2\left(1 + \varrho \cdot \frac{D_\nu}{D_{\nu+1}^2}\right),$$

und, wenn man auf beiden Seiten mit Benutzung der bekannten Beziehung[1]):

$$(1+\delta)^\mu > 1 + \mu \cdot \frac{\delta}{1+\delta} \qquad (\mu > 0,\quad \delta > 0)$$

die Quadratwurzel zieht:

$$D_\nu \cdot \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right| > D_{\nu+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\varrho \cdot \frac{D_\nu}{D_{\nu+1}^2} \cdot \frac{1}{1 + \varrho \cdot \frac{D_\nu}{D_{\nu+1}^2}}\right)$$

d. h.

$$l_\nu > \frac{1}{2}\varrho \cdot \frac{D_\nu}{D_{\nu+1}} \cdot \frac{1}{1 + \varrho \cdot \frac{D_\nu}{D_{\nu+1}^2}}. \tag{8}$$

Macht man jetzt die gewissermaſsen selbstverständlichen[2]) Einschränkungen, daſs:

$$\varliminf_{\nu=\infty} \frac{D_\nu}{D_{\nu+1}} > 0 \quad \text{und} \quad \varlimsup_{\nu=\infty} \frac{D_\nu}{D_{\nu+1}^2} < \infty, \tag{9a}$$

so folgt aus (8), daſs gleichzeitig mit der Beziehung (7) stets auch die folgende besteht:

$$\varliminf_{\nu=\infty} l_\nu > 0, \tag{10}$$

sodaſs also aus Ungl. (7) mit Sicherheit auf die *Konvergenz* von $\Sigma|a_\nu|$ geschlossen werden darf. Übrigens ergiebt sich auch umgekehrt aus

---

1) Für den hier lediglich in Frage kommenden speziellen Fall $\mu = \frac{1}{2}$ kann man auch ganz unmittelbar erkennen, daſs:

$$\sqrt{1+\delta} > 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{1+\delta} \quad \text{für} \quad \delta > 0.$$

Man hat nämlich: $1 > \frac{1}{1+\delta}$ und $\left(\text{wegen: } \delta = \frac{\delta + \delta^2}{1+\delta}\right)$:

$$\delta > \frac{\delta}{1+\delta} + \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^2.$$

und *a fortiori:*

$$1 + \delta > \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{1+\delta}\right)^2.$$

2) In der That werden hierdurch nur gewisse Reihen von *ganz exzeptionellem* Divergenz-Charakter, wie sie für Kriterien-Bildung überhaupt nicht in Betracht kommen, als Vergleichsreihen ausgeschlossen.

der Existenz von Ungl. (10) stets diejenige von Ungl. (7), wenn man die D_ν der weiteren Beschränkung unterwirft[1]), dafs auch:

(9b)
$$\underline{\lim}_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}}{D_\nu} > 0,$$

anders geschrieben:

$$\overline{\lim}_{\nu=\infty} \frac{D_\nu}{D_{\nu+1}} < \infty:$$

denn der Faktor, welcher λ_ν von l_ν unterscheidet (s. Gl. (5)) ist dann allemal *wesentlich positiv.* Die Konvergenz-Kriterien (7) und (10) haben also unter den bezüglich der D_ν gemachten Einschränkungen vollkommen *gleiche* Tragweite.

Da andererseits die Beziehung:

(11)
$$\overline{\lim}_{\nu=\infty} \lambda_\nu < 0$$

offenbar stets die Existenz der *Divergenz*-Bedingung (2) nach sich zieht[2]), so gewinnt man schliefslich das folgende *Doppel*-Kriterium:

(12)
$$\overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty} \lambda_\nu \equiv \overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty} \left(D_\nu \cdot \left| \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} \right|^2 - \frac{D^2_{\nu+1}}{D_\nu} \right) \begin{cases} < 0: \textit{Divergenz}, \\ > 0: \textit{Konvergenz}.^{3)} \end{cases}$$

3. Die Bedingungen (9a), (9b), welchen die D_ν zu genügen haben, sind sicher erfüllt, wenn gesetzt wird:

$$D_\nu = \nu$$

oder auch:

$$D_\nu = \nu \cdot L_\varkappa(\nu),$$

wo:

$$L_\varkappa(\nu) = \nu \cdot \lg_1 \nu \cdot \lg_2 \nu \cdots \lg_\varkappa \nu. \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots)$$

---

1) Vgl. die vorige Fufsnote.

2) Aber *nicht* umgekehrt. Da nämlich die Bedingung (2) sich folgendermafsen schreiben läfst:

$$\overline{\lim}_{\nu=\infty} D_\nu \cdot \lambda_\nu < 0,$$

und im allgemeinen $\lim D_\nu = \infty$ anzunehmen ist, so kann eventuell diese letztere Beziehung erfüllt sein, auch wenn $\overline{\lim}_{\nu=\infty} \lambda_\nu = 0$ wird. Wenn also das Kriterium λ_ν in dieser Weise versagt, so steht es noch frei auf die etwas vorteilhaftere Divergenz-Bedingung (2) zu rekurrieren.

3) Die Schreibweise $\overline{\underline{\lim}}$ bedeutet, dafs in der betreffenden Relation ganz nach Belieben der *obere* oder *untere* Limes gewählt werden kann (natürlich innerhalb *einer* solchen Relation durchweg *derselbe* Limes). Dabei genügt es offenbar, in dem *Divergenz*-Kriterium den *oberen*, in dem *Konvergenz*-Kriterium den *unteren* Limes zu berücksichtigen.

Man erhält auf diese Weise diejenigen Kriterien, welche dem Raabeschen und der Skala der Bertrandschen Kriterien[1]) für Reihen mit *positiven* Gliedern entsprechen, nämlich:

$$\text{(a)}\quad \overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty}\, \lambda_\nu \equiv \overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty} \left(\nu \cdot \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - \frac{(\nu+1)^2}{\nu}\right) \begin{cases} < 0: \textit{Divergenz}, \\ > 0: \textit{Konvergenz}. \end{cases}$$

$$\text{(b)}\quad \overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty}\, \lambda_\nu^{(\varkappa)} \equiv \overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty} \left(L_\varkappa(\nu) \cdot \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - \frac{(L_\varkappa(\nu+1))^2}{L_\varkappa(\nu)}\right) \begin{cases} < 0: \textit{Divergenz}, \\ > 0: \textit{Konvergenz}. \end{cases}$$

$$(\varkappa = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

Diese Kriterien gestatten noch die folgende, für den praktischen Gebrauch zweckmäfsige Umformung. Man hat zunächst:

$$\lambda_\nu = \nu\left(\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - 1\right) - 2 - \frac{1}{\nu},$$

also:

$$\overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty}\, \lambda_\nu = \overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty}\, \nu\left(\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - 1\right) - 2. \tag{13}$$

Ferner ist identisch:

$$\begin{aligned}
\lambda_\nu^{(\varkappa)} &= \left(L_\varkappa(\nu) \cdot \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - \frac{(L_{\varkappa-1}(\nu+1)\cdot \lg_\varkappa \nu)^2}{L_\varkappa(\nu)}\right) \\
&\quad - \left(\frac{(L_\varkappa(\nu+1))^2}{L_\varkappa(\nu)} - \frac{(L_{\varkappa-1}(\nu+1)\cdot \lg_\varkappa \nu)^2}{L_\varkappa(\nu)}\right) \\
&= \frac{\lg_\varkappa(\nu)}{L_{\varkappa-1}(\nu)} \cdot \left\{(L_{\varkappa-1}(\nu))^2 \cdot \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - (L_{\varkappa-1}(\nu+1))^2\right\} \\
&\quad - \frac{(L_{\varkappa-1}(\nu+1))^2}{L_{\varkappa-1}(\nu)} \cdot \frac{(\lg_\varkappa(\nu+1))^2 - (\lg_\varkappa \nu)^2}{\lg_\varkappa \nu}.
\end{aligned}$$

(NB. Dabei hat man im Falle $\varkappa = 1$ zu setzen: $L_{\varkappa-1}(\nu) \equiv L_0(\nu) = \nu$). Nun ist aber[2]):

$$\lim_{\nu=\infty} L_{\varkappa-1}(\nu+1) \cdot \{\lg_\varkappa(\nu+1) - \lg_\varkappa(\nu)\} = 1,$$

und aufserdem:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\lg_\varkappa(\nu+1) + \lg_\varkappa \nu}{\lg_\varkappa \nu} = 2, \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{L_{\varkappa-1}(\nu+1)}{L_{\varkappa-1}(\nu)} = 1,$$

---

1) Vgl. Encykl. der math. Wiss. I, S. 87, 88.

2) S. z. B. Math. Ann. **35** (1890), 318, Formel (i).

sodafs sich ergiebt:

$$(14)\quad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\,\lambda_\nu^{(\varkappa)} = \overline{\lim_{\nu=\infty}}\,\frac{\lg_\varkappa \nu}{L_{\varkappa-1}(\nu)}\left\{(L_{\varkappa-1}(\nu))^2 \cdot \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - (L_{\varkappa-1}(\nu+1))^2\right\} - 2.$$

Mit Benutzung der Gleichungen (13), (14) nehmen daher die Kriterien (a), (b) die folgende Form an:

$$(\mathrm{A})\qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\,\frac{\nu}{2}\left(\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - 1\right)\begin{cases}<1: \textit{ Divergenz},\\ >1: \textit{ Konvergenz}.\end{cases}$$

$$(\mathrm{B})\quad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\,\frac{\lg_\varkappa \nu}{2L_{\varkappa-1}(\nu)}\cdot\left((L_{\varkappa-1}(\nu))^2\cdot\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - (L_{\varkappa-1}(\nu+1)^2)\right)\begin{cases}<1: \textit{Divergenz},\\ >1: \textit{Konvergenz}.\end{cases}$$

$$(\varkappa = 1, 2, 3, \ldots)$$

4. Das Kriterium (A) und das für $\varkappa = 1$ resultierende Anfangs-Kriterium der Skala (B), nämlich:

$$(\mathrm{B}^1)\qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\,\frac{\lg \nu}{2\nu}\left(\nu^2\cdot\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - (\nu+1)^2\right)\begin{cases}<1: \textit{ Divergenz},\\ >1: \textit{ Konvergenz},\end{cases}$$

erweisen sich für eine Reihe wichtiger Anwendungen zur Verschärfung des Cauchyschen Fundamental-Kriteriums[1]) als ausreichend. Insbesondere können sie dazu dienen, die absolute Konvergenz oder Divergenz derjenigen in der Funktionenlehre häufig vorkommenden Reihen festzustellen, deren Glieder durch die Beziehung charakterisiert sind:

$$(15)\qquad \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = 1 + \frac{k}{\nu} + \frac{r_\nu}{\nu^2}$$

$$= 1 + \frac{\varkappa + \lambda i}{\nu} + \frac{\varrho_\nu + \sigma_\nu i}{\nu^2} \qquad \text{(zum mindesten für } \nu \geqq n).$$

Dabei bedeutet $k = \varkappa + \lambda i$ eine bestimmte, von ν unabhängige Zahl, während r_ν mit ν variieren kann, jedoch *so*, dafs $|r_\nu|$ stets *unter einer endlichen Schranke* bleibt, also

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\,|\varrho_\nu| < \infty$$

ausfällt. Die fraglichen Bedingungen sind offenbar insbesondere stets erfüllt, wenn $\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}$ in eine *endliche* oder *konvergent-unendliche* Reihe nach

---

1) Man kann diesem eine dem Kriterium (A), (B) analoge Form geben, nämlich:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\left(\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - 1\right)\begin{cases}<0: \textit{ Divergenz},\\ >0: \textit{ Konvergenz}.\end{cases}$$

Potenzen von $\frac{1}{\nu}$ mit konstanten Koeffizienten entwickelt werden kann; desgl. wenn $\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}$ als eine *rationale* Funktion von ν mit konstanten Koeffizienten darstellbar ist.

Man hat nun:

$$\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 = \left(1 + \frac{\varkappa}{\nu} + \frac{\varrho_\nu}{\nu^2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\nu} + \frac{\sigma_\nu}{\nu^2}\right)^2$$

$$= 1 + \frac{2\varkappa}{\nu} + \frac{R_\nu}{\nu^2}, \tag{16}$$

wo:

$$R_\nu = \varkappa^2 + \lambda^2 + 2\varrho_\nu + 2\frac{\varkappa\varrho_\nu + \lambda\sigma_\nu}{\nu} + \frac{\varrho_\nu^2 + \sigma_\nu^2}{\nu^2}, \tag{17}$$

sodaſs also auch:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} R_\nu = \varkappa^2 + \lambda^2 + 2\overline{\lim_{\nu=\infty}}\varrho_\nu \tag{18}$$

endlich ausfällt.

Die Anwendung des Kriteriums (A) ergiebt sodann:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\nu}{2}\left(\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - 1\right) = \lim_{\nu=\infty}\left(\varkappa + \frac{R_\nu}{2\nu}\right) = \varkappa, \tag{19}$$

und somit *divergiert* die Reihe $\Sigma|a_\nu|$, falls $\varkappa < 1$, sie *konvergiert*, falls $\varkappa > 1$.

Im Falle $\varkappa = 1$ *versagt* das Kriterium (A). Zur Bildung des Kriteriums (B^1) hat man nach Gl. (16) für $\varkappa = 1$:

$$\nu^2 \cdot \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 = \nu^2 + 2\nu + R_\nu$$

und daher:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\lg\nu}{2\nu}\left(\nu^2 \cdot \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - (\nu+1)^2\right) = \lim_{\nu=\infty} \frac{\lg\nu\,(R_\nu - 1)}{2\nu} = 0, \tag{20}$$

woraus nach (B^1) die *Divergenz* von $\Sigma|a_\nu|$ resultiert.

Somit ergiebt sich:

Die Reihe $\Sigma|a_\nu|$, *wo:*

$$\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = 1 + \frac{\varkappa + \lambda i}{\nu} + \frac{\varrho_\nu + \sigma_\nu i}{\nu^2},$$

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}|\varrho_\nu + \sigma_\nu i| < \infty\,[1]),$$

ist konvergent für $\varkappa > 1$, *divergent für* $\varkappa \leqq 1$.

---

1) Wie die Gleichungen (19), (20) lehren, bleibt das Gesamtresultat sogar noch gültig, wenn auch $\overline{\lim_{\nu=\infty}} R_\nu = \infty$ wird, sofern nur $\lim_{\nu=\infty} \frac{\lg\nu \cdot R_\nu}{\nu} = 0$, d. h. mit Rücksicht auf Gl. (17):

Dieses Resultat bildet, abgesehen von einem unwesentlichen Unterschiede in der Form, den Hauptbestandteil der von Weierstraſs[1]) auf anderem Wege abgeleiteten Kriterien, welche wiederum noch diejenigen von Gauſs[2]) (auf die Voraussetzung *reeller*, als *rationale* Funktionen von ν darstellbarer $\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}$ sich beschränkenden) als speziellen Fall in sich enthalten.

5. Wenn auch die Reihe $\Sigma |a_\nu|$ für $\varkappa \leqq 1$ *divergiert*, so könnte Σa_ν in diesem Falle noch *bedingt* konvergieren. Es soll nun im folgenden gezeigt werden, daſs thatsächlich auch Σa_ν *divergiert*, daſs dagegen für $0 < \varkappa \leqq 1$ die Reihe $\Sigma a_\nu x^\nu$ (welche ja, wegen:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = 1,$$

für $|x| < 1$ *absolut konvergiert*) noch für jedes von 1 verschiedene x mit dem absoluten Betrage $|x| = 1$ (*bedingt*) *konvergiert*.[3])

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\lg\nu \cdot \varrho_\nu}{\nu} = 0, \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{\lg\nu \cdot \sigma_\nu^2}{\nu^2} = 0,$$

also schlieſslich:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\lg\nu \cdot |\varrho_\nu + \sigma_\nu i|}{\nu} = 0.$$

Das auf den Fall $\varkappa \gtreqless 1$ bezügliche Resultat gilt nach Gl. (19) sogar noch, wenn nur: $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{R_\nu}{\nu} = 0$, d. h. schlieſslich wiederum, wenn:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{|\varrho_\nu + \sigma_\nu i|}{\nu} = 0.$$

1) Journal f. Math. **51** (1856), 28 = Werke, Bd. I, S. 185. — Weierstraſs operiert mit dem reziproken Quotienten $\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$. Ich gebe der Form $\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}$ *deshalb* den Vorzug, weil hierfür die Überführung der Kriterien (a), (b) in die zweckmäſsigere Form (A), (B) etwas kürzer ausfällt, andererseits auch die eventuelle Entwickelung von $\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}$ nach Potenzen von $\frac{1}{\nu}$ bei den in der Praxis zumeist vorkommenden Fällen sich etwas bequemer ausführen läſst, als diejenige der reziproken Quotienten.

2) Ges. Werke, Bd. III, S. 139.

3) Auch dieses Resultat findet sich bei Weierstraſs a. a. O. Die hier gegebene Ableitung, die sich zwar im wesentlichen an den von Weierstraſs vorgezeichneten Gedankengang anschlieſst, dürfte in verschiedener Beziehung einfacher und durchsichtiger sein als die Weierstraſssche, auch als diejenige, welche Herr O. Stolz in seinen „Vorlesungen über allg. Arithmetik", Bd. II, S. 145 ff., 156 mitgeteilt hat.

Es bedeute zunächst α_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ eine unbegrenzte Folge *positiver* Zahlen, welche, zum mindesten von einem bestimmten ν ab, der Bedingung genügen:

$$\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = 1 + \frac{\varkappa}{\nu} + \frac{\varrho_\nu}{\nu^2}, \tag{21}$$

wo wiederum $\varkappa$ eine bestimmte, von ν unabhängige reelle Zahl bedeutet, während ϱ_ν mit ν zwar variieren kann, aber absolut genommen *stets unter einer positiven Zahl* g bleiben soll.

Ist dann $\varkappa$ *von Null verschieden*, so kann man Gl. (21) in die Form setzen:

$$\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = 1 + \frac{\varkappa}{\nu}\left(1 + \frac{\varrho_\nu}{\varkappa \cdot \nu}\right) \tag{22}$$

und sodann eine natürliche Zahl m so fixieren, dafs für $\nu \geqq m$:

$$\varkappa\nu \geqq g > |\varrho_\nu|, \quad \text{also:} \quad 1 + \frac{\varrho_\nu}{\varkappa\nu} > 0.$$

Daraus folgt, dafs für $\nu \geqq m$:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} < 1, \quad \text{falls: } \varkappa < 0, \\ &\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} > 1, \quad \text{falls: } \varkappa > 0, \end{aligned}\right. \tag{23}$$

und diese Ungleichungen besagen, dafs die α_ν für $\nu \geqq m$ *monoton zu-* oder *ab*nehmen, je nachdem $\varkappa < 0$ oder $\varkappa > 0$. Die α_ν müssen also in jedem dieser beiden Fälle für $\nu = \infty$ einen gewissen (endlichen oder unendlichen) *Grenzwert* besitzen.

Um diesen letzteren zu bestimmen, schreiben wir Gl. (21) folgendermafsen:

$$\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = \left(1 + \frac{\varkappa}{\nu}\right)\left(1 + \frac{\varrho_\nu}{\nu(\nu + \varkappa)}\right). \tag{24}$$

Durch Substitution von $\nu = m, (m+1), \ldots, (\mu - 1)$ (wobei, falls $\varkappa$ *negativ ganzzahlig* sein sollte, von vornherein $m > |\varkappa|$ angenommen werden mag, damit $\nu + \varkappa$ niemals *Null* wird) und Multiplikation der betreffenden Gleichungen ergiebt sich alsdann:

$$\frac{\alpha_m}{\alpha_\mu} = \prod_m^{\mu-1}{}_\nu \left(1 + \frac{\varkappa}{\nu}\right) \cdot \prod_m^{\mu-1}{}_\nu \left(1 + \frac{\varrho_\nu}{\nu(\nu + \varkappa)}\right). \tag{25}$$

Läfst man hier μ ins Unendliche wachsen, so geht das zweite Produkt, wegen der *Konvergenz* von

$$\sum \left|\frac{\varrho_\nu}{\nu(\nu + \varkappa)}\right| < \sum \frac{g}{\nu \cdot |\nu + \varkappa|},$$

in ein *konvergentes* Produkt über, während das erste, wegen der *Divergenz* von $\sum \frac{\varkappa}{\nu}$, nach 0 oder ∞ *divergiert*, je nachdem $\varkappa < 0$ oder $\varkappa > 0$. Hiernach findet man

$$\lim_{\mu=\infty} \frac{\alpha_m}{\alpha_\mu} \begin{cases} = 0, & \text{falls: } \varkappa < 0, \\ = \infty, & \text{falls: } \varkappa > 0, \end{cases}$$

und da α_m eine bestimmte positive Zahl vorstellt, schliefslich:

$$(26) \qquad \lim_{\mu=\infty} \alpha_\mu \begin{cases} = \infty, & \text{falls: } \varkappa < 0, \\ = 0, & \text{falls: } \varkappa > 0. \end{cases}$$

In dem noch übrig bleibenden Falle $\varkappa = 0$ hat man nach Gl. (21) die Beziehung:

$$(27) \qquad \frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = 1 + \frac{\varrho_\nu}{\nu^2},$$

welche zeigt, dafs α_ν von einer gewissen Stelle $\nu = m$ ab nur dann *monoton zu-* bezw. *ab*nimmt, wenn ϱ_ν für $\nu \geqq m$ *beständig* < 0 bezw. > 0. Im übrigen besitzen aber die α_ν, auch wenn ϱ_ν *nicht* diese Eigenschaft hat, allemal für $\nu = \infty$ einen bestimmten, *von Null verschiedenen* Grenzwert. Man findet nämlich aus Gl. (27), analog wie oben:

$$(28) \qquad \frac{\alpha_m}{\alpha_\mu} = \prod_m^{\mu-1}{}_\nu \left(1 + \frac{\varrho_\nu}{\nu^2}\right)$$

und hieraus:

$$(29) \qquad \lim_{\mu=\infty} \alpha_\mu = \alpha_m \cdot \left(\prod_m^{\infty}{}_\nu \left(1 + \frac{\varrho_\nu}{\nu^2}\right)\right)^{-1},$$

d. h. *endlich und von Null verschieden*, da das betreffende Produkt in Folge der Konvergenz von $\sum \left| \frac{\varrho_\nu}{\nu^2} \right|$ *konvergiert*.

6. Sind jetzt die a_ν wiederum beliebig komplex, und setzt man, wie früher (Gl. (15), (16)):

$$\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = 1 + \frac{k}{\nu} + \frac{r_\nu}{\nu^2} = 1 + \frac{\varkappa + \lambda i}{\nu} + \frac{\varrho_\nu + \sigma_\nu i}{\nu^2}$$

$$\left| \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} \right|^2 = 1 + \frac{2\varkappa}{\nu} + \frac{R_\nu}{\nu^2},$$

wo $|r_\nu|$, also auch R_ν (s. Gl. (17)) stets unter einer endlichen Schranke bleiben soll, etwa:

$$|r_\nu| < g, \quad R_\nu < G,$$

so liefert die Anwendung der in Nr. 5 gefundenen Resultate auf die $|a_\nu|^2$ unmittelbar die folgenden Ergebnisse:

(I) Ist $\varkappa < 0$, so nehmen die $|a_\nu|^2$, also auch die $|a_\nu|$ mit ν *monoton zu*, und man hat:

$$(30) \qquad \lim_{\nu=\infty} |a_\nu| = \infty, \quad \text{also auch:} \quad \lim_{\nu=\infty} a_\nu = \infty.$$

(II) Ist $\varkappa > 0$, so nehmen die $|a_\nu|^2$ bezw. die $|a_\nu|$ mit wachsendem ν *monoton ab*, und man hat:

$$(31) \qquad \lim_{\nu=\infty} |a_\nu| = 0, \quad \text{also auch:} \quad \lim_{\nu=\infty} a_\nu = 0.$$

(III) Ist $\varkappa = 0$, so besitzt $|a_\nu|^2$, also auch $|a_\nu|$ für $\nu = \infty$ einen bestimmten *von Null verschiedenen* Grenzwert. Daraus folgt aber noch *nicht*, daſs auch für a_ν selbst das nämliche gilt. Man hat nun in dem vorliegenden Falle:

$$\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = 1 + \frac{\lambda i}{\nu} + \frac{r_\nu}{\nu^2}$$

$$= \left(1 + \frac{\lambda i}{\nu}\right)\left(1 + \frac{r_\nu}{\nu(\nu + \lambda i)}\right)$$

und daher:

$$(32) \qquad \frac{a_m}{a_\mu} = \prod_m^{\mu-1}{}_\nu \left(1 + \frac{\lambda i}{\nu}\right) \cdot \prod_m^{\mu-1}{}_\nu \left(1 + \frac{r_\nu}{\nu(\nu + \lambda i)}\right).$$

Das *zweite* Produkt geht wiederum für $\lim \mu = \infty$ in ein absolut *konvergentes* über, da

$$\left|\frac{r_\nu}{\nu(\nu + \lambda i)}\right| < \frac{g}{\nu^2} \cdot \left|\frac{1}{1 + \frac{\lambda i}{\nu}}\right|.$$

Das *erste* dagegen *divergiert*, sofern nicht etwa $\lambda = 0$ ist, für $\lim \mu = \infty$, in *der* Weise, daſs zwar der *absolute Betrag*, *nicht* aber die *Charakteristik*[1]) einen bestimmten Grenzwert besitzt, der überdies für jenen absoluten Betrag *von Null verschieden* ausfällt.[2])

Darnach wird (für $\varkappa = 0$, $|\lambda| > 0$) a_μ bei $\lim \mu = \infty$ in *der* Weise unbestimmt, daſs zwar $\lim_{\mu=\infty} |a_\mu|$ eine bestimmte, positive Zahl ist, während die Charakteristik unbestimmt wird.

---

1) Unter der *Charakteristik* einer komplexen Zahl a verstehe ich die (sonst wohl auch als „Richtungs-Koeffizient" bezeichnete) Zahl $\frac{a}{|a|}$.

2) Vgl. Math. Ann. **33** (1888), 136.

Nur in dem besonderen Falle $\lambda = 0$ (also: $k = 0$) hat man:

$$(33) \qquad \frac{a_m}{a_\mu} = \prod_m^{\mu-1}{}_\nu \left(1 + \frac{r_\nu}{\nu^2}\right),$$

sodafs also $\lim_{\mu=\infty} a_\mu$ einen bestimmten *von Null verschiedenen* Wert besitzt.

7. Aus den Ergebnissen (I) und (III) der vorigen Nummer folgt unmittelbar, dafs die Reihe Σa_ν für $\varkappa \leqq 0$ allemal *divergiert*, da ihre Glieder *nicht* den Grenzwert *Null* besitzen. Da Σa_ν andererseits für $\varkappa > 1$ als *absolut konvergent* erkannt wurde (Nr. 4), so erfordert nur noch der Fall: $0 < \varkappa \leqq 1$, für welchen ja nach (II): $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = 0$ sich ergab, eine genauere Untersuchung.

Es soll nun gezeigt werden:

Auch für: $0 < \varkappa \leqq 1$ divergiert Σa_ν, dagegen konvergiert $\Sigma | a_\nu - a_{\nu+1} |$.

Beweis: Wir nehmen, um Weitläufigkeiten zu vermeiden an, dafs die Gleichung:

$$\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = 1 + \frac{k}{\nu} + \frac{r_\nu}{\nu^2}$$

schon für $\nu \geqq 1$ Geltung habe[1]), und bringen sie auf die Form:

$$\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = \frac{1 - \frac{k^2}{\nu^2} + \left(1 - \frac{k}{\nu}\right) \cdot \frac{r_\nu}{\nu^2}}{1 - \frac{k}{\nu}} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$(34) \qquad = \frac{1 + \frac{t_\nu}{\nu^2}}{1 - \frac{k}{\nu}}, \text{ wo also: } t_\nu = \left(1 - \frac{k}{\nu}\right) \cdot r_\nu - k^2,$$

und somit $| t_\nu |$ gleichzeitig mit $| r_\nu |$ stets unter einer endlichen Schranke bleibt. Sodann werde gesetzt:

$$(35) \qquad a_\nu = p_\nu q_\nu, \quad \text{also: } \frac{p_\nu}{p_{\nu+1}} \cdot \frac{q_\nu}{q_{\nu+1}} = \frac{1 + \frac{t_\nu}{\nu^2}}{1 - \frac{k}{\nu}},$$

---

1) Wäre dies erst für $\nu \geqq n$ der Fall, so könnte man durch geeignete *Abänderung* einer *endlichen* Anzahl von Anfangsgliedern die Gültigkeit der fraglichen Voraussetzung herstellen, ohne dafs damit das *Endresultat*, d. h. die *Divergenz* der ursprünglichen Σa_ν, die *Konvergenz* von $\Sigma | a_\nu - a_{\nu+1} |$, im geringsten alteriert würde.

wo p_ν und q_ν, einzeln genommen, durch die Beziehungen definiert sein sollen:

$$(36)\qquad \begin{cases} \dfrac{p_\nu}{p_{\nu+1}} = \dfrac{1}{1-\dfrac{k}{\nu}}, \quad \dfrac{q_\nu}{q_{\nu+1}} = 1 + \dfrac{t_\nu}{\nu^2} & (\nu = 1, 2, 3, \ldots)\ ^{1)} \\ \text{und speziell: } p_1 = 1, \quad q_1 = a_1. \end{cases}$$

Die q_ν besitzen alsdann (vgl. den Schlufs der vorigen Nummer) für $\nu = \infty$ einen bestimmten *von Null verschiedenen* Grenzwert, etwa:

$$(37)\qquad \lim_{\nu=\infty} q_\nu = q, \quad \text{wo: } \ |q| > 0.$$

Um die Art der Annäherung von q_ν an diesen Grenzwert genauer zu beurteilen, hat man nach Gl. (36) zunächst:

$$q_\nu - q_{\nu+1} = \frac{t_\nu q_{\nu+1}}{\nu^2}$$

und hieraus, wenn man ν der Reihe nach durch $(\nu+1)$, $(\nu+2)$, ..., $(\nu+n-1)$ ersetzt und die resultierenden Gleichungen zu der vorstehenden addiert:

$$(38)\qquad q_\nu - q_{\nu+n} = \sum_\nu^{\nu+n-1}{}^{\mu}\ \frac{t_\mu q_{\mu+1}}{\mu^2}.$$

Da $|t_\mu|$, $|q_\mu|$ unter endlichen Schranken bleiben, so geht diese Summe für $\lim n = \infty$ in eine absolut *konvergente* Reihe über, und es ergiebt sich auf diese Weise:

$$(39)\qquad q_\nu - q = \sum_\nu^{\infty}{}^{\mu}\ \frac{t_\mu q_{\mu+1}}{\mu^2},$$

also, wenn man Zähler und Nenner jedes Reihengliedes mit $\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)$ multipliziert:

$$(40)\qquad |q_\nu - q| \leqq \sum_\nu^{\infty}{}^{\mu}\ \frac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right) \cdot |t_\mu| \cdot |q_{\mu+1}|}{\mu(\mu+1)}.$$

---

1) Ist speziell $k = 1$, so wird die Gleichung

$$\frac{p_\nu}{p_{\nu+1}} = \frac{1}{1-\dfrac{k}{\nu}}$$

für $\nu = 1$ sinnlos. Dieselbe soll dann nur für $\nu \geqq 2$ gelten, und aufserdem

$$p_2 = 1, \quad q_2 = a_2$$

gesetzt werden.

Da man sodann eine *positive* Zahl h so fixieren kann, daſs:

(41) $$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\cdot|t_\mu|\cdot|q_{\mu+1}|<h \qquad (\mu=1,2,3,\ldots),$$

und da andererseits:

$$\sum_\nu^\infty{}^\mu \frac{1}{\mu(\mu+1)}=\sum_\nu^\infty{}^\mu\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\mu+1}\right)=\frac{1}{\nu},$$

so folgt aus (40), daſs:

(42) $$|q_\nu-q|<\frac{h}{\nu},$$

und es läſst sich somit q_ν in die Form setzen:

(43) $$q_\nu=q+\frac{h_\nu}{\nu},\quad \text{wo:}\quad |h_\nu|<h.$$

Was ferner den mit p_ν bezeichneten Faktor von a_ν (s. Gl. (35), (36)) betrifft, so läſst sich zeigen, daſs $\sum p_\nu$ *divergiert*, während $\sum\frac{p_\nu}{\nu}$ und $\Sigma(p_\nu-p_{\nu+1})$ *absolut konvergieren.* Man hat nämlich nach Gl. (36):

(44) $$\frac{p_{\mu+1}}{p_\mu}=\left(1-\frac{k}{\mu}\right)=\frac{\mu-k}{\mu},$$

also durch Substitution von $\mu=1,2,\ldots,\nu$ und Multiplikation[1]):

(45) $$\frac{p_{\nu+1}}{p_1}=p_{\nu+1}=\frac{(1-k)(2-k)\ldots(\nu-k)}{1.2\ldots\nu}.$$

Setzt man jetzt:

(46) $$p_1+p_2+\cdots+p_\nu=s_\nu,$$

so folgt zunächst:

$$s_2=p_1+p_2=1+\frac{1-k}{1}=\frac{2-k}{1},$$

$$s_3=s_2+p_3=\frac{2-k}{1}+\frac{(1-k)(2-k)}{1.2}=\frac{(2-k)(3-k)}{1.2}.$$

---

1) Dabei ist wiederum der Spezialfall $k=1$ auszuschlieſsen. Hier wird:

$$\frac{p_{\mu+1}}{p_\mu}=\frac{\mu-1}{\mu},$$

sodaſs durch Substitution von $\mu=2,3,\ldots,\nu$ und Multiplikation sich ergiebt:

$$\frac{p_{\nu+1}}{p_2}=p_{\nu+1}=\frac{1}{\nu},$$

d. h. Σp_ν *divergiert* in diesem Fall nach $+\infty$.

Angenommen, man habe für irgend ein bestimmtes ν:

$$(47)\qquad s_\nu = \frac{(2-k)(3-k)\dots(\nu-k)}{1.2\dots(\nu-1)},$$

so wird:

$$(48)\qquad \begin{cases} s_{\nu+1} = s_\nu + p_{\nu+1} = \dfrac{(2-k)(3-k)\dots(\nu-k)}{1.2\dots(\nu-1)}\left(1+\dfrac{1-k}{\nu}\right) \\ \qquad = \dfrac{(2-k)(3-k)\dots(\nu+1-k)}{1.2\dots\nu}, \end{cases}$$

d. h. $s_{\nu+1}$ hat dann wiederum genau diejenige Form, welche aus der für s_ν angenommenen Gl. (47) durch Substitution von $\nu+1$ für ν hervorgeht. Da aber die Richtigkeit von Gl. (47) für $\nu = 2, 3$ erwiesen ist, so gilt sie hiernach für jeden Wert von ν.

Bringt man $s_{\nu+1}$ auf die Form:

$$(49)\qquad \begin{aligned} s_{\nu+1} &= \prod_1^\nu{}_\mu \frac{\mu+1-k}{\mu} = \prod_1^\nu{}_\mu \frac{\mu+1-\varkappa-\lambda i}{\mu+1+\varkappa}\cdot\frac{\mu+1-\varkappa}{\mu} \\ &= \prod_1^\nu{}_\mu \left(1+\frac{1-\varkappa}{\mu}\right)\cdot\prod_1^\nu{}_\mu\left(1-\frac{\lambda i}{\mu+1-\varkappa}\right), \end{aligned}$$

so erkennt man, dafs für $\varkappa < 1$ das *erste* Produkt mit $\lim \nu = \infty$ nach $+\infty$ *divergiert*, während bei dem *zweiten* der *absolute Betrag* einen *von Null verschiedenen, bestimmten Grenzwert* besitzt, dagegen die *Charakteristik* (aufser wenn $\lambda = 0$) für $\lim \nu = \infty$ *unbestimmt* wird.

Hiernach *divergiert* also $\sum_1^\infty{}_\nu p_\nu$ in *der* Weise, dafs $\left|\sum_1^\infty{}_\nu p_\nu\right| = +\infty$ und aufserdem, wenn nicht gerade $\lambda = 0$ ist, die *Charakteristik unbestimmt* wird.

In dem besonderen Falle $\varkappa = 1$ reduziert sich Gl. (49) auf die folgende:

$$(50)\qquad s_{\nu+1} = \prod_1^\nu{}_\mu\left(1-\frac{\lambda i}{\mu}\right),$$

sodafs $s_{\nu+1}$ für $\lim \nu = \infty$ einen *bestimmten von Null verschiedenen absoluten Betrag*, dagegen (sofern nicht etwa $\lambda = 0$)[1]) *keine bestimmte Charakteristik* besitzt und somit $\sum_1^\infty{}_\nu p_\nu$ *endlich-unbestimmt* ausfällt.

---

1) Dieser Fall — d. h. $\varkappa = 1$, $\lambda = 0$, also: $k = 1$ — ist bereits durch die vorige Fufsnote erledigt.

Man hat nun ferner nach Gl. (36):

$$(51)\qquad \frac{\frac{1}{\nu}\cdot p_\nu}{\frac{1}{\nu+1}\cdot p_{\nu+1}} = \frac{\nu+1}{\nu}\cdot\frac{1}{1-\frac{k}{\nu}}$$

$$= \left(1+\frac{1}{\nu}\right)\left(1+\frac{k}{\nu}+\frac{k^2}{\nu^2\left(1-\frac{k}{\nu}\right)}\right)$$

$$= 1+\frac{k+1}{\nu}+\frac{k}{\nu^2}\left(1+k\cdot\frac{1+\frac{1}{\nu}}{1-\frac{k}{\nu}}\right),$$

und hieraus folgt ohne weiteres mit Hülfe des Konvergenzsatzes von Nr. 4, dafs $\sum\left|\frac{p_\nu}{\nu}\right|$ *konvergiert,* falls[1]) $\Re(k+1)>1$, d. h. $\varkappa>0$.

Schliefslich ergiebt sich noch:

$$(52)\qquad \frac{p_\nu-p_{\nu+1}}{p_{\nu+1}-p_{\nu+2}} = \frac{p_\nu}{p_{\nu+1}}\cdot\frac{1-\frac{p_{\nu+1}}{p_\nu}}{1-\frac{p_{\nu+2}}{p_{\nu+1}}}$$

$$= \frac{\nu}{\nu-k}\cdot\frac{\frac{k}{\nu}}{\frac{k}{\nu+1}} = \frac{\nu+1}{\nu}\cdot\frac{1}{1-\frac{k}{\nu}},$$

woraus (wegen der Übereinstimmung mit der rechten Seite von Gl. (51)) unmittelbar die *Konvergenz* von $\Sigma|p_\nu-p_{\nu+1}|$ resultiert.

Um jetzt die bezüglich der p_ν, q_ν gewonnenen Resultate auf die Beurteilung der a_ν anzuwenden, hat man nach Gl. (35) und (43):

$$(53)\qquad a_\nu = q\cdot p_\nu + h_\nu\cdot\frac{p_\nu}{\nu},$$

$$(54)\qquad a_\nu - a_{\nu+1} = q(p_\nu-p_{\nu+1}) + h_\nu\cdot\frac{p_\nu}{\nu} - h_{\nu+1}\cdot\frac{p_{\nu+1}}{\nu+1}. \qquad (\text{wo: } |h_\nu| < h)$$

Aus der *ersten* Gleichung erkennt man, dafs Σa_ν in derselben Weise *divergiert*[2]) wie $\sum p_\nu$ $\left(\text{da ja } \sum h_\nu\cdot\frac{p_\nu}{\nu}\right.$ *absolut konvergiert*$\left.\right)$.

---

1) $\Re(x)$ bedeutet allgemein den *reellen Teil* von x.

2) Über den genaueren Divergenz-Charakter von Σa_ν ergiebt sich aus den Untersuchungen des Textes noch folgendes:

Ist $0<\varkappa<1$, $\lambda \gtrless 0$, so wird $\left|\sum_1^\infty {}_\nu a_\nu\right| = +\infty$, die *Charakteristik* von

Aus der *zweiten* Gleichung ergiebt sich:

$$(55)\qquad |a_\nu - a_{\nu+1}| < q\,|p_\nu - p_{\nu+1}| + h\cdot\left|\frac{p_\nu}{\nu}\right| + h\cdot\left|\frac{p_{\nu+1}}{\nu+1}\right|,$$

woraus die *Konvergenz* von $\Sigma|a_\nu - a_{\nu+1}|$ ersichtlich ist.

Damit ist aber der zu Anfang dieser Nummer ausgesprochene Satz nunmehr vollständig bewiesen.

8. Aus der (für den Fall $0 < \varkappa \leqq 1$) soeben bewiesenen Konvergenz von $\Sigma|a_\nu - a_{\nu+1}|$, in Verbindung mit der in diesem Falle nach Gl. (31) geltenden Beziehung $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = 0$, folgt mit Hülfe der bekannten Transformation

$$\sum_0^n{}_\nu\, a_\nu x^\nu = \sum_0^{n-1}{}_\nu\,(a_\nu - a_{\nu+1})\cdot X_\nu + a_n X_n\,,$$

wo:

$$X_n = 1 + x + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x},$$

dafs $\Sigma a_\nu x^\nu$ noch für jedes von 1 verschiedene x mit dem absoluten Betrage $|x| = 1$ *konvergiert* (und zwar wegen der *Divergenz* von Σa_ν nur *bedingt*).

Man kann danach das Hauptresultat der in Nr. 4—7 angestellten Untersuchungen auch folgendermafsen formulieren:

Sind die a_ν komplexe Zahlen von der Beschaffenheit, dafs zum mindesten für $\nu \geqq n$:

$$(56)\qquad \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = 1 + \frac{k}{\nu} + \frac{r_\nu}{\nu^2},$$

wo: $|r_\nu| < g$ für jedes ν, *so ist die Reihe $\Sigma a_\nu x^\nu$ absolut konvergent für $|x| < 1$ und, falls $\Re(k) > 1$, auch noch für $|x| = 1$. Ist $0 < \Re(k) \leqq 1$, so konvergiert die Reihe $\Sigma a_\nu x^\nu$ noch bedingt für $|x| = 1$ mit einzigem Ausschlufs von $x = 1$, während sie im Falle $\Re(k) \leqq 0$ bei $|x| = 1$ ausnahmslos divergiert. Für $|x| > 1$ ist $\Sigma a_\nu x^\nu$ in jedem Falle divergent.*

$\sum\limits_1^\infty{}_\nu a_\nu$ *unbestimmt* (cf. Gl. (49)). Ist $\varkappa = 1$, $\lambda \gtrless 0$, so wird $\left|\sum\limits_1^\infty{}_\nu a_\nu\right|$ *endlich und bestimmt*, die *Charakteristik* von $\sum\limits_1^\infty{}_\nu a_\nu$ wiederum *unbestimmt* (cf. Gl. (50)).

Ist $\varkappa \leqq 1$, $\lambda = 0$, so wird $\sum\limits_1^\infty{}_\nu a_\nu = \infty$ mit *bestimmter Charakteristik* (cf. Gl. (49) und Fufsnote S. 15).

9. Ein einfaches und besonders nützliches Beispiel für die Anwendung dieses Satzes bietet die *hypergeometrische* Reihe, also die Annahme:

$$(57)\qquad a_\nu = \frac{a\cdot(a+1)\cdots(a+\nu-1)\cdot b\cdot(b+1)\cdots(b+\nu-1)}{c\cdot(c+1)\cdots(c+\nu-1)\cdot 1\cdot 2\cdots\nu}$$

(wo a, b, c beliebig komplex mit Ausschlufs *ganzzahliger negativer* Werte). Man hat hier zunächst:

$$(58)\qquad \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = \frac{(\nu+1)(\nu+c)}{(\nu+a)(\nu+b)} = \frac{\nu^2+(1+c)\cdot\nu+c}{\nu^2+(a+b)\cdot\nu+ab}.$$

Setzt man:

$$(59)\qquad \frac{\nu^2+(1+c)\nu+c}{\nu^2+(a+b)\nu+ab} = 1+\frac{k}{\nu}+\frac{r_\nu}{\nu^2},$$

so folgt durch Multiplikation mit $\nu^2+(a+b)\nu+ab$:

$$(1+c-a-b)\cdot\nu+(c-ab) = k\nu+(a+b)\cdot k+\frac{abk}{\nu}+\left(1+\frac{a+b}{\nu}+\frac{ab}{\nu^2}\right)\cdot r_\nu$$

und daher:

$$(60)\qquad \begin{cases} k = 1+c-a-b,\\[1ex] r_\nu = \dfrac{c-ab-(a+b)k-\dfrac{abk}{\nu}}{1+\dfrac{a+b}{\nu}+\dfrac{ab}{\nu^2}}, \end{cases}$$

also:

$$\lim_{\nu=\infty} r_\nu = c-ab-(a+b)k$$

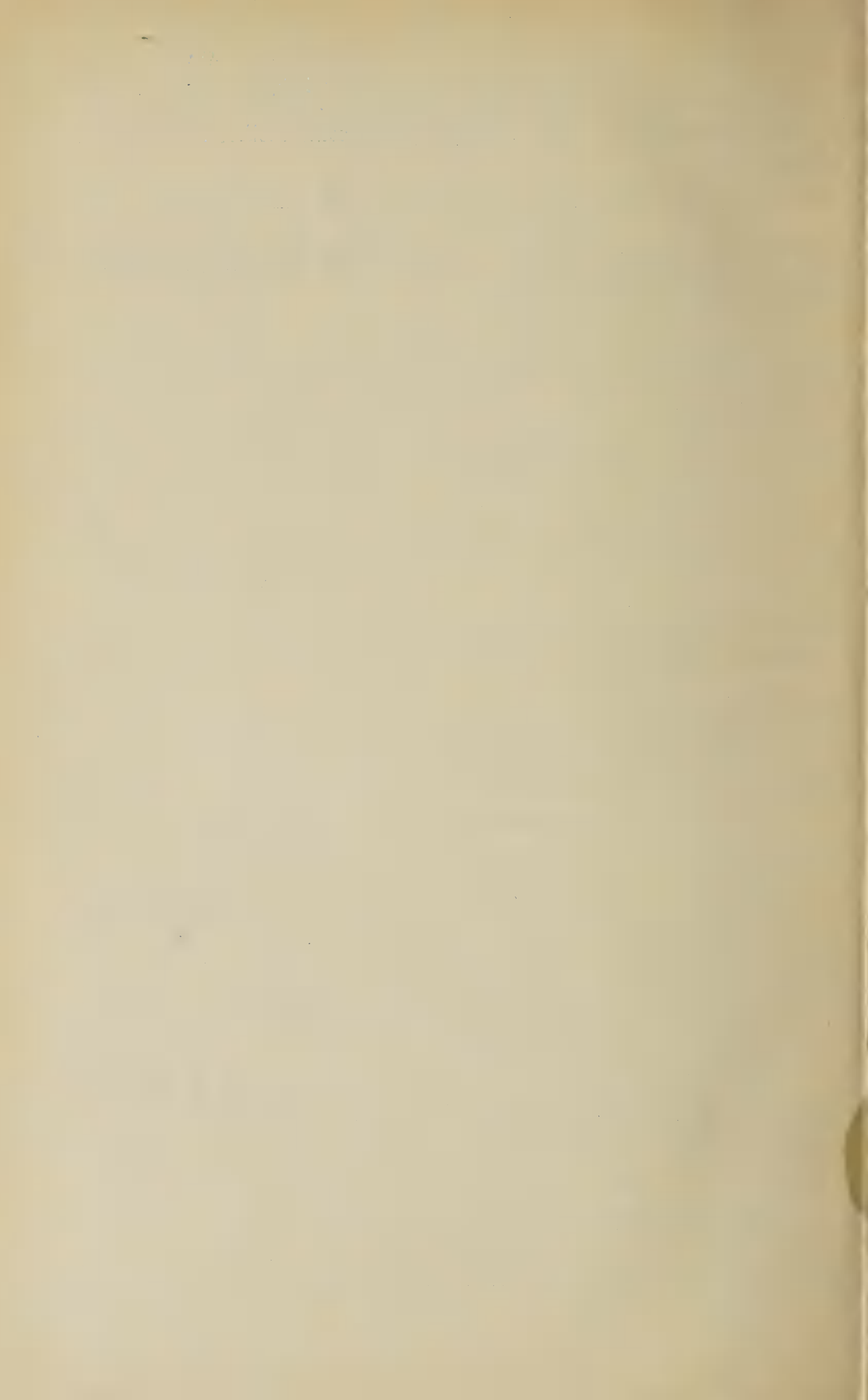
(d. h. *endlich*).

Da hiernach $\Re(k) = 1+\Re(c-a-b)$ wird, so folgt aus dem obigen Satze, dafs die hypergeometrische Reihe für $|x|=1$ noch *absolut konvergiert*, wenn: $\Re(c-a-b)>1$; dafs sie für $|x|=1$, mit Ausnahme von $x=1$ selbst, noch *bedingt konvergiert*, wenn: $0<\Re(c-a-b)\leqq 1$; dafs sie endlich in dem noch übrig bleibenden Falle $\Re(c-a-b)\leqq 0$ für $|x|=1$ ausnahmslos *divergiert*.

Die spezielle Annahme: $b=c$, $a=-m$, $x=-y$ liefert dann noch die entsprechenden Resultate für die *binomische* Reihe

$$\sum \frac{m\cdot(m-1)\cdots(m-\nu+1)}{1\cdot 2\cdots\nu}\cdot y^\nu.$$

München, Februar 1902.



30

onderabdruck aus:

ARCHIV
DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

HERAUSGEGEBEN VON

E. LAMPE IN BERLIN.

W. FRANZ MEYER IN KÖNIGSBERG I. PR.

E. JAHNKE IN BERLIN.



LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Dr. E. Jahnke, Berlin W 15, Pariser Strafse 55

zu richten. Es nehmen aber auch Geheimer Regierungsrat Prof. Dr. E. Lampe in Berlin W 35, Kurfürstenstrafse 139 und Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51, Sendungen für die Redaktion an.

Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von gröfseren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine gröfsere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

Jeder Band des Archivs umfafst 24 Druckbogen in 4 Heften und kostet 14 Mark; jährlich sollen zunächst etwa 6 Hefte ausgegeben werden. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an. Probehefte durch jede Buchhandlung.

An die Herren Mitarbeiter und Leser des Archivs der Mathematik und Physik!

Das Archiv der Mathematik und Physik ist 1841 von J. A. Grunert, der vor seiner Berufung auf den Lehrstuhl der Universität zu Greifswald zwölf Jahre lang Gymnasiallehrer gewesen war, mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehrer der höheren Unterrichtsanstalten ins Leben gerufen worden, nachdem in Frankreich die Annales de mathématiques pures et appliquées von Gergonne in ähnlicher vorbildlicher Weise seit 1810 anregend und befruchtend gewirkt hatten. Nach Grunerts Tode (1872) wurde die Leitung des Archivs dem als Mathematiker wie als Philosoph gleich verdienten Professor R. Hoppe zu Berlin anvertraut; derselbe hat sich bis zu seinem im Juni dieses Jahres erfolgten Tode bemüht, im Archiv diejenige Richtung inne zu halten, welche durch die 53 unter Grunert erschienenen Bände gegeben und durch den Titel vorgezeichnet war.

Indem wir drei Unterzeichnete uns zur gemeinsamen Herausgabe des Archivs vereinigt haben, wollen wir seinen historisch entstandenen Charakter nicht ändern, sondern vielmehr versuchen, ihn schärfer auszuprägen.

Nachdem die Zeitschrift für Mathematik und Physik (Schlömilch) den bisherigen Charakter geändert und die Pflege der angewandten Mathematik in den Vordergrund gerückt hat, bleibt das Archiv das einzige Organ in Deutschland, welches sich nicht bloſs die Erweiterung der mathematischen Erkenntnis, sondern auch die Verbreitung der Resultate mathematischer Forschung als Ziel steckt.

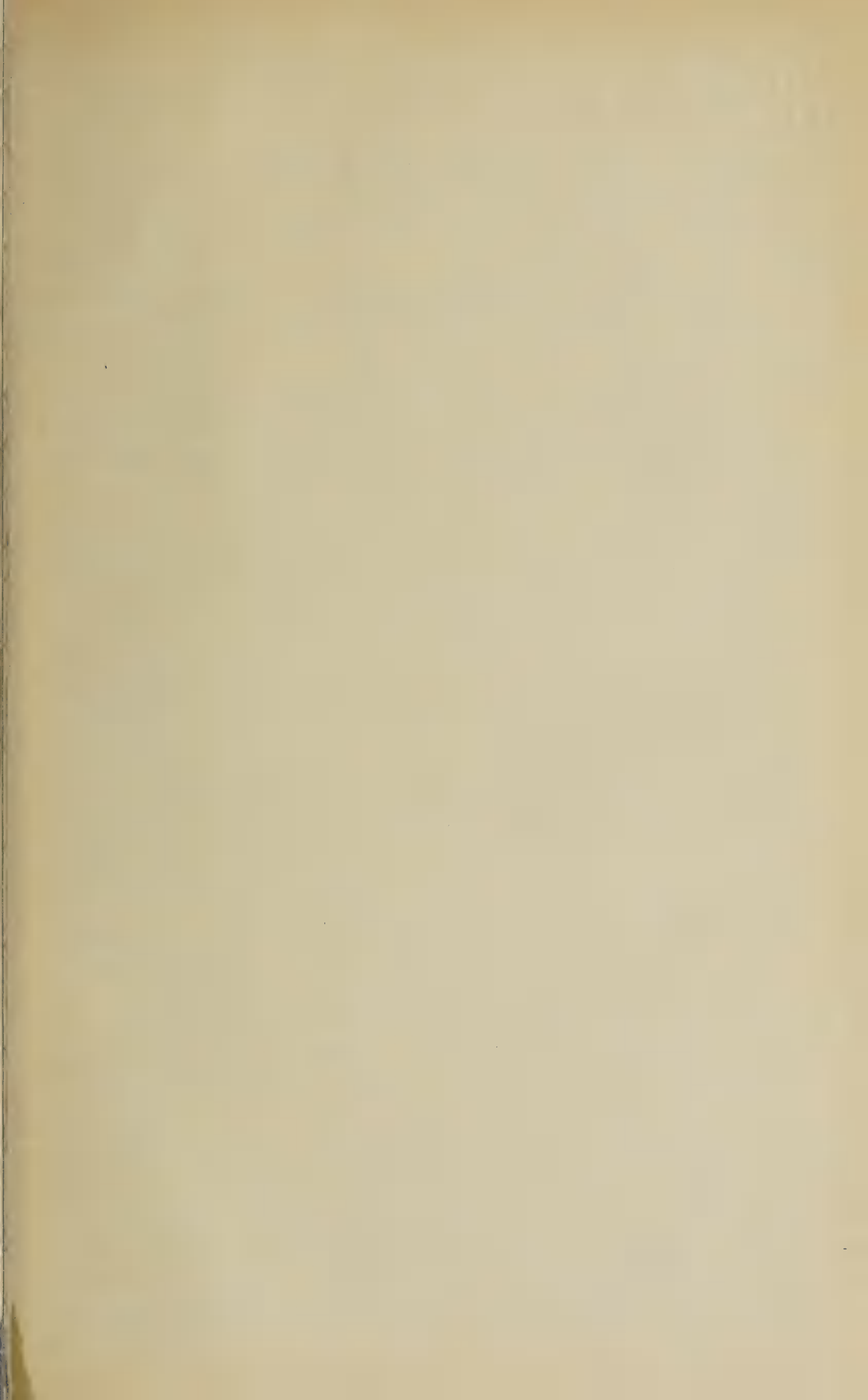
Die beiden bis jetzt erschienenen Bände der dritten Reihe des neugestalteten Archivs lassen erkennen, wie weit es gelungen ist, das Programm zu verwirklichen, welches wir im ersten Bande dargelegt hatten.

Hervorragende Mathematiker haben uns die Früchte ihrer Untersuchungen zum Abdruck gesandt. Mit Genugthuung verzeichnen wir die Thatsache, daſs Charles Hermite unserer Zeitschrift ein besonderes Interesse entgegengebracht hat; seine letzte Arbeit ziert den ersten Band.

Zur Fesselung eines gröſseren Leserkreises sind auch solche Aufsätze eingerückt worden, welche die Kenntnisnahme und das Verständnis der neueren mathematischen Anschauungen und Entdeckungen vermitteln.

Da ferner der mathematische Unterricht an den Hochschulen (Universitäten, technischen Hochschulen u. s. w.) sowie an den Mittelschulen (Gymnasien, Realgymnasien, Oberrealschulen u. s. w.) von den Ergebnissen der Forschung beeinfluſst ist, so haben wir auch gern Artikel gebracht, welche bezügliche Fragen in wissenschaftlicher Form behandeln.

[Fortsetzung auf S. 3 des Umschlags.]



Sonderabdruck aus Archiv der Mathematik und Physik. III. Reihe. III.
Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Rezensionen.

Jacques Hadamard. La série de Taylor et son prolongement analytique. Paris C. Naud 1901. VIII und 100 S. 8⁰.

Das Prinzip der analytischen Fortsetzung einer Potenzreihe mit gegebenen Koeffizienten war durch Weierstraſs und Méray zwar vollkommen definiert und in seiner grundlegenden Bedeutung für die Funktionenlehre seither allgemein anerkannt worden; im Grunde genommen ist man aber Jahrzehnte lang über jene *Definition* selbst nicht hinausgekommen: es fehlte durchaus an analytischen Hülfsmitteln, um dieselbe für die weitere Ausbildung der allgemeinen Funktionenlehre ausreichend nutzbar zu machen. Herrn Hadamard gebührt das Verdienst, durch seine 1892 publizierte Abhandlung: *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*[1]) dem fraglichen Probleme in äuſserst erfolgreicher Weise näher getreten zu sein und zu weiteren Untersuchungen in dieser Richtung angeregt zu haben. Er hat sich neuerdings der dankenswerten Mühe unterzogen, die inzwischen mächtig angewachsene Litteratur über den fraglichen Gegenstand zu sichten und die bisher gewonnenen Ergebnisse samt den Methoden, welche zu ihnen geführt haben, in übersichtlicher und anschaulicher Weise zusammenzufassen. Bei dem allgemeinen und aktuellen Interesse, welche diese H.sche Schrift zweifellos beanspruchen darf, mag die folgende, von einigen kritischen Bemerkungen (in Form von Fuſsnoten) begleitete, gedrängte Darstellung ihres wesentlichen Inhalts manchem Leser dieser Zeitschrift vielleicht nicht unwillkommen erscheinen.

I.[2]) Von dem Begriffe der *holomorphen* (nach Cauchys Terminologie: *synektischen*), d. h. wohldefinierten und im komplexen Sinne differenzierbaren Funktion $f(x)$ ausgehend, gelangt Herr H. vermittelst der Cauchyschen Darstellung von $f(x)$ durch ein Randintegral zur Taylorschen Reihe und hiermit zum Begriffe der *analytischen* Funktion im Weierstraſsschen Sinne.[3])

---

1) Journ. de math. (4) 8 (1892), p. 101—186.

2) Die Nummern I bis X des Textes entsprechen den zehn Kapiteln des H.schen Buches.

3) Unter den *Singularitäten*, deren eine *analytische Funktion* fähig ist, führt Herr H. auf S. 9 auch solche an, welche *in einem Flächenstücke überall dicht* liegen („*distribuées dans des aires singulières*"). Diese Ausdrucksweise scheint mir nicht korrekt: zum mindesten widerspricht sie der im allgemeinen acceptierten Weierstraſschen Definition der *singulären* Stellen einer analytischen Funktion als *Grenz*stellen des Stetigkeitsbereichs (Math. Werke II, p. 78). *Singuläre Flächenstücke* können daher sehr wohl für einen *arithmetischen Ausdruck*, *nicht* aber für eine *analytische Funktion* vorhanden sein: hier erscheinen lediglich die *Grenz-*

II. Wird sodann eine Taylorsche Reihe $\mathfrak{P}(x \mid \alpha) = \sum a_m (x-\alpha)^m$ mit *endlichem Konvergenzkreise* C als *Funktionselement* zur Definition von $f(x)$ zu Grunde gelegt, so entsteht zunächst die Hauptfrage: Besitzt $f(x)$ überhaupt eine *analytische Fortsetzung* und, wenn dies der Fall ist, *wie* hat man eine Stelle β innerhalb C zu wählen, damit $\mathfrak{P}(x \mid \alpha, \beta)$ mit Sicherheit eine solche liefert? Da aber die Möglichkeit, mit Hülfe einer solchen *„abgeleiteten"* Reihe $\mathfrak{P}(x \mid \alpha, \beta)$ den Kreis C zu überschreiten, einzig und allein davon abhängt, ob $\mathfrak{P}(x \mid \alpha)$ in der Verlängerung der Linie $\overline{\alpha\beta}$ auf C eine *singuläre* Stelle besitzt, und andererseits die Berechnung und Diskussion von $f(x)$ mit Hülfe einer Reihe von der Form $\mathfrak{P}(x \mid \alpha, \beta)$, zumal bei weiterer Fortsetzung des fraglichen Verfahrens, auf unüberwindliche Komplikationen führt, so resultieren aus der obigen Frage sofort die folgenden zwei:

1) Wie bestimmt man aus dem Bildungsgesetze, genauer gesagt, aus gewissen *Grenzeigenschaften* der Koeffizienten a_m die auf C gelegenen und eventuell auch die sonstigen *singulären* Stellen von $f(x)$?

2) Welche analytischen Hülfsmittel stehen *aufser* dem angedeuteten *„Ableitungsprozesse"* zur Verfügung, um $f(x)$ *aufserhalb* C zu definieren bezw. zu berechnen?

Die Beantwortung der Frage 1), welche naturgemäfs derjenigen von 2) voranzugehen hat, bietet aufserordentliche Schwierigkeiten, wenn man bezüglich der Auswahl der a_m vollste Allgemeinheit walten läfst. Andererseits gewinnt man nur Resultate verhältnismäfsig speziellen Charakters, wenn man die a_m in der Weise einschränkt, dafs nur besondere, relativ einfache Singularitäten auf C zum Vorschein kommen. Ein befriedigender Mittelweg zwischen den verschiedenen, aus diesen beiden Gesichtspunkten entspringenden Methoden ist bisher noch nicht gefunden worden.

III. Die zur Beantwortung der Frage 1) zunächst erforderliche Feststellung des wahren Konvergenzradius R von $\sum a_m x^m$ liefert der bekannte Cauchysche Satz, wonach *allgemein*:

$$(1) \qquad R = \overline{\lim_{m=\infty}} \left| \sqrt[m]{a_m} \right|^{-1} \text{[1]}$$

und *speziell:*

$$(2) \qquad R = \lim_{m=\infty} \left| \frac{a_m}{a_{m+1}} \right|,$$

---

stellen als *singuläre*, während $f(x)$ *im Innern* überhaupt *nicht existiert.* Für den Ausdruck *„aire singulière"* wäre daher zweckmäfsiger die sonst übliche (auch von Herrn H. auf p. 5 als gleichbedeutend gebrauchte) Bezeichnung *„espace lacunaire"* zu substituieren.

1) Herr H. bedient sich zur Bezeichnung des *oberen Limes („limite supérieure pour m infini")* der von mir eingeführten Schreibweise: $\overline{\lim_{m=\infty}} u_m$. Wenn aber auf p. 16, Fufsnote 3) gesagt wird, dafs in anderen Untersuchungen $\overline{\lim}\, u_m$ dasjenige zu bedeuten habe, was wir als *obere Grenze* der u_m zu bezeichnen pflegen, so will mir dieser Usus äufserst unzweckmäfsig erscheinen. Ich denke, man sollte das *Zeichen lim* durchaus für einen wirklichen *Limes* = *Grenzwert*, *Häufungsstelle* reservieren und insbesondere alles vermeiden, was zu einer Konfusion der definitionsmäfsig streng geschiedenen (cf. Encyklopädie I, p. 72) Begriffe: *oberer Limes* und *obere Grenze* beitragen könnte.

falls dieser letzte Grenzwert *existiert*. Existiert überdies auch $\lim \frac{a_m}{a_{m+1}} = x_0$, so ist x_0 allemal eine *singuläre* Stelle (Fabry), aber *keineswegs* (wie ein älterer, von Herrn Lecornu falsch formulierter und unzulänglich bewiesener Satz besagt) die *einzige* auf C gelegene (Beispiel: $\mathfrak{P}(x) = \frac{x}{1-x} + \lg(1+x)$). Ebensowenig braucht, wenn x_0 die *einzige* singuläre Stelle von C ist, $\lim \frac{a_m}{a_{m+1}}$ zu existieren (Satz von Hadamard: Kap. VII, 2).

Ein zweiter Fall, in welchem die Koeffizienten a_m unmittelbar die Existenz einer bestimmten singulären Stelle, nämlich $x = R$, erkennen lassen, ergiebt sich, wenn die a_m zum mindesten für $m \geqq m_0$ durchweg *reell* und $\geqq 0$ sind.[1])

Zur Aufstellung eines *allgemeinen* Kriteriums dafür, ob eine bestimmte, auf C gelegene Stelle x_0 für $f(x) = \mathfrak{P}(x)$ eine *reguläre* bezw. *singuläre* sei — wobei ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit allemal $R = 1$ und zunächst auch $x_0 = 1$ angenommen werden kann — dient sodann die Bemerkung, dafs das eine oder andere der Fall ist, je nachdem bei positivem $\beta < 1$ der Konvergenzradius von $\mathfrak{P}(x \mid \beta)$, d. h. $\overline{\lim} \left| \sqrt[m]{\frac{1}{m!} f^{(m)}(\beta)} \right|^{-1} > (1-\beta)$ bezw. $= (1-\beta)$ ausfällt. Die hieraus für die *unendliche* Reihe

$$(3) \qquad \left| \frac{1}{m!} f^{(m)}(\beta) \right| = \left| \sum_m^\infty {}_\nu (\nu)_m \cdot \alpha_\nu \beta^{\nu - m} \right| \text{[2])}$$

entspringende, schwer diskutable Bedingung läfst sich durch Ausscheidung der für den fraglichen Grenzwert als unwesentlich sich erweisenden Terme in die entsprechende für:

$$(4) \qquad \left| \sum_m^{m+p} {}_\nu (\nu)_m \cdot \alpha_\nu \beta^{\nu - m} \right| \quad \text{(wo } p \text{ endlich)}$$

transformieren und für die eventuelle Feststellung des *singulären* Charakters von $x = 1$ bezw. (mit Hülfe der Substitution von $\beta \cdot e^{\omega i}$ für β) von $x = e^{\omega i}$ verwerten (Hadamard). Eine weitere Vereinfachung des fraglichen Ausdruckes gewinnt Herr Fabry durch Aufsuchung des *Maximal*-Terms $(\nu)_m \cdot \beta^{\nu - m}$ und Division mit diesem letzteren. Indem er sodann zunächst die Frage in den Vordergrund stellt: „Wann ist der Punkt $x = 1$ ein *regulärer*?" gelangt er durch Benutzung des Umstandes, dafs ein *regulärer* Punkt auf C *niemals isoliert* auftreten kann, sondern stets die Existenz eines aus *lauter regulären* Punkten bestehenden *C-Bogens* erfordert, zu einem allgemeinen

---

1) Die hierauf bezügliche Zitatnummer (84) auf p. 20 wäre richtiger durch (26) zu ersetzen: in (84) wird lediglich der von mir in (26) bewiesene, übrigens zuerst wohl von Herrn Vivanti in (27) ohne Beweis benützte Satz auf Funktionen zweier Variablen übertragen.

2) $(\nu)_m$ bedeutet den von Herrn H. mit C_ν^m bezeichneten Binomial-Koeffizienten: $\frac{\nu \cdot (\nu - 1) \cdots (\nu - m + 1)}{1 \cdot 2 \cdots m}$.

Theorem, welches dann in zahlreichen Fällen erkennen läſst, ob der Punkt $x=1$ bezw. auch $x = e^{\omega i}$ ein *singulärer* ist. Die Existenz solcher *regulärer Bögen* erweist andererseits Herr Leau, indem er vermittelst des Ausdruckes (3) von der Regularität einer unbegrenzten Folge von Potenzreihen auf diejenige einer in bestimmter Weise daraus zusammengesetzten Potenzreihe schlieſst, und gewinnt auf diese Weise auſser verschiedenen, schon von Herrn H. auf anderem Wege (s. VII) bewiesenen Sätzen das bemerkenswerte Resultat, daſs Potenzreihen von der Form $\sum \varphi\left(\frac{1}{m}\right) \cdot x^m$, $\sum g(m) \cdot x^m$ (wo $\varphi(t)$ regulär für $t = 0$, $g(t)$ eine *ganze*, bezüglich ihres Unendlichwerdens für $|t| = \infty$ an gewisse Beschränkungen geknüpfte Funktion) auf dem Einheitskreis *ausschlieſslich* die singuläre Stelle 1 besitzen.

Ein vorteilhafteres Kriterium zur Beurteilung des regulären bezw. singulären Verhaltens von $\mathfrak{P}(x)_{x=1}$, als das aus (3) resultierende, nämlich ein solches, das von vornherein nur eine *endliche* Anzahl von a_m enthält, ergiebt sich durch geeignete Substitution einer neuen Veränderlichen für x, insbesondere mit Hülfe der bekannten Eulerschen Transformation[1]): $x = \frac{\alpha z}{1+z}$ (Fabry, E. Lindelöf). Diese Methode gestattet, einen groſsen Teil der zuvor erwähnten Resultate merklich einfacher abzuleiten und in mehrfacher Hinsicht zu erweitern.

IV. Auf die Existenz von Potenzreihen, für welche *jede* Stelle des Konvergenzkreises eine *singuläre* ist, und die somit überhaupt keine analytische Fortsetzung besitzen, wurde man *zuerst*[2]) aufmerksam durch das Verhalten gewisser Modulfunktionen und sodann durch den von Weierstraſs

---

1) Ich selbst habe in einer vom November 1897 datierten Arbeit (Math. Ann. **50** [1898], p. 458) zuerst auf den Nutzen dieser Transformation für die Theorie der analytischen Fortsetzung aufmerksam gemacht und dieselbe a. a. O. für ein spezielles Problem der vorliegenden Art verwertet. An dem Abschlusse der dort ausdrücklich angekündigten, bereits vor längerer Zeit begonnenen allgemeineren Untersuchungen wurde ich leider damals durch meine Mitarbeit an der Encyklopädie der Math. Wiss. verhindert: im Jahre 1898 erschienen dann bereits die vollkommen gleiche Ziele verfolgenden Arbeiten der Herren Fabry und Lindelöf, welche völlig unabhängig von mir, und, wie es scheint, auch von einander, auf die Benutzung des nämlichen Grundgedankens verfallen waren.

2) Dieser, wie mir scheint, von Herrn H. nicht genügend hervorgehobene (vielmehr durch die *gleichzeitige* Erwähnung der viel neueren *„fonctions fuchsiennes"* einigermaſsen verdunkelte) Thatbestand erscheint mir *darum* von besonderem Interesse, weil er ein überaus lehrreiches Beispiel dafür bietet, wie gewisse einfache, ja so zu sagen selbstverständliche mathematische Wahrheiten zuweilen auf äusserst komplizierten Umwegen entdeckt worden sind. Auch halte ich es nicht für ganz korrekt, wenn Herr H. jenen Modulfunktionen die Reihe $\sum a^m \cdot x^{b^m}$ als *erstes* Beispiel gegenüberstellt, an welchem die Nicht-Fortsetzbarkeit *direkt* aus den Eigenschaften der *Potenzreihe* erkannt worden sei. Auch hier beruhte diese Erkenntnis auf einem zunächst ganz andere und zwar wesentlich *schwierigere* Ziele verfolgenden Umwege, dem Nachweise *der totalen Nicht-Differenzierbarkeit* der *trigonometrischen* Reihe $\sum a^m \cos(b^m t)$ (Weierstraſs, Math. Werke II, p. 222 = Berl. Berichte 1880, p. 741), während das für die Erledigung der *vorliegenden* Frage ausreichende und typische Verhalten der *Potenz*reihe $\sum a^m x^{b^m}$, wonach gleichzeitig mit $x=1$ auch alle Einheitswurzeln der Form $x^{b^m}=1$ $(m=1,2,3,\ldots)$

bemerkten Umstand, dafs der reelle Theil von $\sum a^m x^{b^m}$ für $x = e^{ti}$ bei geeigneter Einschränkung von a, b nirgends nach t differenzierbar ist. Die im Anschlusse hieran von verschiedenen Autoren aufgefundenen allgemeineren Typen nicht-differenzierbarer trigonometrischer Reihen (Darboux, Cellérier, Lerch[1]), sowie von Potenzreihen, deren Absolutwerte in der Nähe jeder Stelle von C unbegrenzt wachsen (Lerch), liefern analog geartete Beispiele, denen andererseits solche gegenüberstehen, die, wie $\sum a^m x^{m^2}$ ($|a| < 1$: Fredholm), auf C durchweg noch Derivirte jeder Ordnung besitzen. Sind hiermit gewissermafsen die beiden äufsersten Möglichkeiten des fraglichen Verhaltens bezeichnet, so zeigt eine genauere Überlegung, dafs die *Nicht-Fortsetzbarkeit* geradezu als *Regel*, die *Fortsetzbarkeit* als *spezieller Fall* anzusehen ist (Pringsheim[2]), Borel, Fabry). Als ein allgemeines Kriterium für die Nicht-Fortsetzbarkeit der Reihe $\sum a_m x^{c_m}$ findet Herr Fabry die Bedingung $\lim\limits_{m=\infty} (c_{m+1} - c_m) = \infty$, nachdem zuvor schon Herr Hadamard die engere Bedingung: $\lim\limits_{m=\infty} \dfrac{c_{m+1} - c_m}{c_m} > 0$ angegeben und Herr Borel diese letztere zu der folgenden erweitert hatte: $\lim\limits_{m=\infty} \dfrac{c_{m+1} - c_m}{\sqrt{c_m}} > 0$. Es

---

singuläre Stellen sein müssen, erst später bemerkt wurde. Eine entsprechend modifizierte, analoge Eigenschaft ist ja schliefslich auch für die von Weierstrafs zunächst mit Hülfe der *Transformationstheorie* (Werke II, p. 226) als nicht-fortsetzbar erkannte Modulfunktion $\vartheta_3(0 \mid q) = 1 + 2\sum_1^\infty {}_m q^{m^2}$ ganz *direkt* nachweisbar (cf. Méray, Bullet. des sc. math. (2) **12** [1888], p. 248).

1) Hier fehlt der Name Dini, dessen wichtige (die wesentlichen, viel später von Herrn Lerch angegebenen Typen schon enthaltende) Arbeit: *Su alcune funzioni che in tutto un intervallo non hanno mai derivata* (Ann. di matem. (2) 8 [1877], p. 121; vergl. auch: Fondamenti [1878], § 119—129) im Litteraturnachweise hinter (**18**) zu zitieren gewesen wäre. Auch sollte wohl die unter Nr. (**57**) zitierte Arbeit hinter (**26**) eingeschoben werden.

2) Der eigentliche Grundgedanke meines Beweises für den fraglichen Satz scheint mir nicht ganz exakt wiedergegeben zu sein. Da ich die nämliche, nicht ganz zutreffende Darstellung auch bei Herrn Borel (*Mém. sur les séries divergentes*, 1899, p. 59) gefunden habe, so sei es mir gestattet, etwas näher hierauf einzugehen. Nach Herrn H. und B. soll mein Beweis etwa folgendermafsen lauten: Ist $f(x) = \sum a_m x^m$ willkürlich vorgelegt, so kann man allemal setzen: $f(x) = \varphi(x) + (f(x) - \varphi(x))$, wo $\varphi(x)$ *irgend eine nicht-fortsetzbare* Potenzreihe bedeutet. Soll also $f(x)$ *fortsetzbar* sein, so müssen die Singularitäten von $\varphi(x)$ und $(f(x) - \varphi(x))$ sich in hinreichendem Mafse kompensieren, was nicht zu erwarten steht, wenn $f(x)$ wirklich willkürlich gedacht wird. — In Wahrheit schliefse ich aber, wie mir scheint, weit prägnanter folgendermafsen: Man kann auf unendlich viele Arten aus $f(x) = \sum a_m x^m$ eine *nicht-fortsetzbare* Reihe $\varphi(x) = \sum a_{p_m} \cdot x^{p_m}$ *herausheben*; ist dann $\psi(x) = \sum a_{q_m} \cdot x^{q_m}$ die Reihe der *übrigbleibenden* Terme, so kann $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ offenbar nur fortsetzbar sein, wenn die a_{p_m}, a_{q_m} *so ineinander greifen*, dafs die Singularitäten von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ sich hinlänglich kompensieren, was doch offenbar nur möglich ist, wenn zwischen den a_{p_m}, a_{q_m}, also schliefslich für die Gesamtheit der a_m *sehr spezielle Relationen* bestehen.

giebt aber auch sehr allgemeine Typen nicht-fortsetzbarer Reihen von der Form $\sum \varphi(m) \cdot x^m$, wo die $\varphi(m)$ durchweg *von Null verschieden* und $\varphi(t)$ eine *analytische* Funktion von t ist.[1])

V. Besitzt $f(x) = \sum a_m x^m$ auf C einen *einzigen, einfachen Pol* α, so ist allemal[2]):

$$(5) \qquad \lim_{m=\infty} \frac{a_m}{a_{m+1}} = \alpha \quad \left(\text{also: } \lim_{m=\infty} \left|\sqrt[m]{a_m}\right| = \frac{1}{|\alpha|}\right).$$

Der Satz ist *umkehrbar,* wenn der Grenzwert (5) so zustande kommt, dafs $|a_{m+1} - a_m| < \lambda^m$, wo $\lambda < 0$. Besitzt $f(x)$ innerhalb einer gewissen Umgebung von $x = 0$ nur die $(p+1)$ *einfachen Pole* $\alpha_1, \cdots, \alpha_{p+1}$, wo durchweg $|\alpha_\nu| \leqq |\alpha_{\nu+1}|$ und eventuell auch mehrere α_ν zu je einem mehrfachen Pole zusammenfallen dürfen, so tritt an die Stelle der Relation (5) die folgende:

$$(6) \qquad \overline{\lim_{m=\infty}} \left|\sqrt[m]{D_{m,\,p}}\right| = |\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_{p+1}|^{-1},$$

wo $D_{m,\,p}$ eine aus $a_m, a_{m+1}, \cdots, a_{m+2p}$ zusammengesetzte symmetrische Determinante bedeutet; dabei kann noch $\overline{\lim}$ durch lim ersetzt werden, wenn durchweg $|\alpha_\nu| < |\alpha_{\nu+1}|$.

Auch dieses Resultat ist unter geeigneten Einschränkungen umkehrbar und kann alsdann zur Charakterisierung der *auf* C und, sofern sich in der Umgebung von C überhaupt nur *polare* Unstetigkeiten finden, auch der *aufserhalb* C gelegenen Pole dienen.

Der Fall, dafs $f(x)$ auf C auch andere als polare Unstetigkeiten besitzt, kann nach einer im Prinzipe von Darboux herrührenden Methode behandelt werden, bei welcher der *Index* der niedrigsten, unendlich werdenden Derivierten und die Art ihres Unendlichwerdens den Ausschlag giebt. Um in dieser Richtung möglichst allgemeine Resultate zu erhalten, erweist es sich als zweckmäfsig, die Liouville-Riemannschen *Derivierten mit beliebigem reellen Index* α: $D_x^\alpha f(x)$ und zugleich eine mit $\mathfrak{D}_x^\alpha f(x)$ bezeichnete *Modifikation* derselben einzuführen. Beide Operationen werden zunächst

---

1) Übrigens kann man die Existenz derartiger Reihen sehr leicht in folgender Weise erkennen. Bedeutet $\sum a_m x^m$ irgend eine *fortsetzbare* Reihe mit durchweg von Null verschiedenen Koeffizienten, so wähle man irgend eine *nicht-fortsetzbare* Reihe vom Typus $\sum b_{p_m} \cdot x^{p_m}$, wo die b_{p_m} lediglich der Beschränkung unterliegen: $|a_{p_m} + b_{p_m}| > 0$ (z. B. $b_{p_m} = -2a_{p_m}$). Bestimmt man alsdann eine analytische Funktion $\varphi(t)$ derart, dafs:

$$\varphi(p_m) = a_{p_m} + b_{p_m}, \text{ im übrigen } \varphi(m) = a_m, \text{ wenn } m \neq p_m,$$

so ist offenbar $\sum \varphi(m) \cdot x^m$ eine Reihe von der verlangten Art.

2) Gilt auch für den Fall eines n-fachen Poles.

durch gewisse *bestimmte Integrale* bezw. deren Differentialquotienten nach x definiert und stehen sodann zu $f(x) = \sum_1^\infty {}^m a_m x_m$ in der Beziehung:

$$(7) \qquad D_x^\alpha f(x) = \sum_1^\infty {}^m \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\alpha)} a_m x^{m-\alpha}, \quad \mathfrak{D}_x^\alpha f(x) = \sum_1^\infty {}^m m^\alpha \cdot a_m x^m.$$

Ferner wird als *Ordnung* von $f(x)$ auf C bezw. dem C-Bogen $\widehat{\vartheta_0 \vartheta_1}$ die *obere Grenze* ω der Zahlen α eingeführt, für welche $D_x^{-\alpha} f(x)$ endlich, stetig und *limitiert*[1]) ist: die letztere Forderung soll besagen, daſs für jedes m:

$$(8) \qquad \left| m \cdot \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} {}^{\cos}_{\sin} (m\vartheta) \cdot f(e^{\vartheta i}) \cdot d\vartheta \right| < J \qquad (J \text{ endlich}; \ 0 \leq \vartheta_0 < \vartheta \leq \vartheta_1 \leq 2\pi).$$

Zwischen der (auf den *ganzen* Kreis C bezüglichen) *Ordnungszahl* ω und dem Koeffizienten a_m besteht alsdann die merkwürdige Relation:

$$(9) \qquad \omega = 1 + \overline{\lim_{m=\infty}} \frac{\lg |a_m|}{\lg m},$$

welche aussagt, daſs der Konvergenz- bezw. Divergenz-Charakter von $\sum |a_m|$ mit demjenigen von $\sum m^{\omega-1}$ übereinstimmt.

Definiert man schlieſslich noch als *Ordnung* von $f(x)$ in einem einzelnen *C-Punkte* x_0 die Ordnung für einen unendlich kleinen, den Punkt x_0 umfassenden Bogen, so stimmt dieselbe mit dem *gewöhnlichen* Begriffe der *Ordnungszahl* überein, wenn $f(x)$ für $x = x_0$ so wie $(x - x_0)^{-\omega} \varphi(x)$ unendlich wird (wo $\varphi(x_0)$ *endlich* und von Null verschieden ist oder höchstens *logarithmisch* unendlich wird bezw. verschwindet). Auch ist dann umgekehrt die Gesamt-Ordnungszahl auf C nichts anderes als die Maximal-Ordnung aller auf C befindlichen singulären Stellen. Diese Bemerkung kann dazu dienen, um $f(x)$ für jede *reguläre* Stelle von C als Grenzwert eines gewissen Polynoms (also auch durch eine nach Polynomen fortschreitende Reihe) darzustellen, falls $\omega < \infty$ ist, sowie auch einen Grenzausdruck in den a_m zur Berechnung der Singularitäten α von der *höchsten* vorkommenden Ordnung λ anzugeben, falls $f(x)$ in der Umgebung von α die Form besitzt: $(x-\alpha)^\lambda \cdot (\lg(x-\alpha))^\mu \cdot \mathfrak{P}(x-\alpha)$ (wo: $\mu \gtrless 0$). Der Fall, daſs $f(x)$ auf C eine *einzige* und zwar *wesentliche* Singularität α besitzt, kann mit Hülfe der Eulerschen Transformation behandelt werden, wenn α *isoliert* ist (Le Roy)[2]), allgemeiner mit Hülfe eines von Herrn

---

1) Mit diesem Ausdrucke will ich Herrn H.s Bezeichnung „*à écart fini*" wiedergeben. Eine einigermaſsen wörtlichere Übersetzung, wie etwa „*mit beschränkter Schwankung*" erweist sich als unzweckmäſsig, da dieser letztere Ausdruck bereits eine bestimmte und zwar etwas *engere* Bedeutung gewonnen hat (cf. Encyklopädie II, p. 40). Jede Funktion *mit beschränkter Schwankung* ist zwar auch „*à écart fini*", das *Umgekehrte* scheint aber zum mindesten *nicht nachgewiesen.*

2) Die übrigen Untersuchungen dieses Kapitels stammen durchweg von Herrn Hadamard.

Appell herrührenden Satzes, auch wenn α eine *Häufungsstelle* von außerhalb C gelegenen Singularitäten ist.

VI. Auf die vorstehenden, *der Bestimmung der singulären Stellen* gewidmeten Untersuchungen folgen nun solche über die Herstellung der *analytischen Fortsetzung*, und zwar zunächst anknüpfend an den Frobeniusschen Satz:

$$(10) \qquad f(1) \equiv \lim_{x=1} \sum_0^\infty {}^m a_m x^m = \lim_{n=\infty} \sum_0^n {}^m \frac{S_m}{m+1} \qquad (s_m = a_0 + \cdots + a_m)$$

und die durch Iteration sich ergebenden analogen Sätze von Hoelder, als erste Beispiele für die legitime Verwertung einer *divergenten* Reihe zur Berechnung von $f(x)$. Eine direkte Verallgemeinerung der betreffenden Grenzprozesse bietet Borels *„limite généralisée"*:

$$(11) \qquad f(x) = \lim_{\alpha=\infty} \frac{1}{\varphi(\alpha)} \cdot \sum_0^\infty {}^m C_m \alpha^m \cdot S_m(x), \qquad (s_m(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m)$$

wo α reell und positiv, $\varphi(\alpha) = \sum_0^\infty {}^m C_m \alpha^m$ eine *ganze* Funktion (gewöhnlich $\varphi(\alpha) = e^\alpha$) und die hierauf gegründete Theorie der *„summierbaren divergenten Reihen"*. Eine andere Methode (Stieltjes, Padé) besteht in der Umformung von $\mathfrak{P}(x)$ in einen *Kettenbruch* oder ein *bestimmtes Integral* (Stieltjes). Als weittragendste Methode erweist sich aber die Transformation von $\mathfrak{P}(x)$ in eine nach *Polynomen* fortschreitende Reihe. Ein für reelle stetige Funktionen von Weierstraſs bewiesenes Theorem gestattet nämlich die folgende Verallgemeinerung: „Jedes in einem beliebig gestalteten Bereiche holomorphe $f(x)$ läſst sich daselbst durch eine Reihe von *Polynomen* (Appell, Hilbert, Painlevé) oder auch von *rationalen Funktionen* (Runge) darstellen." Die wirkliche Herstellung solcher Polynomentwickelungen unter der Voraussetzung, daſs $f(x)$ lediglich durch ein Funktionselement $\sum a_m x^m$ $\left(\text{bezw.} \sum a_m (x - x_0)^m\right)$ definiert ist, wird sodann durch ein Fundamental-Theorem von Mittag-Leffler geliefert, nämlich:

$$(12) \qquad f(x) = \sum_0^\infty {}^\nu \sum_0^{m\nu} {}^\mu \gamma_\mu^{(\nu)} \cdot a_\mu x^\mu,$$

wobei als Geltungsbereich ein sogenannter *Stern* erscheint, d. h. das gesamte Ebenengebiet, welches nach Ausscheidung geradliniger[1]), von allen singulären Punkten α in der Richtung $\overline{0\alpha}$ nach ∞ gezogener Schnitte L_α übrig bleibt; die $\gamma_\mu^{(\nu)}$ sind numerische, von den a_μ unabhängige Konstanten, welche auch *a priori* gewählt werden können.

Den zunächst ziemlich komplizierten Mittag-Lefflerschen Beweis haben (zum Teil ohne nähere Kenntnis desselben) die Herren Painlevé,

1) Allgemeiner kann man für die L_α auch irgendwelche andere von den α ins Unendliche sich erstreckende Kurven substituieren, deren Punkte aus denjenigen einer von der Stelle 1 aus ins Unendliche gezogenen Musterkurve (ohne Doppelpunkt) durch Multiplikation mit α entstehen (Leau).

Leau und Borel wesentlich vereinfacht. Letzterer geht von der Bemerkung aus, daſs auf Grund der Cauchyschen Relationen:

$$(13) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathfrak{C})} \frac{f(z)\cdot dz}{z-x}, \quad a_m = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathfrak{C})} \frac{f(z)\cdot dz}{z^{m+1}}$$

die Aufstellung der Entwickelung (12) lediglich von der entsprechenden für $\frac{1}{1-x}$ abhängt. Hat man nämlich eine solche gefunden, etwa:

$$(14) \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu \gamma_\mu^{(\nu)} \cdot x^\mu \qquad (\text{exkl. } 1 \leq x \leq +\infty)$$

(was auf unendlich viele Arten, z. B. mit Hilfe der oben erwähnten Sätze von Runge, Painlevé und Hilbert erzielt werden kann), so folgt:

$$(15) \qquad \frac{1}{z-x} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{z}} = \sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu \gamma_\mu^{(\nu)} \frac{x^\mu}{z^{\mu+1}} \qquad \left(\text{exkl. } 1 \leq \frac{x}{z} \leq +\infty\right)^{1)},$$

woraus dann durch Multiplikation mit $f(z)\cdot dz$ und Integration über irgend eine die Stelle x umschlieſsende, aber keinen der Strahlen L_α schneidende Kurve $\mathfrak{C}$ mit Berücksichtigung von (13) unmittelbar die Formel (12) hervorgeht.

Obschon das fragliche Theorem für die *Berechnung* der *singulären Punkte* zunächst keinen Anhalt bietet, so liefert dasselbe, zumal im Anschluſs an die (miteinander sehr verwandten) Beweismethoden von Mittag-Leffler und Leau immerhin geeignete Hilfsmittel, um die früher erwähnten Methoden zur Auffindung von *auſserhalb C* gelegenen Singularitäten merklich zu erweitern.[2] So ergiebt sich z B. auf diesem Wege, daſs die in (III) erwähnten Reihen: $\sum \varphi\left(\frac{1}{m}\right)\cdot x^m, \sum g(m)\cdot x^m$ $\left(\text{auſserdem auch: } \sum \lg\varphi\left(\frac{1}{m}\right)\cdot x^m\right)$ im Endlichen[3] *überhaupt* nur die singuläre Stelle $x = 1$ besitzen (Leau).

VII. Nicht selten lassen sich Eigenschaften einer Potenzreihe $f(x) = \sum a_m x^m$ aus denjenigen einer anderen, dazu in irgendwelcher Beziehung stehenden: $\varphi(x) = \sum a'_m x^m$ ableiten — *vice versa*; z. B. wenn gesetzt wird: $\varphi(x) = f'(x)$, $x^\alpha D_x^\alpha f(x)$, $\mathfrak{D}_x^\alpha f(x)$. Durch Verallgemeinerung der zur Defi-

---

1) D. h. wenn die Linie $\overline{0x}$ den geometrischen Ort der z-Punkte (also schlieſslich die Kurve $\mathfrak{C}$) nicht schneidet.

2) Ein an das obige Theorem direkt anschlieſsendes Kriterium zur Feststellung der auf irgend einem Strahle $(0, \infty)$ dem Nullpunkte nächstgelegenen Singularität hat neuerdings Herr Mittag-Leffler angegeben: C. R. **133** (12. August 1901), p. 357.

3) Bei Herrn H., p. 63, heiſst es, in diesem Zusammenhange wohl nicht ganz korrekt: *„dans tout le plan"*. Übrigens wäre hier auch noch bezüglich der etwa vorhandenen *verschiedenen Zweige* von $f(x)$ eine der Fuſsnote 1) auf p. 69 analoge Bemerkung zu machen. Beispiel: $\sum_1^\infty{}_m \frac{x^m}{m^2} = \frac{1}{x}\lg\frac{1}{1-x}$ für $x = 0$.

nition der letzteren Symbole dienlichen Integrale gelangt Herr H. zu der Festsetzung:

$$(16)\quad \varphi(x) = \int_0^1 V(t)\cdot f(tx)\cdot dt, \quad \text{d. h. schließlich} = \sum_0^\infty {}_m \left(\int_0^1 V(t)\cdot t^m \cdot dt\right) a_m x^m$$

und sodann zu dem folgenden Satze: „$\varphi(x)$ besitzt in der ganzen Ebene *höchstens*[1]) die Singularitäten von $f(x)$", — der u. a. auch wiederum die in (III) und (VI) erwähnten Leauschen Resultate und andere ähnlich geartete liefert (Le Roy).

Das von Poincaré für die Theorie der *ganzen* Funktionen mit Erfolg verwendete Integral:

$$(17)\qquad \int_0^\infty e^{-t}\cdot F(tx)\cdot dt \quad (F(x) \text{ eine ganze Funktion})$$

stellt, soweit es konvergiert, eine analytische Funktion von x dar und liefert für die spezielle Wahl

$$(18)\qquad F(x) = \sum_0^\infty {}_m \frac{1}{m!} a_m x^m$$

$\left(\text{wegen: } \int_0^\infty t^m e^{-t}\cdot dt = m!\right)$ die Beziehung:

$$(19)\qquad f(x) = \int_0^\infty e^{-t}\cdot F(tx)\cdot dt \quad \left(\text{wo: } f(x) = \sum_0^\infty {}_m a_m x^m\right),$$

d. h. $f(x)$ ist mit Hülfe der *„assoziierten"* Funktion $F(x)$ durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt (Borel), welches übrigens nur eine andere Form des Grenzausdrucks (11) zur *„Summierung der divergenten Reihe* $\sum a_m x^m$*"* darstellt[2]) und im allgemeinen einen über C hinausreichenden polygonalen Konvergenzbezirk P besitzt: jenes Integral giebt dann in P die analytische Fortsetzung von $f(x)$ und liefert auch gewisse Kriterien zur Berechnung singulärer Stellen. Andere Integraldarstellungen dieser Art sind von Borel, Servant, Desaint für analoge Zwecke verwertet worden, den allgemeinsten Typus: $\int F(t)\cdot \Phi(x,t)\cdot dt$ hat Herr Pincherle ausführlich untersucht.

Auf Integraldarstellungen von Potenzreihen beruhen auch die ersten Beweise der folgenden beiden Sätze:

„Ist

$$f(x) = \sum a_m x^m, \qquad F(x) = \sum b_m x^m, \qquad \varphi(x) = \sum a_m b_m x^m,$$

und bezeichnet man mit α_λ, β_μ die singulären Stellen von $f(x)$, $F(x)$, so hat $\varphi(x)$ *höchstens* die singulären Stellen $\alpha_\lambda\beta_\mu$ (Hadamard). Die Natur

1) Auch hier gilt das am Schlusse der vorigen Fußnote Gesagte.

2) Dies hätte vielleicht p. 67 ausdrücklich hervorgehoben werden sollen. Vergl. im übrigen: Borel, Journ. de math. (5) **2** (1896), p. 109. Ann. de l'École norm. (3) **16** (1899), p. 55.

dieser Singularitäten $\alpha_\lambda \beta_\mu$ (einschliefslich des Verschwindens einer solchen Singularität) hängt in bestimmter Weise von derjenigen der α_λ, β_μ ab" (Borel).

„Ist

$$f(x) = \sum \frac{a_m}{x^{m+1}},\ F(x) = \sum \frac{b_m}{x^{m+1}},\ \varphi(x) = \sum \frac{a_0 b_m + (m_1) \cdot a_0 b_{m-1} + \cdots + a_m b_0}{x^{m+1}},$$

und bezeichnet man mit α_λ, β_μ die singulären Stellen von $f(x)$, $F(x)$, so hat $\varphi(x)$ *höchstens* die singulären Stellen $\alpha_\lambda + \beta_\mu$" (Hurwitz, Pincherle, Dell' Agnola).

Durch wiederholte Anwendung des ersten dieser beiden Sätze ergiebt sich ein entsprechender Satz für Reihen von der Form $\sum a_m^{p} \cdot x^m$ und sodann für $\sum P(a_m) \cdot x^m$, wo P ein Polynom p^{ten} Grades. Mit Hilfe des Grenzüberganges $p = \infty$ gelangte dann Herr Leau noch zu gewissen Erweiterungen der in (III) und (VI) erwähnten Resultate.

VIII. Faſst man die Umformungen, welche bisher zur Untersuchung von $f(x) = \sum a_m x^m$ angewendet wurden (Substitution einer neuen Veränderlichen, Derivation mit beliebigem Index, Einführung von Integrationsprozessen) in das Schema zusammen:

$$\varphi(x) = A(f(x)), \tag{20}$$

wo A eine der angeführten Operationen bedeutet, so genügen diese letzteren durchweg dem *„distributiven"* Gesetze:

$$A(f_1(x) + f_2(x)) = A(f_1(x)) + A(f_2(x)) \tag{21}$$

und können darnach als spezielle Fälle der durch diese Funktionalgleichung charakterisierten allgemeinen Klasse von Operationen aufgefaſst werden, welche von Pincherle als *distributive Operationen*, von Bourlet als *additive* (bei H. *lineare*) *Transmutationen* bezeichnet und ausführlich studiert worden sind.[1]) Herr Pincherle gelangte auf diesem Wege u. a. zu sehr einfachen Beweisen der am Schlusse von (VII) angeführten Sätze von Hadamard und Hurwitz (letztere mit Aufhebung der von Herrn Hurwitz ursprünglich gemachten Einschränkung, daſs die α_λ, β_μ lauter einfache Pole sein sollten).[2])

Es werde nun ferner mit A^{-1} die zu A *inverse* Operation bezeichnet und angenommen, daſs dieselbe ein eindeutiges Resultat giebt, also:

$$A^{-1}(\varphi(x)) = f(x). \tag{22}$$

Denkt man sich in Gleichung (20) für f alle Funktionen eines gewissen Funktionsbereiches[3]) S eingesetzt (z. B. alle Potenzreihen $\sum a_m x^m$,

1) Dabei ist *hier* immer von „analytischen" Transmutationen die Rede, d. h. solchen, bei denen $A(fx)$, soweit dieser Ausdruck überhaupt einen Sinn hat, allemal eine *analytische* Funktion vorstellt.

2) Eine elementare Darstellung dieser Beweise findet man bei G. Vivanti, *Teoria delle funzioni analitiche* (Milano, 1901), p. 350, 360.

3) Für die genauere Grundlegung der auf p. 75 von Herrn H. eingeführten Begriffe *„espace fonctionnel"* und *„champs fonctionnel"* wäre wohl noch auf Pincherle, *Sul concetto di piano in uno spazio ad infinite dimensioni* (Rend. Accad. Bologn., 30. Jan. 1898) hinzuweisen gewesen.

deren Konvergenzradius eine gewisse Zahl R übersteigt), so entspricht ein gewisser Bereich S' von Funktionen φ. Ist dann S' ganz in S enthalten und kleiner als S, so besitzt für solche φ, welche dem Bereich $(S - S')$ angehören, die Gleichung (20) *keine* dem Bereiche S angehörige Lösung f. Diese (von Herrn Pincherle als Degenereszenz der betreffenden Transmutation bezeichnete) Eventualität gestattet dann in dem als Beispiel angeführten Falle den folgenden Schlufs: die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dafs φ dem Bereiche S' angehört, sind auch notwendig und hinreichend dafür, dafs f einen Konvergenzradius $> R$ besitzt. Substituiert man also in (22) solche φ, welche *nicht* dem Bereiche S' angehören, so können auch nur solche f zum Vorschein kommen, welche *nicht* dem Bereiche S angehören, d. h. Potenzreihen, deren Konvergenzradius $\leqq R$; und es lassen sich unter Umständen über diese letzteren noch speziellere Aussagen machen, falls man die φ gerade dem Bereiche $(S - S')$ entnimmt. Durch geeignete Spezialisierung der Operation A läfst sich z. B. aus der Gesamtheit der für $|x| > R$ konvergierenden Potenzreihen das vollständige System derjenigen konstruieren, welche auf dem Kreise $|x| = R$ bestimmten Singularitätencharakter besitzen.

IX. Ist $\overline{\lim}\left|\sqrt[m]{a_m}\right| = \infty$, so *divergiert* $\sum a_m x^m$ für jedes von Null verschiedene x, definiert also zunächst überhaupt keine bestimmte Funktion. Die Frage, wie man eine solche Reihe nichtsdestoweniger für die *Definition* einer analytischen Funktion verwerten kann, gewinnt lediglich dadurch eine Bedeutung, dafs Reihen dieser Art durch rein formale Entwickelung wohl definierter arithmetischer Ausdrücke (z. B. bestimmter Integrale) zum Vorschein kommen oder, ebenfalls rein formal, gewissen Differentialgleichungen genüge leisten. Der letztere Umstand führt zunächst zur Ersetzung der divergenten Potenzreihe durch einen konvergenten Kettenbruch[1]) (Laguerre; vergl. auch (VI): Padé). Das analoge Verfahren hat Stieltjes auf Reihen der Form $\sum (-1)^m C_m \cdot x^{-m}$ (C_m reell und positiv) angewendet und neben der Kettenbruchdarstellung eine solche von der Form $\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{x+u}$ angegeben, wo $\psi(u)$ durch das unendliche Gleichungssystem: $\int_0^\infty u^m \cdot \psi(u) \cdot du = C_m$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ definiert ist. Herr Borel hat das fragliche Problem dahin formuliert, $f(x)$ so zu bestimmen, dafs $\lim_{x=0} f(x) = a_0$, $\lim_{x=0} f^{(m)}(x) = m!\, a_m$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, sofern x auf einen gewissen Winkel mit dem Scheitel O beschränkt wird. Durch seine Methode der Summation divergenter Reihen findet er *eine* Lösung in der Form (cf. Gleichung (19)): $f_1(x) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot F(tx)\, dt$, wenn wiederum $F(x) = \sum \frac{1}{m!} a_m x^m$ die zu $\sum a_m x^m$ assoziierte Funktion bedeutet; es giebt dann aber noch unendlich viele andere Lösungen, z. B.

1) Diese Methode findet sich schon bei Euler: cf. Encyklopädie I, p. 110, Fufsnote 294.

$f(x) = f_1(x) + C \cdot e^{-\frac{1}{x}}$. Auch die Entwickelung nach Polynomen ist für die Lösung der vorliegenden Frage verwertet worden (Borel).[1])

Ein anderes hierher gehöriges Problem, nämlich: „Wie läſst sich der Weierstraſssche Begriff der analytischen Fortsetzung in der Weise *erweitern*, daſs auch für analytische Funktionen, die jetzt als *nicht*-fortsetzbar erscheinen, eine Fortsetzung *eindeutig* definirt werden kann?" — hat noch keine irgendwie befriedigende Lösung gefunden. Auch die Übertragung der in I—VIII behandelten Fragen und Methoden auf Reihen, die nach *anderen* Funktionen, als ganzen Potenzen fortschreiten (Darboux, Servant), sowie auf Potenzreihen mit *mehreren* Veränderlichen (Lemaire, Painlevé, Biermann, Lerch) ist über bescheidene Anfänge noch nicht hinausgekommen.

X. Eine Anwendung haben zunächst die Mittag-Lefflerschen Polynomentwickelungen bei der Integration von Differentialgleichungen der Dynamik gefunden (Volterra). Da ferner jeder *Pol* von $F(x)^{-1}$ eine *Nullstelle* von $F(x)$, so können die Hadamardschen Resultate von Kap. V unmittelbar zur Berechnung der Nullstellen α_ν ganzer rationaler oder transzendenter Funktionen dienen, im letzteren Falle, falls die Anzahl der α_ν unendlich ist, auch zur Auffindung von Relationen zwischen dem Wachstum der $|\alpha_\nu|$ und dem asymptotischen Verhalten der Reihenkoeffizienten (Hadamard). Derartige asymptotische Wertbestimmungen ergeben sich auch für die Koeffizienten *nicht* beständig konvergierender Potenzreihen aus der Natur der auf C gelegenen singulären Stellen. Die Kriterien für die Nicht-Fortsetzbarkeit von Potenzreihen lassen sich unmittelbar in solche umsetzen, welche aussagen, ob eine *trigonometrische* Reihe eine *analytische* Funktion definiert oder nicht (wobei auch im *letzteren* Falle die unbeschränkte Differenzierbarkeit vorhanden sein kann). Daraus läſst sich u. a. erschlieſsen, daſs gewisse partielle Differentialgleichungen mit *analytischen* Koeffizienten lediglich *nicht-analytische* Lösungen zulassen (Borel).

Eine Ergänzung der hier mitgeteilten, im wesentlichen auf *Grenz*-Eigenschaften der Reihen-Koeffizienten beruhenden Untersuchungen bieten diejenigen, bei welchen deren *arithmetische* Natur in den Vordergrund tritt: dahin gehört vor allem der von Eisenstein ausgesprochene, von Heine[2]) bewiesene Satz über die Koeffizienten einer $\mathfrak{P}(x)$, welche Wurzel einer algebraischen Gleichung ist, und dessen von Tschebyscheff ausgesprochene (aber, wie es scheint, nirgends bewiesene) Erweiterung[3]), die ein analoges Kriterium dafür giebt, daſs $\mathfrak{P}(x)$ aus einer endlichen Anzahl von algebraischen Funktionen, Exponential-Funktionen und Logarithmen zusammengesetzt ist; ferner eine Anzahl ähnlicher Sätze über die Integrale gewisser Differential-Gleichungen (F. Gomes Teixeira, Hurwitz, Pincherle). Es verdient bemerkt zu werden, daſs ein Satz von dem eben angedeuteten Charakter, nämlich über die *arithmetische* Beschaffenheit der Koeffizienten von Potenzreihen, welche *meromorphe* Funktionen darstellen bezw. *nicht* dar-

---

1) Hier steht auf p. 85, Zeile 3 von unten das unverständliche Zitat (**86**).

2) Hier wäre unter (**95**) auſser Heines Arbeit im 45. Bande des Journ. f. Math. vor allem auch diejenige im 48. Bande (1854), p. 267—275 zu zitieren; ferner: Hermite, Proceed. of the Lond. Math. Soc. VII (1875), p. 173.

3) Eine auf den Fall gewisser spezieller transcendenter Gleichungen bezügliche Erweiterung giebt Heine, Handb. der Kugelf., 2. Aufl., I (1878), p. 52.

stellen können, ganz direkt aus einem der in V erwähnten Hadamardschen Sätze hergeleitet werden kann (Borel).

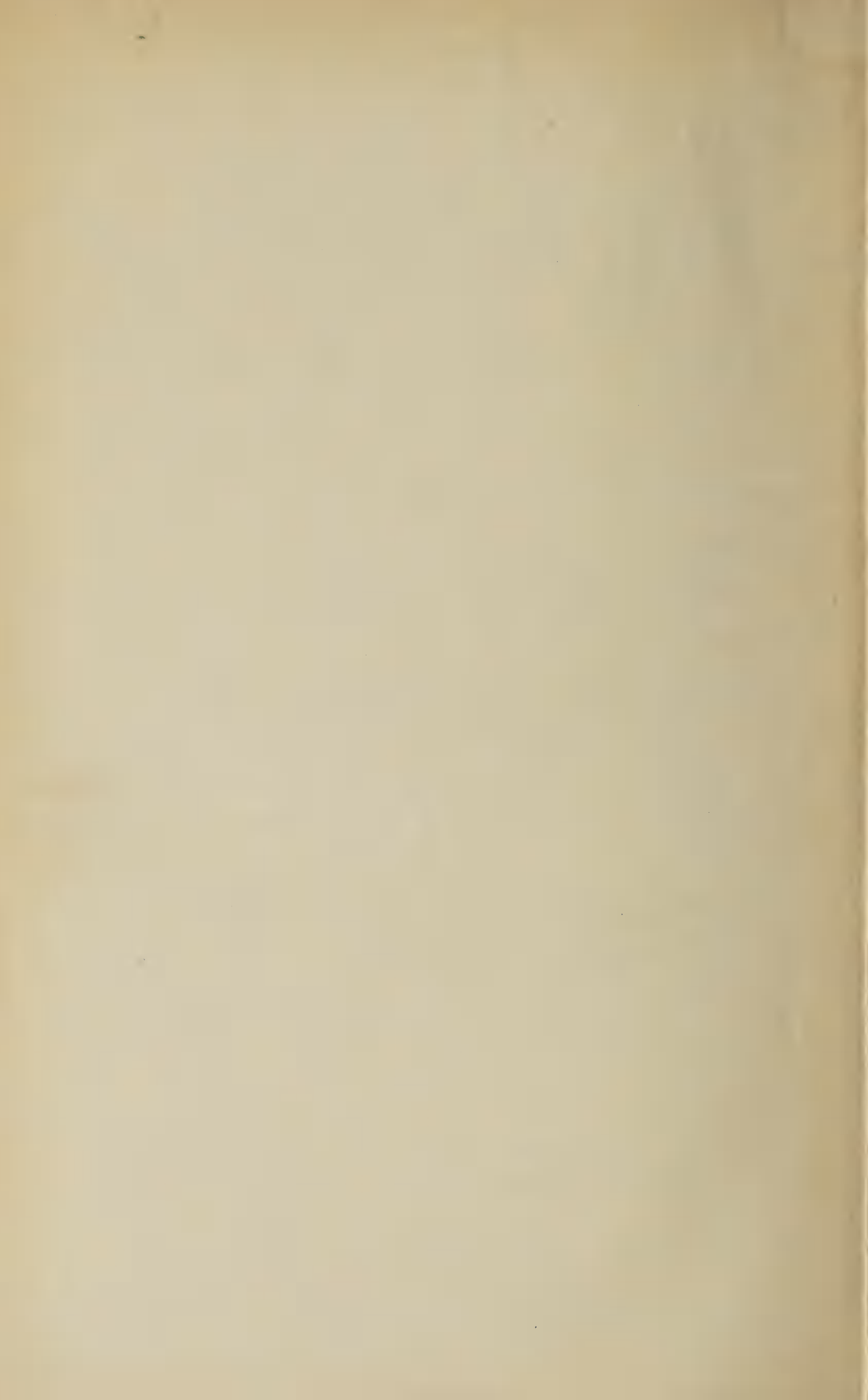
In einem Schlufswort kommt Herr H. zu folgendem Resultat: Das Problem *der analytischen Fortsetzung* erscheint durch Mittag-Lefflers Theorem im wesentlichen gelöst; dasjenige *der Bestimmung der Singularitäten* nur für eine immerhin ansehnliche Reihe besonderer Fälle, in denen sich die Resultate ganz verschiedenartiger Methoden begegnen. Als besonders wirksame Hilfsmittel haben sich die Verallgemeinerung des Grenzwert-Begriffes und die Einführung der Transmutationen erwiesen. Die Hauptschwierigkeit für weitere Untersuchungen besteht in einer geeigneten Umgrenzung des in seiner vollen Allgemeinheit kaum zugänglichen Problems: in dieser Hinsicht wäre es schon als ein bemerkenswerter Fortschritt anzusehen, wenn es gelänge, den Fall der Nicht-Fortsetzbarkeit von $\Sigma a_m x^m$ durch Formulierung geeigneter Bedingungen von vornherein definitiv auszuscheiden.

Soviel über den Inhalt der vorliegenden Schrift. Die Gruppierung des weitverzweigten Stoffes ist vortrefflich, die Darstellung überall klar und durchsichtig. Besondere Erwähnung verdient das aufserordentlich reichhaltige, sorgfältig geordnete Litteraturverzeichnis.

Die von mir gegen einige Einzelheiten gemachten Einwendungen erscheinen relativ geringfügig und sind keinesfalls dazu angethan, die Vorzüge des interessanten und lehrreichen Buches in nennenswerter Weise zu mindern.

Der Vollständigkeit halber will ich schliefslich noch einige Druckfehler anmerken, die mir bei der Lektüre aufgefallen sind: Auf p. 19, Zeile 3 von unten lies: „*premier*" statt „*second*", dagegen Zeile 7 von unten: „*second*" statt „*premier*". — Auf p. 27 Gl. (22) ist rechts der Faktor $(-1)^m$ hinzuzufügen. — Auf p. 28, Fufsn. (1), Zeile 3 lies: $L(m!)$ statt $L(!)$. — Auf p. 34 ist nicht ersichtlich, worauf die Fufsnote (1) sich bezieht. — Auf p. 42, Zeile 8, 9, desgl. Fufsnote (1), Zeile 3 lies: „*de ce numéro*" statt „*du numéro précédent*"; ferner Zeile 12 des Textes: „*No. 2*" statt „*No. 1*". — Auf p. 81, Zeile 15 lies: λ_i statt λ; desgl. Zeile 17: $\lambda_{m,0}$ statt $\lambda_{m,}0$. — Auf p. 96, Zeile 10 von unten lies: „*du reste*" statt „*d'ores et*". — Auf p. 99, Fufsnote, Zeile 3, lies: „*ch. X, No. 2*" statt: „*ch. X, No. 1*". — Im Inhaltsverzeichnis von Kap. IV. fehlt Nr. 8.

München, März 1902. ALFRED PRINGSHEIM.



JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON

A. GUTZMER

IN JENA.



12. BAND.

11. UND 12. (DOPPEL-)HEFT. NOVEMBER/DEZEMBER.

AUSGEGEBEN AM 22. DEZEMBER 1903.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1903.

☛ Das nächste Heft wird Mitte Januar 1904 ausgegeben werden.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG.

IN MONATSHEFTEN HERAUSGEGEBEN VON A. GUTZMER IN JENA.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTR. 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Bücher u. s. w.) sind an

Prof. Dr. A. Gutzmer in Jena, Schaefferstr. 4

zu richten.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich: von größeren Aufsätzen 25 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen und Mitteilungen 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band des Jahresberichts umfaßt vom 12. Bande ab 38 Bogen (= 608 Druckseiten) in Monatsheften und kostet für Mitglieder der Vereinigung, Porto inbegriffen, Mark 14.70, für Nichtmitglieder Mark 18.—. Mitglieder haben ihr Abonnement bei der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3, aufzugeben, Nichtmitglieder dagegen bei einer Sortimentsbuchhandlung.

☞ Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung zählt z. Zt. über 600 Mitglieder. Der jährliche Mitgliedsbeitrag beträgt 2 Mark, kann aber auch durch einmalige Zahlung von 30 Mark abgelöst werden. Beitrittserklärungen nimmt der Schriftführer der Vereinigung, Prof. Dr. A. Krazer, Karlsruhe in Baden, Westendstraße 57, oder die oben genannte Verlagsbuchhandlung entgegen. Die Ablösungssumme bezw. der Jahresbeitrag ist an die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig einzusenden.

INHALT DES VORLIEGENDEN DOPPEL-HEFTES.

Sonderabdruck aus dem
Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Band XII. 1903. Heft 11/12.
In Monatsheften herausgegeben von A. Gutzmer in Jena.
Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Über die Definition von Funktionen einer Veränderlichen durch Grenzwerte von der Form $\lim\limits_{n=\infty} f_n(x)$.

Auf S. 504 des vorliegenden Bandes dieser Berichte findet sich eine ursprünglich für die Kasseler Versammlung bestimmte Mitteilung des Herrn E. Wölffing, in welcher gewisse in der Encyklopädie der math. Wissenschaften (Bd. II 1, p. 15, 16) von mir angegebene Beispiele für das Auftreten hebbarer Unstetigkeiten, insbesondere das Beispiel $f(x) = \lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{nx}$ (bei $x = 0$) für hinfällig erklärt werden. Obschon nun Herr W. die in der vorliegenden Frage noch wünschenswerten Aufklärungen offenbar nicht von mir[1]), vielmehr, wie er am Schlusse seiner Note ausdrücklich bemerkt, von „Sachverständigen auf dem Gebiete der Funktionen reeller Veränderlichen" erwartet, so wird es mir immerhin gestattet sein, auf seine Einwendungen an dieser Stelle einiges zu erwidern.

Ich kann Herrn W. zugestehen, daß er von *seinem* Standpunkte aus vollständig Recht hat, freilich nur in demselben Maße, wie etwa jemand, der behauptet, daß $2 . 2 = 5$ oder auch $2 . 2 = 0$ ist, sofern er nur zuvor erklärt hat, daß in *seiner* Schreibweise die Reihe der natürlichen Zahlen lautet: 1, 2, 3, 5, ..., bezw. daß *er* durch den *Punkt* als Operationszeichen diejenige Rechnungsoperation bezeichnet, die von gewöhnlichen Sterblichen durch das *Minus*zeichen angedeutet wird. Damit will ich zunächst nur folgendes feststellen: eine Verbindung arithmetischer Symbole besitzt *an und für sich* keinerlei bestimmte Bedeutung, sondern gewinnt eine solche erst auf Grund bestimmter, durch *Vereinbarung* festgesetzter *Definitionen*. Derartigen Vereinbarungen sich anzuschließen, ist selbstverständlich niemand verpflichtet. Immerhin empfiehlt es sich wenig, eine allgemein acceptierte und ausreichend erprobte Definition durch eine beliebige Privat-Definition zu ersetzen, zumal wenn die letztere sich als logisch fehlerhaft und praktisch unbrauchbar erweist. In dem vorliegenden Falle handelt es sich um die einfache Frage: Was hat man unter $f(a)$ zu verstehen, wenn $f(x)$ allgemein durch eine Beziehung von der Form:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x) \tag{1}$$

1) Andernfalls hätte er ja in Kassel zunächst doch wohl mich selbst darüber interpellieren können.

definiert ist? Wer über die angemessene Beantwortung dieser Frage noch zweifelhaft sein sollte, findet dieselbe mit einer, wie mir scheint, ausreichenden Gründlichkeit und Präzision auf S. 32 meines oben zitierten Encyklopädie-Artikels angegeben. Herr W. zieht es indessen vor, das dort Gesagte und speziell auch noch die in Fußnote 170 von mir eigens aufgepflanzte Warnungstafel einfach zu ignorieren und statt dessen folgende Belehrungen zu geben:

„In der Funktion (sc. $f(x) = \lim\limits_{n=\infty} f_n(x)$) ist x Veränderliche, n, *obwohl durch einen Grenzwert definiert, konstant* (?!). Soll aber der analytische Ausdruck einer Funktion überhaupt einen Sinn haben, so müssen die Konstanten feste Werte besitzen, solange die Veränderlichen noch unbestimmt sind. Es ist damit klar (?), daß der Grenzübergang $n = \infty$ *zuerst* vollzogen werden muß und dann derjenige $x = 0$ (sc. wenn es sich um die Herstellung von $f(0)$ handelt, also allgemein $x = a$ bei der Herstellung von $f(a)$), *nicht aber umgekehrt.*“

Sieht man von der völlig neuen und überraschenden Mitteilung ab, daß in einem Grenzausdrucke von der Form $\lim\limits_{n=\infty} f_n(x)$ das Zeichen n eine durch einen Grenzwert definierte *Konstante* bedeutet, und verzichtet auch im übrigen darauf, die nach Inhalt und Ausdruck gleich eigentümliche Motivierung der von Herrn W. aufgestellten Endregel kritisch zu würdigen, so bleibt noch die Brauchbarkeit dieser letzteren, d. h. der Formel:

$$f(a) = \lim_{x=a} \left(\lim_{n=\infty} f_n(x)\right) \tag{2}$$

zu prüfen. Daß diese aber der *formalen Logik* widerspricht, zeigt sofort ein Blick auf die für *jedes* in Betracht kommende x geltende *Definitions-Gleichung*, also *Identität* (1), aus welcher ja mit Notwendigkeit folgt, daß:

$$\lim_{x=a} f(x) = \lim_{x=a} \left(\lim_{n=\infty} f_n(x)\right), \tag{3}$$

d. h. der rechts stehende Grenzwert stellt in Wahrheit *nicht* $f(a)$, sondern den definitionsgemäß davon zu trennenden und unter geeigneten Umständen wirklich davon verschiedenen $\lim\limits_{x=a} f(x)$ dar.

Im übrigen ergibt sich ja aus dem bloßen Begriffe einer durch irgendwelche Rechenoperationen definierten Funktion, daß für die Bestimmung von $f(a)$ *nicht* die von Herrn W. angegebene Formel (2), vielmehr die folgende:

$$f(a) = \lim_{n=\infty} f_n(a) \tag{4}$$

in Anwendung zu kommen hat. Wenn z. B. die Funktion $f(x) = x^3$ vorgelegt ist und ich das Bedürfnis fühle, mich über den Wert von $f(7)$ zu orientieren, so kann ich das doch keinesfalls in der Weise erzielen, daß ich die erforderliche Rechnung zuerst an einem „unbestimmten“, d. h. völlig nebelhaften x vollziehe und in dem hierbei gewonnenen Endresultate (?) $x = 7$ setze, sondern ich muß mich von vornherein der ganz gewöhnlichen Zahl 7 bemächtigen, um sodann mit Hilfe des kleinen Einmaleins und der dekadischen Multiplikation zu eruieren, daß $7^2 = 49$, $7^3 = 7 \cdot 49 = 343$,

also schließlich $f(7) = 343$. Hierin liegt der springende Punkt: bei der Bestimmung von $f(a)$ sind die zur Definition von $f(x)$ vorgeschriebenen Rechenoperationen *nicht* an irgend einem mysteriösen x, sondern an einer ganz bestimmten *Zahl* a vorzunehmen.[1]) In dem vorliegenden Falle hat man also zunächst aus der *Zahl* a die *Zahl* $f_n(a)$ oder besser gesagt, mit einem gewissen $n = m$ beginnend, die *Zahlenfolge* $f_m(a)$, $f_{m+1}(a) \ldots$ zu bilden, um dann schließlich die gesuchte *Zahl* $f(a)$ als *Grenzwert* dieser *Zahlenfolge* zu definieren: das ist aber genau dasselbe, was die Formel (4) besagt.

Die Unbrauchbarkeit des W.schen Rezeptes tritt noch unmittelbarer zu Tage, wenn man $f(x)$ von vornherein statt in der Form eines gewöhnlichen Limes in derjenigen eines unendlichen Algorithmus, etwa einer unendlichen Reihe anschreibt. Es sei z. B. für alle positiven $x \leqq 1$:

$$(5) \qquad f(x) = \sum_0^\infty{}_\nu \left(\frac{x^{4\nu+1}}{4\nu+1} + \frac{x^{4\nu+3}}{4\nu+3} - \frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right),$$

so kann man doch ohne zwingende Gegengründe unter $f(1)$ garnichts anderes verstehen, als die Summe der konvergenten Reihe:

$$\sum_0^\infty{}_\nu \left(\frac{1}{4\nu+1} + \frac{1}{4\nu+3} - \frac{1}{2\nu+2}\right),$$

sodaß sich also mit Hilfe eines bekannten Resultates ergibt:

$$(6) \qquad f(1) = \tfrac{3}{2} \lg 2.$$

Da andererseits Gl. (5) identisch ist mit der folgenden:

$$(7) \qquad f(x) = \lim_{n=\infty} \sum_0^n{}_\nu \left(\frac{x^{4\nu+1}}{4\nu+1} + \frac{x^{4\nu+3}}{4\nu+3} - \frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right),$$

so hätte man nach Herrn W.s Auffassung den betreffenden Grenzübergang zunächst für „unbestimmtes“ $x \leqq 1$ auszuführen, wobei sich dann:

$$(8) \qquad f(x) = \lg(1+x)$$

und schließlich:

$$(9) \qquad f(1) = \lg 2$$

ergeben würde, was offenbar *falsch* ist; in Wahrheit hat man nur:

$$(10) \qquad \lim_{x=1-0} f(x) \equiv f(1-0) = \lg 2.$$

---

1) Dies gilt auch im Falle eines *irrationalen* a, natürlich unter der Voraussetzung, daß diejenigen Rechnungsregeln, welche zur Berechnung von $f(a)$ für *rationale* a erforderlich sind, eine entsprechende *Erweiterung* für den Fall eines *irrationalen* a erfahren haben. Dabei wird dann freilich, wenn etwa $a = \lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu$, wo a_μ *rational*, $f(a)$ *im allgemeinen* (d. h. allemal, wenn nicht in dem arithmetischen Ausdrucke $f(x)$ die Veränderliche x nur in Verbindungen, wie $x - a$, $\frac{x}{a}$ etc. auftritt) ausschließlich als $\lim\limits_{\mu=\infty} f(a_\mu)$ berechenbar sein und somit die Definition von $f(a)$ lediglich durch $f(a \pm 0)$ gegeben werden können. Vgl. Encyklopädie a. a. O. p. 32, auch Bd. I, p. 73.

Die im Eingange erwähnten, von Herrn W. erhobenen Einwendungen gegen die fraglichen Funktions-Beispiele beruhen tatsächlich einzig und allein auf der im vorstehenden näher charakterisierten irrtümlichen Auffassung einer Definitions-Gleichung von der Form $f(x) = \lim_{n=\infty} f_n(x)$. Gibt man der letzteren die allgemein übliche und in der Encyklopädie a. a. O. ausdrücklich hervorgehobene Bedeutung, so erweisen sich jene Beispiele als *vollkommen einwandfrei.*

Neben die obige, von mir als *„allgemein üblich"* bezeichnete, insbesondere von Weierstraß, Cantor, Heine u. a. gelegentlich scharf betonte Auffassung ist *neuerdings* (d. h. *nach* dem Erscheinen des fraglichen Encyklopädie-Artikels) eine wesentlich davon abweichende getreten. Dieselbe, von E. B. Christoffel herrührend, findet sich in einem kurz vor seinem Tode verfaßten, im 53. Bande (1900) der mathematischen Annalen publizierten Aufsatze: „Über die Vollwertigkeit und die Stetigkeit analytischer Ausdrücke". Um eine völlig *einheitliche* Definition einer Funktion $F(x)$ durch einen (zunächst als *begrenzt* anzunehmenden) *analytischen Ausdruck*[1]) $f(x)$ zu gewinnen, definiert er $F(a)$, *gleichgültig,* ob a zu den *„numerisch unmittelbar verwendbaren"* Argumenten gehört oder *nicht,* in jedem Falle durch $f(a \pm 0)$, d. h. durch $\lim_{\mu=\infty} f(a_\mu)$, wo $\lim_{\mu=\infty} a_\mu = a$ und die a_μ numerisch verwendbare Argumente bedeuten. Liefert, im Falle eines numerisch verwendbaren a, die *direkte* Auswertung von $f(a)$ einen von $f(a \pm 0)$ *verschiedenen* Wert, so ist dieser einfach zu *verwerfen*[2]) (a. a. O. p. 476, C). Soll sodann ein *unendlicher* Algorithmus $\lim_{\nu=\infty} f_\nu(x)$ zur Bestimmung einer Funktion $F(x)$ für den Argumentwert $x = a$ dienen, so verlangt Christoffel, daß die hinlänglich entfernten Terme der zweifach-unendlichen Zahlenfolge:

$$\begin{matrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_\mu) & \cdots \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_\mu) & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_\nu(a_1) & f_\nu(a_2) & \cdots & f_\nu(a_\mu) & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

zu beliebig angenäherter Berechnung von $F(a)$ verwendbar sein sollen, mit

1) Über die besondere Art des analytischen Ausdruckes wird keinerlei Voraussetzung gemacht, nur verlangt, daß er geeignet sei, „eine Wertbestimmung zu leisten".

2) Berechtigung und Zweck dieser Festsetzung will mir nicht recht einleuchten. Darnach hätte man z. B. die zwei *verschiedenen analytischen Ausdrücke:*

$$f_1(x) = x^2$$
$$f_2(x) = x^2 + E\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

als *ein und dieselbe Funktion* definierend anzusehen. Eine derartige *Trennung* der Begriffe *„Funktion"* und *„analytischer Ausdruck"* erweist sich zwar in der Theorie der *analytischen* Funktionen als zweckmäßig, ja als notwendig, da *dort* bereits ein fest umgrenzter *Funktions*-Begriff von vornherein vorliegt. *Hier* aber würde der schließliche Erfolg einzig darin bestehen, daß man neben der *spezielleren* Theorie der reellen *„Funktionen"* noch eine *allgemeinere* der reellen *„analytischen Ausdrücke"* entwickeln müßte.

anderen Worten, er postuliert nicht nur die Existenz von $\lim\limits_{\nu=\infty}(\lim\limits_{\mu=\infty} f_\nu(a_\mu))$, sondern geradezu diejenige von $\lim\limits_{\mu,\nu=\infty} f_\nu(a_\mu)$ und definiert sodann:

$$F(a) = \lim_{\mu,\nu=\infty} f_\nu(a_\mu).$$

Argumentwerte a, für welche dieser *Doppel-Limes nicht* konvergiert, bezeichnet er als *singuläre Stellen* und bemerkt nur generell, daß auch für *solche* Argumente „unter geeigneten Umständen“ auf dem Wege des Grenzüberganges bestimmte Funktionswerte zum Vorschein kommen können. Da aber im Falle der *Divergenz* jenes *Doppel*-Limes eine Wertbestimmung lediglich mit Hilfe der früher von uns betrachteten *iterierten* Limites geleistet werden kann, so wird man hier tatsächlich auf unsere *frühere* Definition zurückgeführt und sieht sich zugleich auch genötigt, die zuvor künstlich beseitigten Unterscheidungen von $F(a)$, $F(a+0)$, $F(a-0)$ wieder einzuführen. Schließlich besteht der *wesentliche* Unterschied zwischen jener *früheren* und der Christoffelschen Auffassung nur darin, daß man *dort* die *Regeln für das Rechnen mit Irrationalzahlen* als bereits definitiv erledigt, nämlich als etwas *vor* Einführung des Funktionsbegriffes in ausreichender Weise zu begründendes ansieht, während Christoffel die entsprechenden Betrachtungen mit der *Definition* des Funktionsbegriffes direkt *verbindet*. Mir erscheint der *erstere* Weg als der logisch natürlichere und zweckmäßigere.

München, November 1903. ALFRED PRINGSHEIM.

